On the Hilbert space defined as the completion of Weil's hermitian form [1]

東京工業大学・理学院 数学系　鈴木正俊 (Suzuki, Masatoshi)
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

1. Weil エルミート形式による完備化

1.1. Riemann ゼータ関数の零点に関する記号と注意. Riemann ξ-関数を, 通常通り Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ を用いて

$$\xi(s) := \frac{1}{2}s(s-1)\,\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

により定義する. また整関数 $\xi(1/2-iz)$ の零点を γ, その重複度を m_γ, 零点の集合を Γ で表す. ガンマ関数との混乱はないであろう. 慣習として, Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の非自明零点や ξ-関数 $\xi(s)$ の零点は $\rho=\beta+i\gamma$ と表されることが多い. ここで β は実部, γ は虚部である. これに反して, 本論において文字 γ はこの意味ではなく, 先に述べたように $\xi(1/2-iz)$ の零点を表す文字として用いられることに注意してほしい.

$\xi(s)$ の零点を $\rho=\sigma+it$ と表すとき, $\xi(1/2-iz)$ の零点 γ は

$$\gamma = -t + i(\sigma - 1/2)$$

と表される. これからも分かるように, $\xi(1/2-iz)$ の零点の集合 Γ は $\mathbb{R}$ の部分集合であるとは限らない. Riemann 予想は「つねに $\sigma=1/2$ である」という主張だから, それは Γ の言葉では「Γ が $\mathbb{R}$ の部分集合である」という主張になる.

また, 関数等式 $\xi(s)=\xi(1-s)$ と $\xi(\bar{s})=\overline{\xi(s)}$ から

$$\gamma \in \Gamma \quad \text{ならば} \quad -\gamma,\ \overline{\gamma} \in \Gamma$$

であり, 任意の $\sigma \in [0,1]$ に対して $\xi(\sigma)>0$ であることから, 特に $0 \notin \Gamma$.

1.2. Schwartz 超関数 (distributions). コンパクト台をもつ $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級関数全体が成す位相 $\mathbb{C}$ 線形空間を $C_c^\infty(\mathbb{R})$ とする. 関数列 $(\psi_n)_n \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ が $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ に収束するとは, ψ_n たちと ψ すべての台を含む $\mathbb{R}$ のコンパクト部分集合 K が存在し, 任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ に対して k 階導関数 $\psi_n^{(k)}$ が $\psi^{(k)}$ に K 上で一様収束することをいい, $\psi_n \to \psi$ と表す. $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 上の連続な線形汎関数 T ($\mathbb{C}$ 線形写像 $T: C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ であって, $\psi_n \to \psi$ ならばつねに $T(\psi_n) \to T(\psi)$ を満たすもの) を $\mathbb{R}$ 上の Schwartz 超関数もしくは分布 (distribution) という.

[1] この研究は基盤研究 (C)（研究代表者：鈴木正俊, 研究課題番号：17K05163, 23K03050）の助成を受けています.

1.3. **Weil エルミート形式.** Fourier 変換

$$\widehat{\psi}(z) := (\mathsf{F}\psi)(z) := \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, e^{izx}\, dx$$

を用いて $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ に対し

$$W(\psi) := \sum_{\gamma \in \Gamma} m_\gamma \widehat{\psi}(\gamma)$$

で定められる $\mathbb{C}$ 線形写像は分布になる．この分布 $W : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ を **Weil 分布**とよぶ．Weil 分布を用いて定義される $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 上のエルミート形式

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_W := W\left(\int \psi_1(x-y)\overline{\psi_2(-y)}\, dy \right)$$

を本論では **Weil エルミート形式**とよぶ.

1.4. **本論の主題とその背景.** 有名な Weil の規準 (Weil's criterion) は, Riemann 予想 ($\Gamma \subset \mathbb{R}$) が成り立つためには, Weil エルミート形式が $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 上で正定値であることが必要かつ十分であることを主張する．したがって Riemann 予想を仮定すれば, $C_c^\infty(\mathbb{R})$ を Weil エルミート形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ について完備化することができる:

$$\mathcal{H}_W := (\text{the completion of } C_c^\infty(\mathbb{R}) \text{ w.r.t } \langle \cdot, \cdot \rangle_W). \tag{1.1}$$

このようにして定まる Hilbert 空間 $\mathcal{H}_W$ が本論の興味の対象である．筆者の知る限り, Hilbert 空間 $\mathcal{H}_W$ に関する研究はこれまでに無かったようなので, $\mathcal{H}_W$ を調べる動機の一つは, それがどんなものなのか知りたいという単純な興味である．もう一つの動機は, $\mathcal{H}_W$ を調べることによって, Riemann 予想に関連した何か新しい事実や現象が見つからないか, という期待である．本論の主結果たち (定理 2, 3) はこれらの動機に対して, 当座の解答を与えてくれる．

上で述べた後者の動機には, 吉田 [8] の結果が念頭にある．前回の講究録 [6, §3.2] でも触れたように, 吉田は $C_c^\infty(\mathbb{R})$ を

$$C(a) := \{\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \,|\, \operatorname{supp}\psi \subset [-a, a]\}, \quad a > 0$$

によりフィルター付けし, $C(a)$ 上での $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ の正値性や, これに関する完備化などを考察した．そして, 境界 $x = \pm a$ での条件を緩めた $C(a)$ よりも若干広い $K(a)$ という空間を導入し, Riemann 予想を仮定すれば $K(a)$ の $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ に関する完備化と一致するような $\widehat{K(a)}$ という空間を, **Riemann 予想を仮定せずに**構成することに成功した．これにより吉田は「Riemann 予想が成り立つためには, 任意の $a > 0$ に対して $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ が $\widehat{K(a)}$ 上で非退化であることが必要かつ十分である」という Weil の正値性とは異なる同値条件を得た．吉田の $\widehat{K(a)}$ の構成には $a > 0$ が有限の値であることが必要不可欠なので, $C_c^\infty(\mathbb{R})$ の完備化である $\mathcal{H}_W$ の研究には利用できない．しかし吉田の結果は, もしも Riemann 予想の下では $\mathcal{H}_W$ に一致するような空間を無条件に構成できれば, 副産物として Riemann 予想の新しい同値条件が導かれることを期待させる．そしてそのような結果は, Riemann 予想への新しい知見や洞察をもたらすであろう．

いっぽう, Riemann 予想を仮定したとしても, (1.1) のような直接の定義とは異なる方法で $\mathcal{H}_W$ を記述することは, まったく非自明なことと思われる．少なくとも筆者にとって, それは長年の懸案であった．解決の糸口となったのは [4] から始まったゼータ関数に付随した screw 関数の研究である．以降で述べる $\mathcal{H}_W$ の構成は, screw 関数や screw line といった耳慣れない用語を用いずに述べることも可能だが, それだと天下り的な説明で終わってしまうので, やはりこれらの用語の定義からはじめる.

2. Screw 関数と screw lines

2.1. **Screw 関数.** $\mathbb{R}$ 上の連続関数 $g(t)$ であって

$$g(-t) = \overline{g(t)}$$

を満たし, 核

$$G_g(t,u) := g(t-u) - g(t) - g(-u) + g(0) \tag{2.1}$$

が $\mathbb{R}$ 上で非負値であるようなもの全体を $\mathcal{G}_\infty$ で表す. 核 (2.1) が $\mathbb{R}$ 上で非負値とは, 任意の $n \in \mathbb{N}$, $t_i \in \mathbb{R}$, $\xi_i \in \mathbb{C}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} G_g(t_i,t_j)\,\xi_i\overline{\xi_j} \;\geqslant\; 0$$

が成り立つことをいう (つまりエルミート行列 $(G_g(t_i,t_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ が常に非負値ということ). M. G. Kreĭn (1944) にしたがって, $\mathcal{G}_\infty$ の元を $\mathbb{R}$ 上の **screw 関数**とよぶ.

2.2. **Screw lines.** 関数 $g(t) \in \mathcal{G}_\infty$ が実数値で $g(0)=0$ を満たすとき, Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ と連続写像 $\mathbb{R} \to \mathcal{H} : t \mapsto x(t)$ で次を満たすものが存在する: 任意の $t, u \in \mathbb{R}$ に対して内積

$$\langle x(t+v) - x(v), x(u+v) - x(v) \rangle_{\mathcal{H}}$$

が $v \in \mathbb{R}$ によらずに定まり, 等式

$$\frac{1}{2}\|x(t) - x(0)\|_{\mathcal{H}}^2 = -g(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

が成り立つ. このような連続写像 $x : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ を $g(t)$ の **screw line** とよぶ (screw curve と呼ぶ方が自然に思われるが, ここでは慣習に従った). $g(t) \in \mathcal{G}_\infty$ の screw line は一意には定まらない. Screw 関数や screw lines の歴史については [5, Sections 2 and 3] と, その参考文献たちを見て頂きたい.

2.3. **簡単な例.** $\mathbb{R}$ 上の実数値偶関数

$$g_0(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \cos(t) - 1$$

に対して, 核 (2.1) は

$$\begin{aligned} G_{g_0}(t,u) &= tu + \cos(t-u) - \cos(t) - \cos(u) + 1 \\ &= tu + (\cos(t)-1)(\cos(u)-1) + \sin(t)\sin(u) \end{aligned}$$

と計算される. これより, 任意の $n \in \mathbb{N}$, $t_i \in \mathbb{R}$, $\xi_i \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} G_{g_0}(t_i,t_j)\,\xi_i\overline{\xi_j} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_i t_j\,\xi_i\overline{\xi_j} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\cos(t_i)-1)(\cos(t_j)-1)\,\xi_i\overline{\xi_j} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sin(t_i)\sin(t_j)\,\xi_i\overline{\xi_j} \\ &= \left|\sum_{i=1}^{n} t_i\,\xi_i\right|^2 + \left|\sum_{i=1}^{n}(\cos(t_i)-1)\,\xi_i\right|^2 + \left|\sum_{i=1}^{n}\sin(t_i)\,\xi_i\right|^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

が成り立つ. したがって $G_{g_0}(t,u)$ は $\mathbb{R}$ 上で非負値だから, $g_0(t)$ は $\mathbb{R}$ 上の screw 関数である. $\mathbb{R}^3$ を通常の Euclid ノルムにより Hilbert 空間とみなし, 写像 $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ を

$$x(t) = (t,\, \cos(t),\, \sin(t))$$

で定める. このとき, 任意の $v \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned}&\langle x(t+v)-x(v), x(u+v)-x(v)\rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &\qquad = tu + (\cos(t)-1)(\cos(u)-1) + \sin(t)\sin(u)\ (= G_{g_0}(t,u))\end{aligned}$$

が成り立ち, これから

$$\|x(t)-x(0)\|_{\mathbb{R}^3}^2 = t^2 - 2\cos(t) + 2 = -2g_0(t)$$

も成り立つから, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ は screw 関数 $g_0(t)$ の screw line である.

3. 結果 其の一

まず, Riemann 予想によらず, 各 $t \in \mathbb{R}$ に対して $|\cos(\gamma t)|$ $(\gamma \in \Gamma)$ が有界なことに注意して,

$$g_\zeta(t) := \sum_{\gamma\in\Gamma} m_\gamma\,\frac{\cos(\gamma t)-1}{\gamma^2}$$

によって $\mathbb{R}$ 上の関数 $g_\zeta(t)$ を定義する. よく知られているように, $\sum_{\gamma\in\Gamma} m_\gamma|\gamma|^{-1-\delta} < \infty$ $(\forall\delta > 0)$ なので, 右辺の級数は広義一様に絶対収束して $\mathbb{R}$ 上の連続な偶関数を定める. この $g_\zeta(t)$ は Riemann 予想の下で $\mathbb{R}$ 上の screw 関数になる ([4, Theorem 1.2]). したがって Riemann 予想の下で, $g_\zeta(t)$ の screw line $\mathfrak{S} : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ が存在する. その一つとして, $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ であるような screw line が以下のようにして得られる.

整関数 $E(z)$ を

$$E(z) := \xi(1/2 - iz) + \xi'(1/2 - iz) \tag{3.1}$$

で定義し, これを用いて $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\mathfrak{S}_t(z) := \frac{i}{\overline{E(\bar{z})}}\sum_{\gamma\in\Gamma} m_\gamma\frac{e^{-i\gamma t}-1}{\gamma}\cdot\frac{\xi(1/2-iz)}{z-\gamma}$$

と定める. このとき, 特別な仮定なしに次が成り立つ.

命題 1. 任意に固定された $t \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathfrak{S}_t(z)$ は z の関数として $L^2(\mathbb{R})$ に属す.

Proof. 証明の第一段階は, Weil の明示公式を用いて $t \geqslant 0$, $z \in \mathbb{C}$ に対する次の表示を示すことである:

$$\mathfrak{S}_t(z) = \frac{i(E(z) + \overline{E(\bar{z})})}{2\overline{E(\bar{z})}}\,\mathfrak{P}_t(z) \quad \text{with}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}_t(z) := {} & \frac{4(e^{t/2}-1)}{1+2iz} + \frac{4(e^{-t/2}-1)}{1-2iz} \\
& + \frac{e^{-izt}-1}{iz}\frac{\zeta'}{\zeta}\left(\frac{1}{2} - iz\right) + \sum_{n \leqslant e^t} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \frac{e^{-iz(t-\log n)}-1}{iz} \\
& - \frac{1}{2iz}\left[\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{4} - \frac{iz}{2}\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{4}\right)\right] \\
& - \frac{1}{2iz}e^{-t/2}\left[\Phi(e^{-2t}, 1, \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2} - iz)) - \Phi(e^{-2t}, 1, \tfrac{1}{4})\right].
\end{aligned}$$

ここで $\Lambda(n)$ は von Mangoldt 関数, $\Phi(z,s,a) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+a)^{-s}z^n$ は Hurwitz–Lerch ゼータ関数である. 実軸上では $|\overline{E(\bar{z})}/E(z)| = 1$ なので, $\mathfrak{S}_t(z)$ が z の関数として実軸上で $L^2(\mathbb{R})$ に属することはこの表示から比較的容易に得られる. 詳しくは [3, Proposition 1.1] の証明を参照せよ. □

命題 1 により, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\mathfrak{S}_t(z)$ の L^2-ノルムが定まる. これに関して次が成り立つ.

定理 1. Riemann 予想が成り立つためには, 等式

$$\frac{1}{2\pi}\|\mathfrak{S}_t\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = -g_\zeta(t)$$

が任意の $t \in \mathbb{R}$ について成り立つことが必要かつ十分である. さらに, Riemann 予想の下で $\pi^{-1/2}\mathfrak{S} : \mathbb{R} \to L^2(\mathbb{R});\ t \mapsto \pi^{-1/2}\mathfrak{S}_t(z)$ は screw 関数 $g_\zeta(t)$ の screw line である.

Proof. [3, Theorem 4.1, Corollary 4.1] の証明を参照せよ. □

この Riemann 予想の下で screw line になる連続写像 $\mathfrak{S} : \mathbb{R} \to L^2(\mathbb{R});\ t \mapsto \mathfrak{S}_t(z)$ を用いると, Riemann 予想の下では $\mathcal{H}_W$ に一致するような Hilbert 空間を無条件に構成することができる. まず $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ に対して,

$$\mathcal{P}_\phi(z) := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\,\overline{\mathfrak{S}_t(\bar{z})}\,dt$$

と定める. このとき次が成り立つ.

命題 2. 任意の $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ に対して, $\mathcal{P}_\phi(z)$ は $L^2(\mathbb{R})$ に属す. また, $\mathcal{P}_\phi \equiv 0$ となるような $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ は 0 に限る.

Proof. [3, Proposition 1.2] の証明を参照せよ. □

命題 2 によって, $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 上のノルム $\|\cdot\|_0$ を

$$\|\psi\|_0 := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\|\mathcal{P}_{D\psi}\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad (D\psi)(t) := i\psi'(t), \quad \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

によって**無条件に**定めることができる．このノルムに関する完備化を $\mathcal{H}_0$ とする:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 :&= (\text{the completion of } C_c^\infty(\mathbb{R}) \text{ w.r.t } \|\ \|_0)\\ &(\simeq \overline{\mathcal{P}_D(C_c^\infty(\mathbb{R}))} \subset L^2(\mathbb{R})).\end{aligned}$$

この二行目の同型において, 右辺のバーは $L^2(\mathbb{R})$ での閉包を表し,

$$\mathcal{P}_D := \mathcal{P} \circ D$$

とおいた．このとき第 1.3 節で述べた動機に対して, まず次のような解答が得られる．

定理 2. Riemann 予想が成り立つためには, 等式

$$\|\psi\|_0^2 = \langle \psi, \psi \rangle_W \tag{3.2}$$

が任意の $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ について成り立つことが必要かつ十分である．特に Riemann 予想の下で,

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_W$$

が成り立つ．

定理 2 は, Weil エルミート形式の正値性という不等式による Riemann 予想の同値条件を, 等式による条件に置き換えている．Riemann 予想の証明または反証に等式と不等式のどちらが利用しやすいのかは不明だが, 戦略に選択の幅が増えたのは良いことであろう．例えば等式が成り立たない ψ が見つかれば Riemann 予想の反証になる．また定理 2 は, Weil エルミート形式の正値性の理由, すなわち Riemann 予想が成り立つべき理由を, Hilbert 空間のノルムの正値性として説明しているという解釈もできる．

4. 結果 其の二

定理 2 は Riemann 予想の下で, Hilbert 空間 $\mathcal{H}_W$ に $\mathcal{H}_W \simeq \overline{\mathcal{P}_D(C_c^\infty(\mathbb{R}))}$ という非自明な別の記述を与えるが, これは $L^2(\mathbb{R})$ での閉包をとるという複雑な操作を含む．そのため, 例えばこの同型から $\mathcal{H}_W$ の基底を見つけたりするのは難しい．そこで, $\mathcal{H}_W$ に $L^2(\mathbb{R})$ の閉部分空間としてのより明示的な記述を与えたくなる．実際それは可能で, 以下のように成される．

4.1. **モデル空間.** $H^2 := H^2(\mathbb{C}_+)$ を上半平面 $\mathbb{C}_+ = \{\Im(z) > 0\}$ 上の Hardy 空間とする．すなわち, H^2 は $\mathbb{C}_+$ 上の正則関数であって

$$\|F\|_{H^2} := \left(\sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 \, dx \right)^{1/2} < \infty$$

を満たすもの全体の成す Hilbert 空間である．よく知られているように, $F \in H^2$ に対して $\mathbb{R}$ 上の境界値

$$F|_{\mathbb{R}}(x) := \lim_{y \to 0} F(x+iy)$$

がほとんど至る所で定義され, ノルムが等しい $L^2(\mathbb{R})$ の元を定める．この境界値により定められる $L^2(\mathbb{R})$ の閉部分空間も同じ H^2 で表す．(上半平面の Hardy 空間 $H^2(\mathbb{C}_+)$ は $L^2(\mathbb{R})$ の部分空間としての H^2 の元から Poisson 積分により復元される.)

$\mathbb{C}_+$ 上の有界正則関数 $\Theta \in H^\infty$ で $\mathbb{R}$ 上ほとんど至るところ $|\Theta(x)| = 1$ であるものを inner function とよぶ．Θ が inner function ならば $\Theta H^2 \subset H^2$ なので, 直交補空間

$$\mathcal{K}(\Theta) := H^2 \ominus \Theta H^2$$

が定まる．これを Θ から生成される**モデル (部分) 空間** (model (sub)space) とよぶ．

4.2. **Riemannゼータ関数に付随するモデル空間.** (3.1) の $E(z)$ を用いて

$$\Theta(z) := \frac{\overline{E(\bar{z})}}{E(z)} \tag{4.1}$$

と定める．Riemann 予想を仮定すると，[2, Theorem 1] によってこの $\Theta(z)$ は inner function となるので，モデル空間 $\mathcal{K}(\Theta)$ が定義される．これによって $\mathcal{H}_W$ が次のように記述される．

定理 3. $\Theta(z)$ を (4.1) で定まるものとし，Riemann 予想を仮定する．このとき $\mathcal{P}_D(C_c^\infty(\mathbb{R}))(\subset L^2(\mathbb{R}))$ の閉包は $\mathcal{K}(\Theta)$ に一致し，線形写像 $\mathcal{P}_D$ は Hilbert 空間の同型

$$\mathcal{H}_W \ \to \ \mathcal{K}(\Theta)$$

を導き，定数倍を除いて等長である．

モデル空間は解析学の古典的対象であるが，現在でも活発に研究されている．特に (4.1) の $\Theta(z)$ のような，$\mathbb{C}$ で有理型な inner function (meromorphic inner function (MIF) と呼ばれる) により生成されるモデル空間は，一般のモデル空間よりも良い性質を持つのでよく研究されている．定理 3 の同型を通して $\mathcal{H}_W$ の研究に解析学での研究の蓄積がどのように利用できるかを探るのは今後の課題である．

5. 定理 3 の応用: Hilbert–Pólya 空間

最後に，定理 3 の同型から分かる事実を一つ挙げておく．それは Weil エルミート形式から自然に得られる $\mathcal{H}_W$ が，Hilbert–Pólya 空間の一つになっているという事実である．所謂 Hilbert–Pólya 空間とは，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ とその上の自己共役作用素 T の組 $(\mathcal{H}, T)$ であって，零点集合 Γ が T の固有値の集合に含まれるようなものである．

Inner function Θ で生成されるモデル空間 $\mathcal{K}(\Theta)$ 上の乗法作用素 M を，定義域

$$\mathfrak{D}(\mathsf{M}) = \{F(z) \in \mathcal{K}(\Theta) \,|\, zF(z) \in \mathcal{K}(\Theta)\}$$

上で

$$(\mathsf{M}F)(z) = zF(z), \quad F(z) \in \mathfrak{D}(\mathsf{M})$$

により定まるものとする．Θ が MIF のとき，M は不足指数 $(1,1)$ をもつ閉対称作用素であることが分かる．したがって対称作用素の一般論により，M は自己共役拡張をもつ．簡単のため $\mathfrak{D}(\mathsf{M})$ が $\mathcal{K}(\Theta)$ で稠密であると仮定すれば，M のすべての自己共役拡張作用素は $\theta \in [0,\pi)$ でパラメータ付けされ，それらを M_θ とすれば，任意に固定された $\theta \in [0,\pi)$ に対し，$\mathcal{K}(\Theta)$ は M_θ の固有関数から成る基底を持っ．

このような一般論を (Riemann 予想の下で) (4.1) で生成されるモデル空間 $\mathcal{K}(\Theta)$ に適用すると，M の自己共役拡張作用素 $\mathsf{M}_{\pi/2}$ は Γ を固有値の集合にもち，

$$\frac{1+\Theta(z)}{z-\gamma}, \quad \gamma \in \Gamma$$

が固有関数から成る $\mathcal{K}(\Theta)$ の直交基底となることが分かる．特に $(\mathcal{K}(\Theta), \mathsf{M}_{\pi/2})$ は Hilbert–Pólya 空間の一つになる ([3, §6])．定理 3 の同型によってこれを $\mathcal{H}_W$ に移せば，Γ を固有値の集合とするような $\mathcal{H}_W$ 上の自己共役作用素 $\mathsf{D}_{\pi/2}$ が作れるから，$(\mathcal{H}_W, \mathsf{D}_{\pi/2})$ も Hilbert–Pólya 空間の一つになる．乗法作用素 M は $\mathcal{H}_W$ 上の一階微分作用素 $\mathsf{D} : \psi(t) \mapsto i\psi'(t)$ に対応し，$\mathsf{D}_{\pi/2}$ はこれの自己共役拡張である．つまり，Hilbert–Pólya 空間は $C_c^\infty(\mathbb{R})$ を Weil エルミート形式で完備化するという操作と，一階微分作用素の自己共役拡張をとる操作という実に自然な筋道で得られる．

この様な構成は Riemann 予想の下でのみ働くものなので, Hilbert–Pólya 空間を特定することによって Riemann 予想を証明しようという従来の目論見には反する. そのため Selberg [1, p. 632] が言うように「役に立たない」かもしれない. しかしながら, 上記のような Hilbert–Pólya 空間の構成は筆者には単純かつ美しく, それゆえに価値があるもののように感じられる. また, $\mathcal{H}_W$ は $\mathcal{H}_0$ として無条件に構成できるし, $\mathsf{D}_{\pi/2}$ も定義域と作用の仕方を具体的に記述することにより $\mathcal{H}_0$ 上の作用素として無条件に構成することができるので, 何かに使える可能性はあるかもしれない.

ついでに一つ注意しておくと, Hilbert–Pólya 空間という用語を使う場合は, Riemann ゼータ関数の非自明零点の重複度が, 対応する自己共役作用素 T の固有値の重複度になっていることを想定していることが多い. これに対し, 上記のモデル空間による Hilbert–Pólya 空間の構成では, 非自明零点の重複度は作用素 $\mathsf{D}_{\pi/2}$ の固有値の重複度には反映されておらず, 固有値の重複度はみな 1 になっている. つまり, 今回のモデル空間による Hilbert–Pólya 空間の構成は, Riemann ゼータ関数の非自明零点はみな単純零点であろうという予想が正しい場合のみ, よく使われる意味での Hilbert–Pólya 空間になる.

6. 謝辞

講演と執筆の機会を与えてくださいました研究代表者の安福悠氏および副代表者の中筋麻貴氏にこの場を借りて感謝申し上げます.

References

[1] N. A. Baas, C. F. Skau, The lord of the numbers, Atle Selberg. On his life and mathematics, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **45** (2008), no. 4, 617–649.

[2] J. C. Lagarias, Hilbert spaces of entire functions and Dirichlet L-functions, *Frontiers in number theory, physics, and geometry. I*, 365–377, *Springer, Berlin*, 2006.

[3] M. Suzuki, On the Hilbert space derived from the Weil distribution, `https://arxiv.org/abs/2301.00421`.

[4] M. Suzuki, Aspects of the screw function corresponding to the Riemann zeta-function, *J. Lond. Math. Soc.* **108** (2023), no.4, 1448–1487.

[5] M. Suzuki, Analytic theories around the simplest screw, `https://arxiv.org/abs/2308.11860`.

[6] M. Suzuki, On the screw function of the Riemann zeta function, 数理解析研究所講究録 No.2259 解析的整数論とその周辺 (2023), 115–122

[7] A. Weil, Sur les “formules explicites” de la théorie des nombres premiers, *Comm. Sém. Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.]* **1952** (1952), Tome Supplémentaire, 252–265.

[8] H. Yoshida, On Hermitian forms attached to zeta functions, *Zeta functions in geometry (Tokyo, 1990)*, 281–325, Adv. Stud. Pure Math., 21, *Kinokuniya, Tokyo*, 1992.