# A weak form of strong universality of the Hurwitz zeta-function

峰 正博 (MINE, Masahiro)

早稲田大学 グローバルエデュケーションセンター
Waseda University, Global Education Center

## 1 ゼータ関数の普遍性・強普遍性

Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の様々な性質を調べることは，解析的整数論の醍醐味の一つである．1975 年，Sergei Mikhailovich Voronin は $\zeta(s)$ が以下の意味で普遍性 (universality) を持つことを示した．すなわち，$0 < r < 1/4$ に対し，関数 $f(s)$ が $|s| \leq r$ において連続かつ零点を持たず，さらに $|s| < r$ で正則であるとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$\max_{|s|\leq r} \left| \zeta\left(s + \frac{3}{4} + i\tau\right) - f(s) \right| < \epsilon$$

を満たすような実数 $\tau = \tau(r, \epsilon, f)$ が存在する．雑に言うなら，適当な条件を満たす任意の関数は，$\zeta(s)$ の平行移動で一様に近似できるのである．Voronin によって初めて証明されたこの普遍性は，現代においては次のように定式化されることが多い．以下，$D$ により帯領域 $\{s \in \mathbb{C} \mid 1/2 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$ を表し，また meas$\{\ \}$ は集合 $\{\ \}$ の Lebesgue 測度を表すものとする．

**定理 1.** 集合 $K$ は帯領域 $D$ におけるコンパクト集合で，その補集合が連結であるとする．また関数 $f(s)$ は $K$ において連続かつ零点を持たず，さらに $K$ の内部で正則であるとする．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{meas} \left\{ \tau \in [0, T] \;\middle|\; \max_{s\in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \epsilon \right\} > 0$$

が成立する．

今日に至るまで定理 1 の様々な類似や一般化が研究されてきた．また Cauchy の積分公式や Rouché の定理など複素関数論の結果を用いることで，普遍性定理はゼータ関数・$L$ 関数に関する多くの応用的な結果をもたらすことも知られている．松本耕二氏のサーベイ [3] は様々な結果が網羅的かつ整然と纏められており，初学者から熟達者まで幅広く参考になる．

Hurwitz ゼータ関数というゼータ関数がある．これは $\mathrm{Re}(s) > 1$ においては Dirichlet 級数

$$\zeta(s,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^s} \tag{1.1}$$

により定義され，$\zeta(s)$ と同様に $\mathbb{C}$ 上に有理型に解析接続される．ただし $\alpha$ は $0 < \alpha \le 1$ を満たすパラメーターであり，定義により $\zeta(s,1) = \zeta(s)$ が成り立つ．Hurwitz ゼータ関数に関する普遍性は Voronin のほか，B. Bagchi や S. M. Gonek によって研究され，以下の結果が示された．

**定理 2.** 集合 $K$ は帯領域 $D$ におけるコンパクト集合で，その補集合が連結であるとする．また関数 $f(s)$ は $K$ において連続かつ，$K$ の内部で正則であるとする．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] \;\middle|\; \max_{s\in K} |\zeta(s+i\tau,\alpha) - f(s)| < \epsilon\right\} > 0$$

が成立する．ただし $\alpha$ は超越数であるか，$1/2$ でも $1$ でもない有理数であるとする．

定理 1 の設定とは異なり，$f(s)$ が $K$ において零点を持ってもよいことに注意されたい．この種の普遍性は強普遍性 (strong universality) と呼ばれる．なお $\alpha$ が 1 に等しい場合は，先述の通り Hurwitz ゼータ関数は Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ に一致し，このとき強普遍性は成り立たないことが知られている．同様に，関係式 $\zeta(s,1/2) = (2^s-1)\zeta(s)$ が成り立つことに注意すると，$\zeta(s,1/2)$ も強普遍性を持たないことが分かる．

以上のことから，$\zeta(s,\alpha)$ が強普遍性を持つかどうか不明である最後のケースとして，$\alpha$ が代数的かつ無理数である場合が残される．多くの研究者によって，この場合にも強普遍性が保たれることが信じられているが，未だその証明には至っていない．筆者もこれまで何度かこの問題に挑戦し，その度にさしたる結果も得られず挫折したが，最近ようやく強普遍性の一端を垣間見る結果を示すことができた．届かぬと思いつつも手を伸ばし続けてみるものである．本稿の目的は筆者の論文 [4] の主定理である次の結果について，その証明を概説することである．以下，$0 < \alpha < 1$ を満たす代数的無理数 $\alpha$ 全体の集合を $\mathcal{A}$ と書く．

**定理 3.** 集合 $K$ は帯領域 $D$ におけるコンパクト集合で，その補集合が連結であるとする．また関数 $f(s)$ は $K$ において連続かつ，$K$ の内部で正則であるとする．このとき，任意の $\epsilon > 0$ と $0 < c < 1$ に対して，有限集合 $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ と 実数 $\rho > 0$ が存在し，

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] \;\middle|\; \max_{s\in K} |\zeta(s+i\tau,\alpha) - f(s)| < \epsilon\right\} > 0$$

が $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{E}$ かつ $|\alpha - c| < \rho$ を満たす場合に成立する．ただし，$\mathcal{E}$ および $\rho$ は $c, \epsilon, f, K$ に依存して決定される．

上記の有限集合 $\mathcal{E}$ は $c, \epsilon, f, K$ に依存して決まるため，固定された一つの $\alpha \in \mathcal{A}$ に対して $\zeta(s,\alpha)$ が強普遍性を持つかどうかは依然として不明である．しかしながら定理 3 によって，決められた $c, \epsilon, f, K$ に対しては，不等式

$$\max_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha) - f(s)| < \epsilon$$

が $c$ に十分近い多くの $\alpha \in \mathcal{A}$ に対して真であることが，無数の $\tau \in \mathbb{R}$ に対し保証される．これは本来の目的である強普遍性の成立を，確かに支持する結果であると言える．

## 2　Hurwitz ゼータ関数の確率論的モデル

帯領域 $D$ 上の正則関数のなす空間を $H(D)$ とする．$H(D)$ にはコンパクト部分集合上の最大値によって定義される半ノルムから定まる局所凸位相が入り，Fréchet 空間をなすことが知られている．ここで定理 2 は，$\tau$ が $\mathbb{R}$ 上を動くとき，$\zeta(s + i\tau, \alpha)$ が関数空間 $H(D)$ の中でどのように分布するかを調べることにより証明されることを思い出そう．定理 3 の証明も同じ手法を踏襲しており，その一連の流れは次のように確率論の言語で記述される．

まず Dirichlet 級数表示 (1.1) から，$\zeta(s + i\tau, \alpha)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ のとき

$$\zeta(s + i\tau, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^{s+i\tau}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_{\alpha,\tau}(n)}{(n+\alpha)^{s}}$$

と表される．ただし $X_{\alpha,\tau}(n) = (n+\alpha)^{-i\tau}$ とおく．$\tau \in \mathbb{R}$ が動くと各 $X_{\alpha,\tau}(n)$ は複素平面の単位円周上を回転し，任意の $0 \leq a < b \leq 2\pi$ に対して

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas} \left\{ \tau \in [0, T] \;\middle|\; \arg X_{\alpha,\tau}(n) \in (a, b) \right\} = \frac{b-a}{2\pi}$$

が成り立つという意味でその分布は一様である．そこで $\mathbb{X}_\alpha(n)$ を単位円周上に一様に分布する適当な確率変数として， $X_{\alpha,\tau}(n)$ の振る舞いを $\mathbb{X}_\alpha(n)$ に見立てようという発想に至る．このような発想に基づくと，ランダム Dirichlet 級数

$$\zeta(s, \mathbb{X}_\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{X}_\alpha(n)}{(n+\alpha)^{s}} \tag{2.1}$$

が $\zeta(s + i\tau, \alpha)$ の分布[*1] を何らかの意味で反映していると期待してもよいだろう．ただし，無限列 $\{\mathbb{X}_\alpha(n)\}$ の選び方は無数に存在する．$\zeta(s, \mathbb{X}_\alpha)$ が $\zeta(s + i\tau, \alpha)$ の分布の妥当なモデルを与えると言えるかは，$\mathbb{X}_\alpha(n)$ たちにどのような関係を与えるかにかかっているのである．

---

*1　$H(D)$ における分布を調べたいので，本当は表示 (1.1) は使えない．一方で，$D$ 上においても $\zeta(s,\alpha)$ が (1.1) の和を有限で止めた Dirichlet 多項式によって平均的には近似できるという事実があることから，この考え方は全く的を外しているわけではない．

まず確認しなければならないのは，$\zeta(s,\mathbb{X}_\alpha)$ が $H(D)$ に値をとる確率要素であるかどうかである．これについては Menshov–Rademacher の定理から，$\{\mathbb{X}_\alpha(n)\}$ が正規直交，すなわち

$$\mathbf{E}[\mathbb{X}_\alpha(m)\overline{\mathbb{X}_\alpha(n)}] = \begin{cases} 1 & \text{if } m=n, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.2}$$

を満たす場合には，(2.1) が $D$ 上で almost surely で収束することが分かる．ただし $\mathbf{E}[X]$ は確率変数 $X$ の期待値である．また収束性に関する Dirichlet 級数の一般論により，このとき $\zeta(s,\mathbb{X}_\alpha)$ は $H(D)$ に値をとる確率要素を定めることも分かる．以下では $\{\mathbb{X}_\alpha(n)\}$ が (2.2) を満たす状況のみを考えることにする．さて，$H(D)$ 上の二つの Borel 確率測度

$$\begin{aligned} P_{T,\alpha}(A) &= \frac{1}{T}\,\mathrm{meas}\left\{\tau\in[0,T] \mid \zeta(s+i\tau,\alpha)\in A\right\}, \\ Q_\alpha(A) &= \mathbf{P}\left(\zeta(s,\mathbb{X}_\alpha)\in A\right) \end{aligned}$$

を考える．ここで $\mathbf{P}(E)$ は事象 $E$ の確率を表す．もし $P_{T,\alpha}$ が $T\to\infty$ のとき $Q_\alpha$ に弱収束するのなら，$\zeta(s,\mathbb{X}_\alpha)$ は $\zeta(s+i\tau,\alpha)$ の分布の確率論的モデルとして妥当と言えるだろう．では $\mathbb{X}_\alpha(n)$ たちにどのような条件を課せば，この弱収束性を示せるのだろうか．その答えを与えるのが次の命題である．

**命題 4.** 無限列 $\{\mathbb{X}_\alpha(n)\}$ が，任意の $k\geq 1$ と $m_1,\dots,m_k\in\mathbb{Z}$, $n_1,\dots,n_k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\mathbf{E}\left[\mathbb{X}_\alpha(n_1)^{m_1}\cdots\mathbb{X}_\alpha(n_k)^{m_k}\right] = \begin{cases} 1 & \text{if } (n_1+\alpha)^{m_1}\cdots(n_k+\alpha)^{m_k}=1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.3}$$

を満たすとき，確率測度 $P_{T,\alpha}$ は $T\to\infty$ のとき $Q_\alpha$ に弱収束する．

条件 (2.3) は (2.2) を包括している．各 $\mathbb{X}_\alpha(n)$ は単位円周上に値をとる確率変数なので $k=2$, $m_1=1$, $m_2=-1$ とすればよい．紙面の都合により命題 4 の証明には立ち入ることができないが，条件 (2.3) の由来は述べておこうと思う．$X_{\alpha,\tau}(n)$ の分布を $\mathbb{X}_\alpha(n)$ に見立てていることを思い出すと，任意の連続関数 $\Phi(z_1,\dots,z_k)$ に対して

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \Phi\left(X_{\alpha,\tau}(n_1),\dots,X_{\alpha,\tau}(n_k)\right)\,d\tau = \mathbf{E}\left[\Phi\left(\mathbb{X}_\alpha(n_1),\dots,\mathbb{X}_\alpha(n_k)\right)\right]$$

が成り立っていて欲しい．とくに $\Phi(z_1,\dots,z_k)=z_1^{m_1}\cdots z_k^{m_k}$ とすると，左辺は

$$\begin{aligned} &\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (n_1+\alpha)^{-im_1\tau}\cdots(n_k+\alpha)^{-im_k\tau}\,d\tau \\ &= \begin{cases} 1 & \text{if } (n_1+\alpha)^{m_1}\cdots(n_k+\alpha)^{m_k}=1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

と計算できる．対応する期待値 $\mathbf{E}\left[\mathbb{X}_\alpha(n_1)^{m_1}\cdots\mathbb{X}_\alpha(n_k)^{m_k}\right]$ がこの値に一致することを期待するため，条件 (2.3) が必要なのである．

実のところ命題 4 に至るまでは，とくに目新しいアイデアが必要であったわけではない．問題は条件 (2.3) を満たす無限列 $\{\mathbb{X}_\alpha(n)\}$ が存在するかである．これは全く自明ではない．$\alpha$ が超越数である場合はまだ簡単である．このときは $\{\mathbb{X}_\alpha(n)\}$ を独立にとればよく，そのような無限列の存在は Kolmogorov の拡張定理から保証される．一方で $\alpha$ が代数的である場合は，代数体の整数環における素イデアル分解の一意性，類数の有限性，Dirichlet の単数定理といった代数的整数論の基本定理が上手く噛み合って $\{\mathbb{X}_\alpha(n)\}$ が構成される．詳細については論文を参照していただきたい．

**補足.** $\alpha$ が代数的数の場合を考える．条件 (2.3) が満たされるとき，$\{\mathbb{X}_\alpha(n)\}$ は独立であるだろうか．この問題はかなり奥が深い．実際，条件 (2.3) が満たされるとき，以下が同値であることを示すことができる．

(a) 確率変数 $\mathbb{X}_\alpha(n_1), \ldots, \mathbb{X}_\alpha(n_k)$ は独立である．
(b) 実数 $\log(n_1+\alpha), \ldots, \log(n_k+\alpha)$ は $\mathbb{Q}$ 上線型独立である．

もしも $\{\log(n+\alpha)\}$ が $\mathbb{Q}$ 上線型独立である代数的数 $\alpha$ が存在するのであれば，$\{\mathbb{X}_\alpha(n)\}$ は独立で，そのような $\alpha$ に対して $\zeta(s,\alpha)$ の強普遍性を証明するのは実は容易である．しかし実際には，すべての代数的数 $\alpha$ に対して，$\{\log(n+\alpha)\}$ は $\mathbb{Q}$ 上で線形従属であるというのが尤もらしいようである．この問題については，J. Andersson 氏の未出版論文 [1] が詳しい．彼は多項式値における smooth number の個数評価の観点から，

$$\frac{1}{x}\dim \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{\log(n+\alpha) \mid 0 \le n \le x\} \sim 1-\rho(\deg(\alpha)), \quad x \to \infty$$

が成り立つことを予想している．ここで $\rho(u)$ は Dickman 関数である．

ともあれ，パラメーター $\alpha$ が超越数であっても代数的数であっても，条件 (2.3) を満たす確率変数の無限列 $\{\mathbb{X}_\alpha(n)\}$ は構成可能である．そしてそのような無限列 $\{\mathbb{X}_\alpha(n)\}$ に対してランダム Dirichlet 級数 $\zeta(s,\mathbb{X}_\alpha)$ を考えると，測度の弱収束に関する Portmanteau の定理によって，命題 4 は不等式

$$\begin{aligned}&\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\operatorname{meas}\left\{\tau\in[0,T] \;\middle|\; \max_{s\in K}|\zeta(s+i\tau,\alpha)-f(s)|<\epsilon\right\}\\ &\ge \mathbf{P}\left(\max_{s\in K}|\zeta(s,\mathbb{X}_\alpha)-f(s)|<\epsilon\right)\end{aligned}$$

を導く．ただし $f\in H(D)$ とする．この最後の確率が正であることを示せれば，$\zeta(s,\alpha)$ の強普遍性の証明はほぼ完了する．残っているのは $f(s)$ の条件を $f\in H(D)$ から本来の条件である「$K$ において連続かつ $K$ の内部で正則」まで弱めることであるが，これは Weierstrass の多項式近似定理の複素版である Mergelyan の定理を適用することで達成される．かくして強普遍性の証明は，ランダム Dirichlet 級数 $\zeta(s,\mathbb{X}_\alpha)$ の性質を調べることに帰着される．

## 3　Hurwitz ゼータ関数の弱い形の強普遍性

本稿の残りのページでは，$\alpha \in \mathcal{A}$ とし，確率変数の無限列 $\{\mathbb{X}_\alpha(n)\}$ は条件 (2.3) を満たすとする．また $\{\mathbb{X}_\alpha(n)\}$ との比較のため，$\{\mathbb{Y}_\alpha(n)\}$ を複素平面の単位円周上に一様分布する独立な確率変数の無限列とし，(2.1) と同様に

$$\zeta(s, \mathbb{Y}_\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{Y}_\alpha(n)}{(n+\alpha)^s} \tag{3.1}$$

と定める．さらに，(2.1) と (3.1) の和を有限で打ち切ったランダム Dirichlet 多項式を

$$\zeta_N(s, \mathbb{X}_\alpha) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\mathbb{X}_\alpha(n)}{(n+\alpha)^s} \quad \text{and} \quad \zeta_N(s, \mathbb{Y}_\alpha) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\mathbb{Y}_\alpha(n)}{(n+\alpha)^s}$$

と書く．このとき $\{\mathbb{Y}_\alpha(n)\}$ の独立性から，次の補題を示すことができる．

**補題 5.** 集合 $K$ は帯領域 $D$ におけるコンパクト集合で，その補集合が連結であるとする．また $f \in H(D)$ とする．このとき任意の $\epsilon > 0$ と $0 < c < 1$ に対して，実数 $\rho > 0$ と整数 $N_0 \geq 0$ が存在し，

$$\mathbf{P}\left(\max_{s \in K} |\zeta_N(s, \mathbb{Y}_\alpha) - f(s)| < \frac{\epsilon}{4}\right) > 0$$

が $\alpha \in \mathcal{A}$ かつ $|\alpha - c| < \rho$ および $N \geq N_0$ を満たす場合に成立する．ただし $\rho$ および $N_0$ は $\alpha$ には依存せず，$c, \epsilon, f, K$ のみに依存して決定可能である．

$\{\mathbb{Y}_\alpha(n)\}$ が独立であるので，$\zeta_N(s, \mathbb{Y})$ と $\zeta(s, \mathbb{Y}) - \zeta_N(s, \mathbb{Y})$ は独立である．したがって

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\max_{s \in K} |\zeta(s, \mathbb{Y}_\alpha) - f(s)| < \epsilon\right) \\
&\geq \mathbf{P}\left(\max_{s \in K} |\zeta_N(s, \mathbb{Y}_\alpha) - f(s)| < \frac{\epsilon}{2}\right) \cdot \mathbf{P}\left(\max_{s \in K} |\zeta(s, \mathbb{Y}_\alpha) - \zeta_N(s, \mathbb{Y}_\alpha)| < \frac{\epsilon}{2}\right)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

が成り立つ．$N$ が十分大きいとき，補題 5 により前半の確率は正である．また後半の確率についても，Chebyshev の不等式から

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\max_{s \in K} |\zeta(s, \mathbb{Y}_\alpha) - \zeta_N(s, \mathbb{Y}_\alpha)| < \frac{\epsilon}{2}\right) &\geq 1 - \frac{4}{\epsilon^2}\mathbf{E}\left[\max_{s \in K} |\zeta(s, \mathbb{Y}_\alpha) - \zeta_N(s, \mathbb{Y}_\alpha)|^2\right] \\
&= 1 + O\left(N^{1-2\sigma_0}\epsilon^{-2}\right)
\end{aligned}$$

が成り立ち，これは $N$ が十分大きいときに正である．ただし $\sigma_0 = \min_K \mathrm{Re}(s)$ とする．このように独立な確率変数列から定義される $\zeta(s, \mathbb{Y}_\alpha)$ に対しては, $\max_{s \in K} |\zeta(s, \mathbb{Y}_\alpha) - f(s)| < \epsilon$

が成り立つ確率の正値性は比較的容易に示される．一方で先の補足でも述べた通り，$\{\mathbb{X}_\alpha(n)\}$ は独立かどうかは分からない．そのため上記の手法をそのまま用いることはできず，適切な修正が求められるのである．

修正の方向性は主に二つあると思われる．まず $\alpha \in \mathcal{A}$ に対する $\zeta(s,\alpha)$ の値分布の研究においては，$\{\log(n+\alpha)\}$ のうち漸近的に少なくとも 51 % が $\mathbb{Q}$ 上線型独立であることを示す Cassels の補題 [2, p. 177] *2 が伝統的に用いられてきた．Cassels の補題に類似するアイデアを用いて，定理 3 のような弱い形の強普遍性を証明することは，おそらく不可能ではない．一方で実際に論文 [4] で採用した手法は Cassels の補題を使わない方針によるものであった．これは A. Sourmelidis 氏と J. Steuding 氏による最近の論文 [5] で導入された新手法を，筆者のアイデアを元に確率論の言語で整理し直し，さらに指示関数の近似方法などに関する改良を施したものである．以下にその大まかな流れを述べる．

まず補題 5 が出発点になる．$\alpha \in \mathcal{A}$ は $|\alpha - c| < \rho$ を満たすとする．$N \geq N_0$ のとき，

$$\max_{s\in K} |\zeta_N(s, \mathbb{Y}_\alpha)(\omega_0) - f(s)| < \frac{\epsilon}{4}$$

を満たす標本 $\omega_0$ をとることができる．そこで事象 $\Omega_0 = \Omega_0(\delta; N, \alpha, \omega_0)$ を

$$\Omega_0 = \{\omega \in \Omega \mid |\arg \mathbb{X}_\alpha(n)(\omega) - \arg \mathbb{Y}_\alpha(n)(\omega_0)| < \delta \text{ for } 0 \leq n \leq N\}$$

により定める．ただし $\delta > 0$ は後で十分小さく定めるパラメーターである．この事象 $\Omega_0$ に関して，次の補題が成り立つ．

**補題 6.** 任意の $L > N \geq 1$ と $\Delta > \Delta_0$ に対して，有限集合 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(N, L, \Delta) \subset \mathcal{A}$ を

$$\begin{aligned}\mathcal{E} = &\bigcup_{\substack{(m_0,\dots,m_N)\in\mathbb{Z}^{N+1}\setminus\{\mathbf{0}\} \\ \forall n,\ |m_n|\leq\Delta}} \left\{\alpha \in \mathcal{A} \,\middle|\, \prod_{n=0}^{N}(n+\alpha)^{m_n} = 1\right\} \\ &\cup \bigcup_{\substack{(m_0,\dots,m_N)\in\mathbb{Z}^{N+1} \\ \forall n,\ |m_n|\leq\Delta}} \bigcup_{\substack{N<n_1,n_2<L \\ n_1\neq n_2}} \left\{\alpha \in \mathcal{A} \,\middle|\, \prod_{n=0}^{N}(n+\alpha)^{m_n} = \frac{n_2+\alpha}{n_1+\alpha}\right\}\end{aligned}$$

と定める．ただし $\Delta_0$ は十分大きい絶対定数である．このとき

$$\mathbf{P}(\Omega_0) = \delta^{N+1} + O\left(\frac{N(\log\Delta)^{N+1}}{\Delta}\right),$$

$$\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\Omega_0} \cdot \max_K |\zeta(s,\mathbb{X}_\alpha) - \zeta_N(s,\mathbb{X}_\alpha)|^2\right] \ll \mathbf{P}(\Omega_0) N^{1-2\sigma_0} + L^{1-2\sigma_0} + \frac{NL(\log\Delta)^{N+1}}{\Delta}$$

が $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{E}$ に対して成り立つ．ここで implied constant は $K$ のみに依存する．

---

*2 余談だが，Cassels の証明には誤りがある．修正は中々に困難であり，何らかの形で発表予定である．

証明には Beurling–Selberg 関数と呼ばれる，指示関数 $\mathbf{1}_{(a,b)}$ を巧妙に近似する特殊関数が用いられる．これにより $\mathbf{1}_{\Omega_0}$ を $\mathbb{X}_\alpha(n_1)^{m_1}\cdots\mathbb{X}_\alpha(n_k)^{m_k}$ の形の確率変数の有限和で近似することができて，条件 (2.3) を適用できるようになるのである．なお，もし $\Omega_0$ の代わりに

$$\Omega_0' = \{\omega\in\Omega \mid |\arg \mathbb{Y}_\alpha(n)(\omega) - \theta_n| < \pi\delta \text{ for } 0\le n\le N\}$$

とすると，この場合は $\{\mathbb{Y}_\alpha(n)\}$ の独立性から，

$$\mathbf{P}(\Omega_0') = \delta^{N+1} \quad \text{and} \quad \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\Omega_0'}\cdot \max_K |\zeta(s,\mathbb{Y}_\alpha) - \zeta_N(s,\mathbb{Y}_\alpha)|^2\right] \ll \mathbf{P}(\Omega_0')N^{1-2\sigma_0}$$

が成り立つことが分かる．補題 6 は，$\{\mathbb{Y}_\alpha(n)\}$ を独立とは限らない $\{\mathbb{X}_\alpha(n)\}$ に取替えたとしても，同様の漸近評価が $\alpha\notin\mathcal{E}$ であれば成立することを意味している．

さて定理 3 の証明の最後のステップに移ろう．まず $\omega\in\Omega_0$ のとき，$\delta>0$ を $c,\epsilon,K,N$ に依存させて十分小さく選べば,

$$\begin{aligned}
&\max_K |\zeta_N(s,\mathbb{X}_\alpha)(\omega) - f(s)| \\
&\le \max_K |\zeta_N(s,\mathbb{X}_\alpha)(\omega) - \zeta_N(s,\mathbb{Y}_\alpha)(\omega_0)| + \max_K |\zeta_N(s,\mathbb{Y}_\alpha)(\omega_0) - f(s)| \\
&< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

が成り立つ．（前半は事象 $\Omega_0$ の定義から，後半は標本 $\omega_0$ のとり方から従う．）したがって (3.2) に対応する不等式として

$$\mathbf{P}\left(\max_{s\in K}|\zeta(s,\mathbb{X}_\alpha) - f(s)| < \epsilon\right) \ge \mathbf{P}\left(\Omega_0 \cap \left\{\max_{s\in K}|\zeta(s,\mathbb{X}_\alpha) - \zeta_N(s,\mathbb{X}_\alpha)| < \frac{\epsilon}{2}\right\}\right)$$

が得られるが，右辺はさらに

$$= \mathbf{P}(\Omega_0) - \mathbf{P}\left(\Omega_0 \cap \left\{\max_{s\in K}|\zeta(s,\mathbb{X}_\alpha) - \zeta_N(s,\mathbb{X}_\alpha)| \ge \frac{\epsilon}{2}\right\}\right) \tag{3.3}$$

と変形できる．第 2 項について，Chebyshev の不等式と補題 6 により，$\alpha\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{E}$ のとき

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\Omega_0 \cap \left\{\max_{s\in K}|\zeta(s,\mathbb{X}_\alpha) - \zeta_N(s,\mathbb{X}_\alpha)| \ge \frac{\epsilon}{2}\right\}\right) &\le \frac{4}{\epsilon^2}\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\Omega_0}\cdot\max_K|\zeta(s,\mathbb{X}_\alpha) - \zeta_N(s,\mathbb{X}_\alpha)|^2\right] \\
&\le C_1\left\{\mathbf{P}(\Omega_0)N^{1-2\sigma_0} + L^{1-2\sigma_0} + \frac{NL(\log\Delta)^{N+1}}{\Delta}\right\}
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし $C_1$ は $\epsilon$ と $K$ のみに依存する正定数である．よって (3.3) に代入し，

$$\mathbf{P}\left(\max_{s\in K}|\zeta(s,\mathbb{X}_\alpha) - f(s)| < \epsilon\right) \ge (1 - C_1N^{1-2\sigma_0})\mathbf{P}(\Omega_0) - C_1L^{1-2\sigma_0} - C_1\frac{NL(\log\Delta)^{N+1}}{\Delta}$$

を得る．再び補題 6 を用いて $\mathbf{P}(\Omega_0)$ を評価すると，$N$ が $\epsilon$ と $K$ に依存して十分大きいとき

$$(1 - C_1N^{1-2\sigma_0})\mathbf{P}(\Omega_0) \ge \frac{1}{2}\mathbf{P}(\Omega_0) \ge \frac{1}{2}\delta^{N+1} - C_2\frac{N(\log\Delta)^{N+1}}{\Delta}$$

が成り立つ．ここで $C_2$ は $\epsilon$ と $K$ のみに依存する正定数である．まず $N \geq N_0$ をこのように固定しよう．すると上記の $\delta$ も $c, \epsilon, f, K$ のみに依存して固定することができ，このとき

$$\mathbf{P}\left(\max_{s\in K}|\zeta(s,\mathbb{X}_\alpha) - f(s)| < \epsilon\right) \geq \frac{1}{2}\delta^{N+1} - C_1 L^{1-2\sigma_0} - C_1\frac{NL(\log\Delta)^{N+1}}{\Delta} - C_2\frac{N(\log\Delta)^{N+1}}{\Delta}$$

を得る．ここで $L$ を十分大きくとり固定すると，

$$C_1 L^{1-2\sigma_0} < \frac{1}{4}\delta^{N+1}$$

が成り立つようにできる．最後に $\Delta$ を十分大きくとれば，

$$C_1\frac{NL(\log\Delta)^{N+1}}{\Delta} + C_2\frac{N(\log\Delta)^{N+1}}{\Delta} < \frac{1}{4}\delta^{N+1}$$

も満たされる．以上の結果を合わせて

$$\mathbf{P}\left(\max_{s\in K}|\zeta(s,\mathbb{X}_\alpha) - f(s)| < \epsilon\right) > 0$$

が得られる．先に述べたように，これで定理 3 の証明が完結する．

**謝辞.** 本稿は，2023 年度 RIMS 共同研究（公開型）「解析的整数論とその周辺」での筆者の講演を元に作成されたものです．代表者を務められた安福悠先生には日頃から大変お世話になっております．この紙面をお借りしてお礼申し上げます．

本研究は JSPS 科研費 特別研究員奨励費 22KJ2747 の助成を受けたものです．

# 参考文献

[1] J. Andsersson, *On questions of cassels and drungilas–dubickas*, 2016, preprint, https://arxiv.org/abs/1606.02524.

[2] J. W. S. Cassels, *Footnote to a note of Davenport and Heilbronn*, J. London Math. Soc. **36** (1961), 177–184. MR 146359

[3] K. Matsumoto, *A survey on the theory of universality for zeta and L-functions*, Number theory, Ser. Number Theory Appl., vol. 11, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2015, pp. 95–144. MR 3382056

[4] M. Mine, *New developments toward the Gonek Conjecture on the Hurwitz zeta-function*, 2023, preprint, https://arxiv.org/abs/2305.01262.

[5] A. Sourmelidis and J. Steuding, *On the value-distribution of Hurwitz zeta-functions with algebraic parameter*, Constr. Approx. **55** (2022), no. 3, 829–860. MR 4434025