Riemann ゼータ関数の偏角ひねりのモーメントについて

神奈川大学　井上 翔太
Shōta Inoue
Kanagawa University

1　導入

本稿では Riemann ゼータ関数のモーメント評価について, [8] で得られた結果を述べる．Riemann ゼータ関数のモーメント評価は, 素数分布へ応用される重要な研究対象である．また本稿では, Riemann ゼータ関数を偏角でひねった関数のモーメントを考えるのだが, それは零点の分布にも関係付けられる．これら背景の詳細を以下で述べ, その後に筆者の研究について紹介したい.

1.1　Riemann ゼータ関数のモーメント

Riemann ゼータ関数 ζ は Dirichlet 級数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

で定義される．この級数は $\mathrm{Re}\, s > 1$ において絶対収束する．その他の範囲では $s = 1$ のみを極とする有理型関数へ解析接続されることがよく知られて

いる．Riemann ゼータ関数の臨界領域 $0 < \mathrm{Re}\, s < 1$ での振る舞いは, 素数分布に密接に関係する．たとえば, Ingham [5] により次の定理が証明されている．

定理 A. もし, $\zeta(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t) \ll_c t^c$ が成り立つならば, $p_{n+1}-p_n \ll_c p_n^{1-1/2(1+2c)}$ が成り立つ．ここで, p_n は n 番目の素数である．

この定理により, Riemann ゼータ関数の振る舞い, 特に増大度を調べることが素数分布を理解する上で重要となることがわかる．上記の Riemann ゼータ関数の大きさの評価は任意に小さな正の定数 c で成り立つことが予想されており, その予想を Lindelöf 予想と呼ぶ.

次に, 本題であるモーメントを定義する．Riemann ゼータ関数の臨界線 $\mathrm{Re}\, s = 1/2$ 上での $2k$ 次モーメントを

$$M_k(T) = \int_T^{2T} |\zeta(\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}t)|^{2k}\, \mathrm{d}t$$

と定義する．つまりモーメントは Riemann ゼータ関数の絶対値の冪乗の積分平均のことである．多くの事象において, 個別の値を把握するよりも平均を把握することの方が易しい．Riemann ゼータ関数においてもそれは例外ではなく, 例えば, Hardy と Littlewood [1] によって

$$M_1(T) \sim T \log T$$

が成り立つことが証明されている．この漸近評価により, Riemann ゼータ関数は平均的に $|\zeta(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t)| = \sqrt{\log t}$ が成り立つことを意味する．特にこれは, 平均的には Lindelöf 予想が成り立っていることを主張する．しかし, この 2 次モーメントでの考察を, 平均の値としてではなく個別の値に応用することは難しく, Lindelöf 予想は現状でも非常に困難な未解決問題である.

一方で, 高次のモーメントを考えることで, モーメントから個別の値の情報を得られることが知られている．実際に, Lindelöf 予想が成り立つことと,

任意の正の整数 k と任意の正の数 ε に対して

$$M_k(T) \ll T^{1+\varepsilon} \tag{1.1}$$

が成り立つことが同値である．この事実から, モーメントは問題を簡易化した対象なだけでなく, それ自体も重要な研究対象となる．現時点で評価 (1.1) は実数 $0 \leq k \leq 2$ で [3] によって証明されているが, その他の範囲では未解決である．

1.2 Riemann ゼータ関数の偏角ひねりのモーメント

次に Riemann ゼータ関数のモーメントの亜種として

$$\widetilde{M}_k(T) = \int_T^{2T} \exp\left(2k \operatorname{Im} \log \zeta(\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}t)\right) \, \mathrm{d}t$$

を考える．これは $M_k(T)$ の類似物と考えることができる．実際に上記の Im を Re に変更すれば元々の $M_k(T)$ と一致する．Riemann ゼータ関数の臨界線上での偏角 $\operatorname{Im} \log \zeta(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t)$ は Riemann-von Mangoldt 公式

$$\begin{aligned} N(T) &\coloneqq \#\left\{\rho = \beta + \mathrm{i}\gamma \ : \ \zeta(\rho) = 0, 0 < \gamma < T\right\} \\ &= \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi e}\right) + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \log \zeta(\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}T) + \frac{7}{8} + O\left(\frac{1}{T}\right) \end{aligned}$$

によって零点の虚部の分布と関係付けられる． このことから, $\widetilde{M}_k(T)$ は $M_k(T)$ とは独立に興味深い対象となる．恐らく $\widetilde{M}_k(T)$ を最初に調べたのは Najnudel [11] で, 彼は $\widetilde{M}_k(T)$ を Riemann 予想下で調べた．彼の研究について, また後に再訪する．

本稿では, 上記二つのモーメント $M_k(T)$, $\widetilde{M}_k(T)$ を包括して扱うために, 偏角ひねりのモーメント

$$M_{k,\theta}(T) = \int_T^{2T} \exp\left(2k \operatorname{Re} e^{-\mathrm{i}\theta} \log \zeta(\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}t)\right) \, \mathrm{d}t$$

を考える．このとき, $M_{k,0}(T) = M_k(T)$, $M_{k,\frac{\pi}{2}}(T) = \widetilde{M_k}(T)$ となることから, $M_{k,\theta}(T)$ は前述二つのモーメントの一般化であることが分かる．本稿ではこの一般化されたモーメントを考え, いくつかの先行研究の一般化と改良についての筆者の研究を述べる.

2　モーメントの先行研究と本研究の課題

本稿ではモーメントの上からの評価を主として考察するのだが, 最初にモーメントの大きさの観察として重要な予想を紹介する.

予想 (Keating-Snaith [10])**.** 任意の $k > -1/2$ に対して $T \to +\infty$ のとき

$$M_k(T) \sim C(k)T(\log T)^{k^2}.$$

ただし, $C(k)$ は k のみに依存して明示的に表示される定数である.

これは Lindelöf 予想と同値な評価 (1.1) をより精密にしたものである．この予想は $k = 1$ の場合に Hardy-Littlewood [1], $k = 2$ の場合に Ingham [4] によって証明されており, その他は自明な $k = 0$ の場合を除いて未解決である．一方で, 上からの評価

$$M_k(T) \ll_k T(\log T)^{k^2} \tag{2.1}$$

であれば $0 \leq k \leq 2$ に対しても [3] によって証明されている．しかし, $k > 2$ の場合は難しく, 証明の目処すらたっていないのが現状である．これは Riemann 予想などの強い予想の仮定下であっても同様の状況だったのだが, Soundararajan [13] の研究により状況が一変した．Soundararajan は, 任意の $k \geq 0$, $\varepsilon > 0$ に対して

$$M_k(T) \ll_{k,\varepsilon} T(\log T)^{k^2+\varepsilon}$$

が成り立つことを Riemann 予想の仮定下で証明した．この評価は (2.1) に僅かに届かないが, $T(\log T)^{k^2}$ が $k > 0$ において真な上からの評価である

ことを明確に示唆した重要な結果である．そしてその後驚くべきことに, Harper [2] は Riemann 予想下で (2.1) を $k > 0$ で完全に証明した.

その後, Najnudel [11] は $\widetilde{M_k}(T)$ に対して同様の研究を行い, Soundararajan の評価に相当する

$$\widetilde{M_k}(T) \ll_{k,\varepsilon} T(\log T)^{k^2+\varepsilon}$$

を Riemann 予想下で証明した．しかし, Najnudel の研究では Harper の評価に相当する評価は得られておらず, それは彼自身も課題として言及していた．本研究の一つ目の課題はこれを解決することである.

加えてこれらの研究は Riemann 予想の仮定下での研究である．よって Riemann 予想を仮定しない無条件下で, これらの研究をどの程度復元できるかも考えるべき課題である．この課題に対して筆者は Li 氏 [9] との研究で, 筆者が [7] で証明した Riemann ゼータ関数の近似公式を用いることで, ある正の定数 A に対して

$$\widetilde{M_k}(T) \ll T(\log T)^A$$

を $0 \le k \le a$ で証明した．ただし, a の大体の大きさは約 e^{-10} であり, この k の範囲は非常に狭い．本研究のもう一つの課題はこの k の範囲を広げることである.

3 主結果

前節で述べた課題を背景として, 筆者は以下の定理を証明した.

定理 1. Riemann 予想が正しいと仮定する． このとき, 任意の $k \ge 0$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, そして十分大きな絶対定数 T_0 で $T \ge T_0$ をみたす任意の T に対して

$$M_{k,\theta}(T) \ll_k T(\log T)^{k^2}$$

が成り立つ.

この定理は Harper の結果を偏角ひねりのモーメントへ拡張し, さらに Najnudel の結果を改良するものである. その結果, 前節で述べた一つ目の課題を解決することに成功できた. また上記の定理で, T の範囲を制限する T_0 は k に依存せずに取ることができる. 詳細は割愛するが, これにより上記の定理は Riemann 予想下での Littlewood の評価を復元することができ, その点においてこの定理は Harper の結果の改良である.

また無条件下での結果として以下も得た.

定理 2. 任意の $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ に対して, ある $a(\theta) > \frac{4}{27}$ が存在し, 任意の $0 \leq k < a(\theta)$ に対して,

$$M_{k,\theta}(T) \ll T(\log T)^A$$

が成り立つ. 特に, $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ のとき, $a(\pm\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{3\pi}$ とできる.

この定理は Li 氏の研究で得た, 無条件下でのモーメント評価の k の範囲を広げたものである. よってこれにより, 前節で述べた二つ目の課題についても一定の進捗を与えることができた.

4　証明の概要

本稿の締めくくりとして, 上記定理の証明で必要となる, Riemann ゼータ関数の近似公式について述べる. 特にここでは, Soundararajan, Harper, Najnudel が用いた近似式をどのように変更したかに重点をおいて説明したい. また本稿では, 簡単のため, $\theta = \frac{\pi}{2}$ に限定したものを述べる. まず, Harper の $M_k(T)$ に対する証明では, Soundararajan による Riemann ゼータ関数に対するある不等式が重要な役割を果たすのだが, $\widetilde{M_k}(T)(= M_{k,\frac{\pi}{2}}(T))$ に対してはその不等式を応用することができない. その理由から, Najnudel は Harper の結果まで辿り着くことができなかった. そこで筆者

はこの問題を解決するために, Selberg [12] の手法を用いた．加えて, 定理 2 の証明の際に k の範囲を最適化するために, Selberg の手法にあるパラメータを加えて最適化を行なった．それを述べるためにいくつかの記号を導入する．まず,

$$\sigma_K(t,X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} \max_{|t-\gamma| \le K X^{|\beta-1/2|}/\log X} \left\{ \beta - \frac{1}{2}, \frac{K}{\log X} \right\}$$

と定義する．この関数は虚部が t を基準に, 実部が 1/2 から離れた零点に応じて値を変える．例えば, 虚部が t 近くの零点全てが実部 1/2 に近い時は, $\sigma_K(t,X)$ も 1/2 に近い値をもち, 逆に 1/2 から離れる零点が存在すれば, それに応じて 1/2 よりも大きくなる．実際にもし Riemann 予想が正しいならば, $\sigma_K(t,X)$ は $1/2 + K/(\sqrt{2}-1)\log X$ となり, X が K に依存して十分大きいときには 1/2 に十分近い値となる．加えて, よく知られた零点密度定理から, この関数が "平均的" には 1/2 に近いことも現時点で unconditional に証明可能である．この関数の元となる定義は Selberg [12] によるもので, 本研究ではパラメータ K を導入することで彼の定義を変更した．この変更が本研究の重要なアイディアのひとつである．この定義により, 以下の命題 1 の明示的定数を 2π とすることができ, その結果定理 2 の k の範囲を得ることができた．また $K \ge 1$, $X \ge 3$ に対して

$$w_X(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } 1 \le y \le X^{1/3}, \\ \frac{9(\log(X/y))^2 - 6(\log(X^{2/3}/y))^2}{2(\log X^{2/3})^2} & \text{if } X^{1/3} \le y \le X^{2/3}, \\ \frac{9(\log(X/y))^2}{2(\log X)^2} & \text{if } X^{2/3} \le y \le X, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &P_K(t,X) \\ &= \sum_{p \le X} \left(\frac{w_X(p)}{p^{s_K(t,X)}} \left(1 + (\sigma_K(t,X) - \tfrac{1}{2}) \log p\right) + \frac{1}{2p^{2s_K(t,X)}} \right) \end{aligned}$$

とする．ただし，$s_K(t,X)=\sigma_K(t,X)+\mathrm{i}t$ である．これらの定義は本質的には Selberg [12] によるものである．このとき我々は以下の命題を得る．

命題 1. 十分大な K を固定する．このとき，任意の $|t|\geq 3$, $3\leq X\leq |t|^6$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\left|\operatorname{Im}\log\zeta(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t)-\operatorname{Im}P_K(t,X)\right| \\
&\leq \left(2\pi+\frac{C_1}{K}\right)(\sigma_K(t,X)-\tfrac{1}{2}) \\
&\qquad\qquad\times\left(\frac{1}{2}\log|t|-\operatorname{Re}\sum_{p\leq X}\frac{w_X(p)\log p}{p^{s_K(t,X)}}+C_1\log X\right).
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで，C_1 は正の絶対定数である．

この命題により $\operatorname{Im}\log\zeta(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t)$ は，Dirichlet 多項式 $\operatorname{Im}P_K(t,X)$ で近似できることが分かる．そして，$\operatorname{Im}P_K(t,X)$ を Harper [2] の手法を用いて計算することで定理 1 を得ることができる．そしてさらに Ingham [6] の零点密度定理を援用することで，定理 2 を得ることもできる．

謝辞

この講究録は 2023 年度 RIMS 研究集会「解析的整数論とその周辺」で筆者が発表した内容に基づくものである．その講演を快く受け入れていただいた研究代表者である安福悠先生，そして研究副代表者である中筋麻貴先生にこの場を借りて深くお礼申し上げます．

参考文献

[1] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes, *Acta Arith.* **41** (1918), 119–196.

[2] A. J. Harper, Sharp conditional bounds for moments of the Riemann zeta function, preprint, `arXiv:1305.4618`.

[3] W. Heap, M. Radziwiłł, and K. Soundararajan, Sharp upper bounds for fractional moments of the Riemann zeta-function, *Quart. J. Math.* **70** (2019), 1387–1396.

[4] A. E. Ingham, Mean-value theorems in the theory of the Riemann zeta function, *Proc. Lond. Math. Soc.* **27** (1926), 273–300.

[5] A. E. Ingham, On the difference between consecutive primes, *Quart. J. Math.* **8** (1937), 255–266.

[6] A. E. Ingham, On the estimation of $N(\sigma, T)$, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **11** (1940), 291–292.

[7] S. Inoue, On the logarithm of the Riemann zeta-function and its iterated integrals, preprint, `arXiv:1909.03643`, to appear in *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa CI. Sci.*

[8] S. Inoue, Exponential moments of the logarithm of the Riemann zeta-function twisted by arguments, preprint, `arXiv:2208.11442`.

[9] S. Inoue and J. Li, Joint value distribution of L-functions on the critical line, preprint, `arXiv:2102.12724`.

[10] J. P. Keating and N. C. Snaith, Random matrix theory and $\zeta(1/2 + it)$, *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), 91–110.

[11] J. Najnudel, Exponential moments of the argument of the Riemann zeta function on the critical line, *Mathematika* **66** (2020), 612–621.

[12] A. Selberg, Contributions to the theory of the Riemann zeta-function, Avhandl. Norske Vid.-Akad. Olso I. Mat.-Naturv. Kl., no.1; Collected Papers, Vol. 1, New York: Springer Verlag. 1989, 214–280.

[13] K. Soundararajan, Moments of the Riemann zeta-function, *Ann. of Math.* (2) **170** (2009), 981–993.