Gregory coefficients and Hurwitz–Lerch multiple zeta functions at non-positive integer points

九州大学　小野塚　友一
Tomokazu Onozuka, Kyushu University

1　イントロダクション

$a_1,\dots,a_r,z_1,\dots,z_r\in\mathbb{C}$ を $\Re(a_1),\Re(a_1+a_2),\dots,\Re(a_1+\cdots+a_r)>0$ かつ $|z_1|,\dots,|z_r|\le 1$ を満たすパラメータとし, さらに $z_1,\dots,z_r\neq 0$ とする．このとき複素変数 $s_1,\dots,s_r\in\mathbb{C}$ に対し, Hurwitz–Lerch 多重ゼータ関数を次の級数で定義する．

$$\begin{aligned}&\zeta(s_1,\dots,s_r;a_1,\dots,a_r;z_1,\dots,z_r)\\&\qquad:=\sum_{0\le m_1,\dots,m_r}\frac{z_1^{m_1}\cdots z_r^{m_r}}{(m_1+a_1)^{s_1}\cdots(m_1+\cdots+m_r+a_1+\cdots+a_r)^{s_r}}\end{aligned}$$

ただし $\Re(s_1),\dots,\Re(s_r)>1$ とし, また $-\pi<\arg(m_1+\cdots+m_j+a_1+\cdots+a_j)\le\pi$（$1\le j\le r$）とする．この関数は多重ゼータ値と Hurwitz–Lerch ゼータ関数の多変数関数への一般化となっている． 実際, $k_1,\dots,k_r\in\mathbb{Z}_{\ge1}$, $k_r>1$ とすると, $\zeta(k_1,\dots,k_r;1,\dots,1;1,\dots,1)$ は多重ゼータ値であり, 1 変数の場合の $\zeta(s;a;z)$ は Hurwitz–Lerch ゼータ関数である．

Hurwitz–Lerch ゼータ関数の非正整数における特殊値は Apostol[2] により与えられた．

$$\zeta(-n;a;z)=-\frac{B_{n+1}(a;z)}{n+1}\quad(n\in\mathbb{Z}_{\ge0})$$

ここで $B_{n+1}(a;z)$ は Apostol–Bernoulli 多項式とよばれるもので, 次の母関数により定義される．

$$\frac{xe^{ax}}{ze^x-1}=\sum_{n\ge0}B_n(a;z)\frac{x^n}{n!}$$

Apostol–Bernoulli 多項式は $z=1$ のときには Bernoulli 多項式（つまり $B_n(a;1)=B_n(a)$）になる．最初の 4 つの例を見てみると, $z\neq1$ のときは

$$B_0(a;z)=0,\quad B_1(a;z)=\frac{1}{z-1},\quad B_2(a;z)=\frac{2}{z-1}a-\frac{2z}{(z-1)^2}$$

$$B_3(a;z) = \frac{3}{z-1}a^2 - \frac{6z}{(z-1)^2}a + \frac{3z(z+1)}{(z-1)^3}$$

となり, $z=1$ のときは

$$B_0(a;1) = 1, \quad B_1(a;1) = -\frac{1}{2} + a, \quad B_2(a;1) = \frac{1}{6} - a + a^2$$
$$B_3(a;1) = \frac{a}{2} - \frac{3a^2}{2} + a^3$$

となる.

2 主結果

Apostol の１変数での結果に対し, 私は村原英樹氏との共同研究により, Hurwitz–Lerch 多重ゼータ関数の非正整数点における漸近挙動を与えた. その結果の紹介のために, まずは必要となる記号と関数を導入する.

$1 \le i \le r$ を満たす整数 i と r に対し, $n(i,r) := n_i + \cdots + n_r$, $l(i,r) := l_i + \cdots + l_r$, $\epsilon(i,r) := \epsilon_i + \cdots + \epsilon_r$ と定める. $j = 1, \ldots, r-1$ と $d_1, \ldots, d_{r-1} \in \{0,1\}$ に対して

$$S_j^{(d_j)} = S_j^{(d_j)}(l_1, \ldots, l_r)$$
$$:= \begin{cases} \{(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^r \mid n(j+1,r) \le l(j+1,r) + (r-j), n(1,r) = l(1,r) + r\} & \text{if } d_j = 0, \\ \{(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^r \mid l(j,r) + (r-j) < n(j+1,r), n(1,r) = l(1,r) + r\} & \text{if } d_j = 1 \end{cases}$$

とし, また

$$S^{(d_1,\ldots,d_{r-1})} = S^{(d_1,\ldots,d_{r-1})}(l_1, \ldots, l_r) := \bigcap_{j=1}^{r-1} S_j^{(d_j)}$$

と定義する. さらに非負整数 $n_1, \ldots, n_r$ と $d_1, \ldots, d_{r-1} \in \{0,1\}$ に対して

$$h^{(d_1,\ldots,d_{r-1})}(n_1, \ldots, n_r) = h^{(d_1,\ldots,d_{r-1})}(n_1, \ldots, n_r; l_1, \ldots, l_r; \epsilon_1, \ldots, \epsilon_r)$$
$$:= (-1)^{l_r} l_r! \prod_{j=1}^{r-1} h_j^{(d_j)}(n_1, \ldots, n_r; l_1, \ldots, l_r; \epsilon_1, \ldots, \epsilon_r)$$

と定義する. ただし

$$h_j^{(d_j)}(n_1, \ldots, n_r; l_1, \ldots, l_r; \epsilon_1, \ldots, \epsilon_r)$$
$$:= \begin{cases} \dfrac{(-1)^{l_j}(-(n(j+1,r) - l(j,r) - (r-j)))!}{(-(n(j+1,r) - l(j+1,r) - (r-j)))!} & \text{if } d_j = 0, \\ \dfrac{\epsilon(j+1,r)}{\epsilon(j,r)} \cdot \dfrac{(n(j+1,r) - l(j+1,r) - (r-j) - 1)!}{(n(j+1,r) - l(j,r) - (r-j) - 1)!} & \text{if } d_j = 1 \end{cases}$$

とする. 以上の準備のもと, Hurwitz–Lerch 多重ゼータ関数の非正整数点における漸近挙動は次のように与えられる.

Theorem 2.1 (Murahara-O. [4]). $r \geq 2$ とし, 複素パラメータ $a_1, \ldots, a_r, z_1, \ldots, z_r$ は $\Re(a_1), \Re(a_1+a_2), \ldots, \Re(a_1+\cdots+a_r) > 0$ と $z_1, \ldots, z_r \notin (1, \infty)$ を満たすものとする. 複素数 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r$ は絶対値 $|\epsilon_1|, \ldots, |\epsilon_r|$ が十分小さく, かつ $\epsilon_j \neq 0, \epsilon(j,r) \neq 0$ で, 極限 $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r) \to (0, \ldots, 0)$ は $|\epsilon_k/\epsilon(j,r)| \ll 1$ を満たすように取るものとする（$j = 1, \ldots, r$, $k = j, \ldots, r$）. このとき非負整数 $l_1, \ldots, l_r$ に対して次式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&\zeta(-l_1+\epsilon_1, \ldots, -l_r+\epsilon_r; a_1, \ldots, a_r; z_1, \ldots, z_r) \\
&= (-1)^{l(1,r)+r} \\
&\quad \sum_{d_1,\ldots,d_{r-1} \in \{0,1\}} \sum_{(n_1,\ldots,n_r) \in S^{(d_1,\ldots,d_{r-1})}} \frac{B_{n_1}(a_1; z_1) \cdots B_{n_r}(a_r; z_r)}{n_1! \cdots n_r!} h^{(d_1,\ldots,d_{r-1})}(n_1, \ldots, n_r) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r} O(|\epsilon_j|).
\end{aligned}
$$

3 例

上の結果は複雑なため, $r = 2$ で $(l_1, l_2) = (0, 0)$ の場合の例を見てみよう. つまり Hurwitz–Lerch ダブルゼータ関数の原点における挙動だが, それは上の結果を用いると次のように書ける.

$$
\begin{aligned}
\zeta(\epsilon_1, \epsilon_2; a_1, a_2; z_1, z_2) &= B_1(a_1; z_1) B_1(a_2; z_2) + \frac{1}{2} B_2(a_1; z_1) B_0(a_2; z_2) \\
&\quad + \frac{1}{2} B_0(a_1; z_1) B_2(a_2; z_2) \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} + \sum_{j=1}^{2} O(|\epsilon_j|)
\end{aligned}
$$

Apostol–Bernoulli 多項式を具体的な形に書き直すと,（$z_1, z_2 \neq 1$ とする）

$$
\begin{aligned}
\zeta(\epsilon_1, \epsilon_2; a_1, a_2; z_1, z_2) &= (z_1 - 1)^{-1} (z_2 - 1)^{-1} + \sum_{j=1}^{2} O(|\epsilon_j|), \\
\zeta(\epsilon_1, \epsilon_2; a_1, a_2; 1, z_2) &= \left(a_1 - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{z_2 - 1} + \left(\frac{1}{z_2 - 1} a_2 - \frac{z_2}{(z_2 - 1)^2}\right) \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{2} O(|\epsilon_j|), \\
\zeta(\epsilon_1, \epsilon_2; a_1, a_2; z_1, 1) &= \frac{1}{z_1 - 1} \left(a_1 + a_2 - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{(z_1 - 1)^2} + \sum_{j=1}^{2} O(|\epsilon_j|), \\
\zeta(\epsilon_1, \epsilon_2; a_1, a_2; 1, 1) &= \left(a_1 - \frac{1}{2}\right) \left(a_2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(a_1^2 - a_1 + \frac{1}{6}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(a_2^2 - a_2 + \frac{1}{6}\right) \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} + \sum_{j=1}^{2} O(|\epsilon_j|)
\end{aligned}
$$

となる. $z_1=1$ のとき右辺に $\epsilon_2/(\epsilon_1+\epsilon_2)$ が含まれているが, これは極限 $(\epsilon_1,\epsilon_2)\to(0,0)$ の取り方により極限値が変わってくる. 同様のことが $(l_1,l_2)=(0,0)$ 以外の場合でも起こっており, そのため１変数のときに使っていた "特殊値" という表現は使わず, 代わりに "漸近挙動" という表現を使っている.

次に $(l_1,l_2)=(-1,0)$ と $(0,-1)$ での漸近挙動を見てみる. Apostol–Bernoulli 多項式の積を

$$B_{(n_1,n_2)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z}):=B_{n_1}(a_1;z_1)B_{n_2}(a_2;z_2)$$

と省略して書くこととすると

$$\begin{aligned}
&\zeta(-1+\epsilon_1,\epsilon_2;a_1,a_2;z_1,z_2)\\
&\quad=\frac{1}{2}B_{(2,1)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{3}B_{(3,0)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})-\frac{1}{6}B_{(0,3)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}+\sum_{j=1}^{2}O(|\epsilon_j|),\\
&\zeta(\epsilon_1,-1+\epsilon_2;a_1,a_2;z_1,z_2)\\
&\quad=\frac{1}{2}B_{(2,1)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{2}B_{(1,2)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{6}B_{(3,0)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{6}B_{(0,3)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}\\
&\qquad+\sum_{j=1}^{2}O(|\epsilon_j|)
\end{aligned}$$

となる. Euler–Zagier 型ダブルゼータ関数 $\zeta(s_1,s_2)$ は $(-1,0)$ と $(0,-1)$ は特異点ではなかった. しかし上の例では $\epsilon_2/(\epsilon_1+\epsilon_2)$ があるため, Hurwitz–Lerch ダブルゼータ関数では特異点であることがわかる.

さらに $r=3$ と 4 の場合でも, 原点での漸近挙動の例を見てみる. ただし $B_{(n_1,n_2,n_3)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})$ や $B_{(n_1,n_2,n_3,n_4)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})$ は先ほどと同様に Apostol–Bernoulli 多項式の積で定めることとする.

$$\begin{aligned}
&\zeta(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3;a_1,a_2,a_3;z_1,z_2,z_3)\\
&\quad=-B_{(1,1,1)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})-\frac{1}{2}B_{(2,0,1)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})-\frac{1}{2}B_{(2,1,0)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})-\frac{1}{2}B_{(1,2,0)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})\\
&\qquad-\frac{1}{6}B_{(3,0,0)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})\\
&\qquad-\frac{1}{2}B_{(1,0,2)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})\frac{\epsilon_3}{\epsilon_2+\epsilon_3}\\
&\qquad-\left(\frac{1}{2}B_{(0,2,1)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{6}B_{(0,3,0)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})\right)\frac{\epsilon_2+\epsilon_3}{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3}\\
&\qquad-\left(\frac{1}{2}B_{(0,1,2)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{6}B_{(0,0,3)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})\right)\frac{\epsilon_3}{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3}+\sum_{j=1}^{3}O(|\epsilon_j|),\\
&\zeta(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4;a_1,a_2,a_3,a_4;z_1,z_2,z_3,z_4)\\
&\quad=B_{(1,1,1,1)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{2}B_{(2,1,1,0)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{2}B_{(2,1,0,1)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{2}B_{(2,0,1,1)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})\\
&\qquad+\frac{1}{2}B_{(1,2,1,0)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{2}B_{(1,2,0,1)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{4}B_{(2,2,0,0)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{2}B_{(1,1,2,0)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{4}B_{(2,0,2,0)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{6}B_{(3,1,0,0)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{6}B_{(3,0,1,0)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{6}B_{(3,0,0,1)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})\\
&+\frac{1}{6}B_{(1,3,0,0)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{24}B_{(4,0,0,0)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})\\
&+\left(\frac{1}{2}B_{(1,1,0,2)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{4}B_{(2,0,0,2)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})\right)\frac{\epsilon_4}{\epsilon_3+\epsilon_4}\\
&+\left(\frac{1}{2}B_{(1,0,2,1)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{6}B_{(1,0,3,0)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})\right)\frac{\epsilon_3+\epsilon_4}{\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4}\\
&+\left(\frac{1}{2}B_{(1,0,1,2)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{6}B_{(1,0,0,3)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})\right)\frac{\epsilon_4}{\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4}\\
&+\left(\frac{1}{2}B_{(0,2,1,1)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{4}B_{(0,2,2,0)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{6}B_{(0,3,0,1)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{6}B_{(0,3,1,0)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{24}B_{(0,4,0,0)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})\right)\frac{\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4}{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4}\\
&+\left(\frac{1}{2}B_{(0,1,2,1)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{6}B_{(0,1,3,0)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{6}B_{(0,0,3,1)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{24}B_{(0,0,4,0)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})\right)\frac{\epsilon_3+\epsilon_4}{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4}\\
&+\left(\frac{1}{2}B_{(0,1,1,2)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{4}B_{(0,0,2,2)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{6}B_{(0,1,0,3)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})+\frac{1}{6}B_{(0,0,1,3)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{24}B_{(0,0,0,4)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})\right)\frac{\epsilon_4}{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4}\\
&+\frac{1}{4}B_{(0,2,0,2)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z})\frac{\epsilon_4(\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4)}{(\epsilon_3+\epsilon_4)(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4)}+\sum_{j=1}^{4}O(|\epsilon_j|).
\end{aligned}
$$

このように r が大きくなると項の数が増えていく.

4 係数について

上の例から観察できるように, 一般に漸近挙動は次のように書ける.

$$
\begin{aligned}
&\zeta(-l_1+\epsilon_1,\ldots,-l_r+\epsilon_r;a_1,\ldots,a_{r;};z_1,\ldots,z_r)\\
&=\sum\left(\sum C_{\mathbf{n}}B_{n_1}(a_1;z_1)\cdots B_{n_r}(a_r;z_r)\right)\frac{P(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_r)}{Q(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_r)}\quad+\quad(\text{誤差})
\end{aligned}
$$

Theorem 2.1 により $P(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_r)/Q(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_r)$ の係数が計算できるが, r が大きい場合には和の数が増えて簡単には計算できない. そのため, 係数をもっと簡単に計算する方法はないか考察する.

簡単のため, 以下では $(a_1,\ldots,a_r;z_1,\ldots,z_r)=(1,\ldots,1;1,\ldots,1)$ とし, また原点のみを考えることとする.

$$
\zeta(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_r)=\sum_{d_1,\ldots,d_{r-1}\in\{0,1\}}C^{(d_1,\ldots,d_{r-1})}\prod_{\substack{1\le j\le r-1\\ d_j=1}}\frac{\epsilon_{j+1}+\cdots+\epsilon_r}{\epsilon_j+\cdots+\epsilon_r}+\sum_{j=1}^{r}O(|\epsilon_j|)
$$

により係数 $C^{(d_1,\ldots,d_{r-1})}$ を定める. 佐々木 [5] により

$$C^{(d_1,\ldots,d_{l-1},0,1,d_{l+2},\ldots,d_{r-1})} = C^{(d_1,\ldots,d_{l-1})}C^{(1,d_{l+2},\ldots,d_{r-1})}$$

が証明されているため $C^{(1,\ldots,1,0,\ldots,0)}$ の場合を調べれば十分である. いま $C_{i,r} := C^{(1,\ldots,1,0,\ldots,0)}$ を右肩に 1 が $i-1$ 個（$1 \leq i \leq r$）並ぶものと定める. このとき係数を観察することにより, 次のことが推測できる.

$$\zeta(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_r) = \frac{(-1)^r}{r+1} - G_r \frac{\epsilon_2+\cdots+\epsilon_r}{\epsilon_1+\cdots+\epsilon_r} + \cdots$$

ただし G_n は Gregory 係数で, 次の式で定義される.

$$\begin{aligned} 1+\sum_{n=1}^{\infty} G_n x^n &= \frac{x}{\log(x+1)} \\ &= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{24}x^3-\frac{19}{720}x^4+\frac{3}{160}x^5-\frac{863}{60480}x^6+\cdots \end{aligned}$$

定数項が $C_{1,r} = (-1)^r/(r+1)$ になることは, 秋山–谷川 [1] の結果からすぐに得られる. また $(\epsilon_2+\cdots+\epsilon_r)/(\epsilon_1+\cdots+\epsilon_r)$ の係数を計算することにより, 実際に上記のようになることが証明できる.

Proposition 4.1 (Murahara-O.)**.** $C_{2,r} = -G_r$ が成り立つ.

ここまでの内容を RIMS 研究集会 「解析的整数論とその周辺 2023」において発表したところ, 講演後に松坂俊輝氏より助言をいただき一般の係数を決定することができた.

Theorem 4.2 (Matsusaka-Murahara-O. [3])**.** 一般 Gregory 係数 $G_{m,n}$ を次の母関数により定める.

$$\sum_{m,n\geq 0} G_{m,n}x^m y^n := \frac{y\log^2(1+x)-x\log^2(1+y)}{\log(1+x)-\log(1+y)}$$

このとき $G_{m,n}$ は対称性 $G_{m,n} = G_{n,m}$ をもち, $G_{m,1} = (-1)^{m-1}/m$ と $G_{m,2} = -G_m$ が成り立つ. さらに $1 \leq i \leq r$ に対して $C_{i,r} = G_{i,r-i+2}$ が成り立つ.

参考文献

[1] S. Akiyama and Y. Tanigawa, Multiple zeta values at non-positive integers, Ramanujan J. **5** (2001), 327-351.

[2] T. M. Apostol, On the Lerch zeta function, Pacific J. Math. **1** (1951), 161–167.

[3] T. Matsusaka, H. Murahara, and T. Onozuka, Asymptotic coefficients of multiple zeta functions at the origin and generalized Gregory coefficients, arXiv:2312.14475.

[4] H. Murahara and T. Onozuka, Asymptotic behavior of the Hurwitz-Lerch multiple zeta functions at non-positive integer points, Acta Arith. **205** (2022), 191-210.

[5] Y. Sasaki, Evaluation of multiple zeta values for various limiting processes at non-positive integers, Res. Number Theory, **9**, 38 (2023).