ゴールドバッハ表現の平均個数とリーマンゼータ関数の非零領域

(The Average Number of Goldbach Representations and Zero-Free Regions of the Riemann Zeta Function)

九州大学大学院数理学研究院　アデ イルマ スリアジャヤ / チャチャ

Ade Irma Suriajaya / Chacha

Faculty of Mathematics, Kyushu University

序文

本研究は文部科学省ダイバーシティ研究環境実現イニシアティブ（先端型）の助成を受けて、九州大学ダイバーシティ・スーパーグローバル教員育成研修（SENTAN-Q）の一環として行い、サンノゼ州立大学の Keith Billington, Maddie Cheng と Jordan Schettler との共同研究である。また、部分的に科研費（課題番号：18K13400 と 22K13895）の助成を受けたものである。

要旨

281 年頃前にオイラーへの手紙のやり取りでゴールドバッハは 4 より大きい偶数が必ず二つの奇素数の和として書き表せると予想した。ゴールドバッハ問題を調べるのにそのような正整数の表現を数えれば良いが、実際の解析では、正整数を二つの素数として表現する方法をそのまま数えるより、対数関数の重みを付けて素数だけではなく素数べきも含めた方が扱いやすい。そのような表現をゴールドバッハ表現と呼ぶ。講演者らはこのゴールドバッハ表現の個数の総和が素数を数える関数と類似的な振る舞いをすることに気づき、近似公式における誤差項も同様な評価ができることを明らかにした。特に、素数の場合に対して誤差評価はリーマンゼータ関数の非零領域により完全に決まるが、ゴールドバッハ表現の個数の総和の場合も同様であることを示した。この研究は九州大学のダイバーシティ・スーパーグローバル教員育成研修プログラムの学生指導プロジェクトとして、サンノゼ州立大学の大学院生 2 名と Schettler 氏と行ったものである。本報告書でその研究成果を紹介する。詳しい内容については本論文 [BCSS24] を参照していただきたい。

1　ゴールドバッハ問題及びゴールドバッハ表現

4 以上の偶数が必ず

$$
\begin{aligned}
&4 = 2+2, \qquad 6 = 3+3, \qquad 10 = 3+7 = 5+5 = 7+3,\\
&16 = 3+13 = 5+11 = 11+5 = 13+3,\\
&30 = 7+23 = 11+19 = 13+17 = 17+13 = 19+11 = 23+7,\\
&72 = 5+67 = 11+61 = 13+59 = 19+53 = 29+43 = 31+41,\\
&\quad\; = 67+5 = 61+11 = 59+13 = 53+19 = 43+29 = 41+31
\end{aligned}
$$

2020 *Mathematics Subject Classification*: 11P32, 11N05, 11N37, 11M26.
キーワード: ゴールドバッハ表現、ゼータ関数、非零領域、素数定理
メール: adeirmasuriajaya@math.kyushu-u.ac.jp

のように、二つの素数の和として書き表されるとゴールドバッハ（1742 年）により予想された。偶素数は 2 しかないため、2 を除いた素数を考えればよく、このような二つの奇素数の組み合わせが、2 と 4 を除いた正の偶数全体を成すということはゴールドバッハ予想の主張である。この正の偶数を二つの奇素数の和で書き表す表現の個数を数えるには、関数

$$g(n) := \sum_{\substack{n=p_1+p_2 \\ 2\nmid p_1p_2 \\ p_1,p_2:\,\text{素数}}} 1 \tag{1.1}$$

を考えればよい。偶数 $n \geq 6$ に限れば、$g(n)$ の定義 (1.1) における条件 $2 \nmid p_1p_2$ を外すことができるが、これを一般の正整数に対しても適用することが多い。その際、$2n-1$ は素数であるとき、$g(2n+1) = 2$ となるが、それ以外の奇数 $2m+1$ に対しては $g(2m+1) = 0$ である。

実際の解析において、$n = p_1 + p_2$ の表し方を (1.1) のように $g(n)$ を用いてそのまま数えるのではなく、フォン・マンゴルト関数

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p, & \exists p, \exists k \in \mathbb{N} := \{1,2,3,\ldots\} \text{ s.t. } n = p^k, \\ 0, & \exists p_1 \neq p_2 \text{ s.t. } p_1p_2 | n \ \text{ 或 } \ n = 1, \end{cases} \tag{1.2}$$

の重みを付けた個数関数

$$\psi_2(n) := \sum_{\substack{m_1+m_2=n \\ m_1,m_2:\,\text{正整数}}} \Lambda(m_1)\Lambda(m_2)$$

のほうが扱いやすい。$\psi_2(n)$ は n を素数と素数の冪の和で書き表す方法を整数上で密度 1 となるように対数関数の重みで数える。以降、$\psi_2(n)$ で数える正整数 n の表現を「ゴールドバッハ表現」と呼ぶ。

本報告書では上記のゴールドバッハ表現の個数の総和

$$G(N) := \sum_{n \leq N} \psi_2(n) \tag{1.3}$$

を考える。$N < 4$ に対して、$G(N) = 0$ であることに注意せよ。業界ではこのような総和を「平均」と通称され、この報告書でも以降「ゴールドバッハ表現の個数の平均」という。補足として、n は奇数のとき、$\psi_2(n) \ll \log^2 n$ であるため、(1.3) における奇数 n の寄与が少なく、$G(N)$ の主な振る舞いは偶数 n における $\psi_2(n)$ の振る舞いにより決まる。また、素数冪の表現による寄与も少ないため、二つの素数による表現の個数だけが $G(N)$ の漸近的挙動を決める。

2　リーマンゼータ関数の零点と非零領域

リーマンゼータ関数とは $\mathrm{Re}(s) > 1$ で

$$\zeta(s) := \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n:\,\text{正整数}}} \frac{1}{n^s} = \prod_{p:\,\text{素数}} \frac{1}{1-p^{-s}} \tag{2.1}$$

により定まる $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ 上解析関数である。特に、右側にある無限積表示により $\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ において零点を持たない。$\zeta(s)$ は複素平面 $\mathbb{C}$ 全体で関数等式

$$\zeta(s) = \underbrace{2^s \pi^{s-1}}_{\text{指数関数}} \overbrace{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}^{\text{三角サイン関数}} \underbrace{\Gamma(1-s)}_{\text{ガンマ関数}} \zeta(1-s) \tag{2.2}$$

を満たし、$\mathrm{Re}(s) < 0$ においては負の偶数点 $s = -2, -4, -6, \ldots, -2k, -2k-2, \ldots$ のみで零点（一位の零点）を持ち、これらの零点を「自明な零点（trivial zeros）」として知られている。よって、自明な零点以外の零点は、存在すれば、帯領域 $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ に所在する。次の節で説明するが、$\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s) = 1$ 上に零点を持たないため、自明な零点以外の零点は開帯領域 $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ 内にしか存在し得ない。この帯領域を「臨界領域（critical strip）」と呼ばれ、自明ではない零点は「非自明な零点（nontrivial zeros）」と通称される。$\zeta(s)$ の非自明な零点が実際に無限に存在し、現在に至って「臨界線（critical line）」$\mathrm{Re}(s) = 1/2$ の上にしか見つかっていない。

上記の説明により、$\zeta(s)$ は

$$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) \geq 1\} \cup \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) \leq 0, s \neq -2, -4, -6, \ldots\}$$

において零点を持たず、このような領域を $\zeta(s)$ の「非零領域（zero-free region）」という。ただし、この非零領域における等号が付いているのは、次節で説明する「素数定理（Prime Number Theorem）」と関係する。再び、(2.1) の右側の無限積表示による $\mathrm{Re}(s) > 1$ において $\zeta(s) \neq 0$ であることと関数等式 (2.2) により、左半平面における非零領域 $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) \leq 0, s \neq -2, -4, -6, \ldots\}$ は最良であることがわかる。一方、右半平面における非零領域 $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) \geq 1\}$ に対しては、$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1/2\}$ に改良できると期待され、これは有名な「リーマン予想（Riemann Hypothesis）」の主張である。因みに、リーマン予想の主張は「$\zeta(s)$ の非自明な零点は全て直線 $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ 上にある」として馴染みがあるかもしれない。これはまた、関数等式 (2.2) により、左臨界領域 $0 < \mathrm{Re}(s) < 1/2$ において $\zeta(s) \neq 0$ であることと同値であり、即ち、$\zeta(s)$ の "最善の非零領域" は

$$\begin{aligned}&\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1/2\} \cup \{s \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(s) < 1/2\} \\ &\qquad \cup \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) \leq 0, s \notin -2\mathbb{N} := \{-2, -4, -6, -8, \ldots\}\}\end{aligned}$$

であると予想されている。

$\zeta(s)$ の非零領域は

$$\sigma > 1 - \eta(|t|) \text{ において } \zeta(\sigma + it) \neq 0 \tag{2.3}$$

の形でしか得られていない。ここで、$\eta(u)$ は $0 < \eta(u) \leq 1/2$ を満たす $u \geq 0$ に関する連続な減少関数である。

$$\Theta := \sup\{\beta : \rho = \beta + i\gamma, \zeta(\rho) = 0\}$$

とおくと、$1/2 \leq \Theta \leq 1$ が成り立つことが直ちにわかる。そこで、$1/2 \leq \Theta < 1$ であるとき、(2.3) における $\eta(u)$ は $\eta(u) = \Theta$ という定数関数で書ける。$1/2 < \Theta < 1$ の場合は「quasi リーマン予想」として知られ、リーマン予想は $\Theta = 1/2$ の場合と言い換えられる。

一方、$\Theta = 1$ の場合は、$|t| \to \infty$ のとき $\eta(|t|) \to 0$ であるが、これはまさに (2.3) の場合である。$\zeta(s)$ の古典的な非零領域は

$$\eta(u) = \frac{c_0}{\log(u+3)}, \qquad \exists c_0 > 0$$

の場合であり、現在知られている最良の非零領域は N.M. Korobov [Kor58a, Kor58b] と、独立に、I.M. Vinogradov [Vin58] による

$$\eta(u) = \frac{c_1}{(\log(u+3))^{2/3}(\log\log(u+3))^{1/3}}, \qquad \exists c_1 > 0 \tag{2.4}$$

場合である。

3 素数定理とリーマンゼータ関数の非零領域

素数定理は

$$\pi(x) := \sum_{\substack{p \le x \\ p:\,\text{素数}}} 1 \ \sim\ \frac{x}{\log x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \psi(x) := \sum_{\substack{n \le x \\ n:\,\text{正整数}}} \Lambda(n) \ \sim\ x \tag{3.1}$$

のことであり、上記両辺の主張は同値である。ここで、漸近公式 $f(x) \ \sim\ g(x)$ は

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

を意味し、右辺の $\psi(x)$ の定義に出てくる $\Lambda(n)$ は (1.2) で定義したフォン・マンゴルト関数である。素数定理 (3.1) は、全ての $t \in \mathbb{R}$ に対して $\zeta(1+it) \neq 0$ であることより初めて示された [Had96, delaVal96]。しかし、この事実だけでは (3.1) における誤差が正確に評価できない。素数定理 (3.1) における誤差は実に $\zeta(s)$ の非零領域によって定まり、$\zeta(s)$ が $\mathrm{Re}(s) \ge 1$ より広い領域で零点を持たないことにより、誤差評価がさらに良くなる。前節で紹介したように、$\zeta(s)$ の最善非零領域はリーマン予想が成り立つ場合（$\mathrm{Re}(s) > 1/2$ に対して $\zeta(s) \neq 0$）であるが、それがまさに素数定理の "ほとんど最善の評価" を与える。これを次で詳しく説明する。

1901 年に H. von Koch [vonKoc01] は、リーマン予想が成立すると仮定すると、

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt + O\big(x^{1/2}\log x\big), \qquad \psi(x) = x + O\big(x^{1/2}\log^2 x\big) \tag{3.2}$$

が成り立つことを示した。ここで、関数 $f(x)$ と非負関数 $g(x)$ に対して、$f(x) = O(g(x))$ は、ある定数 $C > 0$ が存在して、$|f(x)| \le Cg(x)$ が $x \to \infty$ のときに成り立つことを意味し、それをより簡約に $f(x) \ll g(x)$ とも書く。一方、上記の $\pi(x)$ と $\psi(x)$ の近似公式における誤差項に対して、

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt \gg \frac{x^{1/2}}{\log x}, \qquad \psi(x) - x \gg x^{1/2}$$

となる x が無限に存在する [Sch03]。即ち、(3.2) における誤差項はそれぞれ、$O(x^{1/2}(\log x)^{-1})$ と $O(x^{1/2})$ より良くならない。これは 1914 年に J.E. Littlewood [Lit14] により更に改良され、

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt \gg \frac{x^{1/2}\log\log\log x}{\log x}, \qquad \psi(x) - x \gg x^{1/2}\log\log\log x$$

となる x が無限に存在することがわかる。そのため、(3.2) における誤差評価は "ほとんど最善の評価" と言える。補足として、リーマン予想はあくまでも $\zeta(s)$ の非自明な零点 $\rho = \beta + i\gamma$ に対して、実部 β の位置に関する予想であり、D.A. Goldston と著者が [GS22] で示したようにリーマン予想に加えて、$\zeta(s)$ の非自明な零点の虚部 γ の分布に関する予想を仮定すれば、素数定理の "ほとんど最善の評価" (3.2) より良い評価が得られる。

実際の解析において、ゴールドバッハ表現の個数を数える場合と同様に、$\pi(x)$ よりも、$\psi(x)$ の方が扱いやすい。その理由の一つは $\psi(x)$ が次の明示公式を満たすからである：

$$\psi(x) = x - \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ \zeta(\rho)=0 \\ 0<|\gamma|\le T}} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x\log x \log\log x}{T}\right) + O(\log x). \tag{3.3}$$

$\psi(x)$ に関する評価を得れば、$x \ge 2$ に対して

$$\pi(x) = \frac{\psi(x)}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right)$$

（証明は例えば、[MV07, Corollary 2.5] を参照）が成り立つため、それが直ちに $\pi(x)$ の評価に書き換えらえる。

明示公式 (3.3) により直ちに観察できるが、素数定理 (3.1) における誤差は $\zeta(s)$ の非零領域に影響される。実際、素数定理 (3.1) における誤差の上から評価は $\zeta(s)$ の非零領域 (2.3) の形によって定まる。次に、これを具体的に説明する。素数定理 (3.1) における誤差項を

$$R(x) := \psi(x) - x$$

と書き、$\zeta(s)$ の非零領域 (2.3) に対して、

$$\omega(x) = \min_{u\ge 1}\bigl(\eta(u)\log x + \log u\bigr) \tag{3.4}$$

とおくと、任意に固定された $0 < \varepsilon < 1$ に対して

$$R(x) = O\bigl(x\exp(-(1-\varepsilon)\omega(x))\bigr) \tag{3.5}$$

が成り立つ。これの少し弱い評価は 1932 年に A.E. Ingham [Ing32] によって初めて示されたが、J. Pintz [Pin80] が 1980 年にそれを改良し、上記の結果を示した。

P. Turán [Tur50, Tur84], W. Staś [Sta61] と Pintz [Pin80, Pin84] が逆も成り立つことを示した。即ち、$\eta(u)$ は $0 < \eta(u) \le 1/2$ と $\lim_{u\to\infty} \eta'(u) = 0$ を満たす $u \ge 0$ に関する連続な減少関数で

$$\varpi(x) = \min_{u\ge 0}\bigl(\eta(u)\log x + u\bigr) \tag{3.6}$$

とおくと、任意に固定された $0 < \varepsilon < 1$ に対して、素数定理 (3.1) における誤差項 $R(x)$ が

$$R(x) = O\bigl(x\exp(-(1+\varepsilon)\varpi(x))\bigr)$$

と評価できたら、

$$\sigma > 1 - \eta(\log|t|)$$

において $\zeta(\sigma + it) \ne 0$ が成り立つ。

4 $\psi_2(n)$ の平均と $\zeta(s)$ の非零領域

(1.3) で定義した $\psi_2(n)$ の平均

$$G(N)=\sum_{n\le N}\psi_2(n)$$

は 1991 年に A. Fujii [Fuj91a, Fuj91b, Fuj91c] により、初めて研究され、リーマン予想が成り立つ（即ち、$\rho=1/2+i\gamma$, $\gamma\in\mathbb{R}$）と仮定すれば、

$$G(N)=\frac{N^2}{2}-2\sum_{\rho}\frac{N^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)}+O\left(N^{\frac{4}{3}}(\log N)^{\frac{4}{3}}\right) \tag{4.1}$$

が成り立つ。

補足. (4.1) の $\zeta(s)$ の零点を渡る和の絶対収束性は保証される。

Fujii [Fuj91a, Fuj91b, Fuj91c] に引き続き、$G(N)$ の漸近挙動は A. Granville [Gra07, Gra08], G. Bhowmik と J.-C. Schlage-Puchta [BS-P10], A. Languasco と A. Zaccagnini [LZ12], Goldston と L. Yang [GY17], Bhowmik と I.Z. Ruzsa [BR18], Bhowmik, K. Halupczok, K. Matsumoto と Y. Suzuki [BHMS19], Goldston と著者 [GS23a, GS23b] により調べられてきた。特に、Fujii 公式 (4.1) における誤差は Bhowmik と Schlage-Putcha [BS-P10] によって $O(N\log^5 N)$ に改良され、それは更に、A. Languasco と A. Zaccagnini [LZ12] によって $O(N\log^3 N)$ まで改良された。また、Bhowmik と Schlage-Putcha [BS-P10] はリーマン予想を仮定せず（無条件に）

$$\left|G(N)-\frac{N^2}{2}+2\sum_{\rho}\frac{N^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)}\right|\gg N\log\log N$$

となる N が無限に存在することを示した。

素数定理 (3.1) における誤差項と同様に、ゴールドバッハ表現平均 $G(N)$ における誤差項の上から評価も $\zeta(s)$ の非零領域 (2.3) の形によって定まる。これは Billington, Cheng, Schettler と著者 [BCSS24] の主結果である。$\zeta(s)$ の非零領域 (2.3) が成り立てば、ある定数 $0<C<1$ が存在して、$N\ge 4$ に対して、$\omega(x)$ と (3.4) で定義された関数とすると、

$$G(N)=\frac{N^2}{2}+O\big(N^2\exp(-C\omega(N))\big) \tag{4.2}$$

が成り立つ。証明の主なアイデアは、(4.2) における誤差項を

$$G(N)=\frac{N^2}{2}+O\big(N\max_{0\le u\le N}|R(u)|\big)$$

のように素数定理における誤差項 $R(x)$ で書くことである。それより、(3.5) を用いれば $G(N)$ の近似公式 (4.2) が直ちに得られる。

具体的な例を一つ挙げる。ある定数 $c>0$ が存在して、

$$\eta(u)=\frac{c}{(\log(u+3))^a(\log\log(u+3))^b},\qquad 0<a\le 1, b\in\mathbb{R}\quad \text{または}\quad a=0, b\ge 0$$

（Korobov-Vinogradov 非零領域 (2.4) は $a=2/3$ と $b=1/3$ の場合、）に対して、

$$\sigma\ge 1-\eta(|t|)\ \text{において}\ \zeta(\sigma+it)\ne 0$$

が成り立てば、ある定数 $c' > 0$ が存在し、任意の $N \geq 4$ に対して、

$$G(N) = \frac{N^2}{2} + O\left(N^2 \exp\left(-c'(\log N)^{\frac{1}{1+a}}(\log\log N)^{-\frac{b}{1+a}}\right)\right)$$

となる。

逆に、連続な増加関数 f が全ての $x \geq 3$ に対して

$$(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{1/5} \ll f(x) \leq \frac{1}{2}\log x \tag{4.3}$$

を満たすとし、全ての $N \geq 4$ に対して、

$$G(N) = \frac{N^2}{2} + O\big(N^2 \exp(-f(N))\big) \tag{4.4}$$

が成り立てば、ある定数 $C > 0$ が存在して、$x \geq 3$ と任意の実数 $A > 1$ に対して、

$$R(x) = O\Big(x \exp\Big(-Cf\Big((x/2)^{1/A}\Big)\Big)\Big) \tag{4.5}$$

である。再び、Turán [Tur50, Tur84], Staś [Sta61] と Pintz [Pin80, Pin84] の結果を用いれば、$\zeta(s)$ の非零領域が従う。正確に記述すると、$\eta(u)$ は $0 < \eta(u) \leq 1/2$ と $\lim_{u\to\infty}\eta'(u) = 0$ を満たす $u \geq 0$ に関する連続な減少関数に対して、$\varpi(x)$ を (3.6) のように定め、A を 1 より真に大きい任意に固定された実数とする。このとき、ある定数 $C > 5A$ が存在して、全ての $N \geq 4$ に対して

$$G(N) = \frac{N^2}{2} + O\big(N^2 \exp(-C\varpi(N))\big) \tag{4.6}$$

であれば、十分大きな $|t|$ に対して、

$$\sigma > 1 - \eta(\log|t|)$$

において $\zeta(\sigma + it) \neq 0$ である。関数 f が満たす条件 (4.3) について説明する。詳細を省くが、$\zeta(s)$ の $\mathrm{Re}(s) = 1/2$, $\mathrm{Im}(s) > 0$ における、例えば、実軸に最も近い零点 $0.5 + i14.134725\ldots$ を用いれば、

$$G(N) - \frac{N^2}{2} \gg N^{3/2} \tag{4.7}$$

となる N が無限に存在することがわかるため、(4.3) の右辺の条件を付けても良い。(4.7) の二重不等号における定数の明示的な評価がなければ定数倍の差が生じ得るが、その差は (4.5) の定数 C を取り替えることによって吸収できるため、最終結果が本質的に変わらない。一方、(4.3) の左辺の条件は、Korobov-Vinogradov 非零領域 (2.4) によるものである。

$\zeta(\sigma + it)$ の非零領域 $\sigma > 1 - \eta(|t|)$ は

1. $|t| \to \infty$ に対して $\eta(|t|) \to 0$、または
2. $\eta(u)$ は定数（quasi リーマン予想、もしくは、リーマン予想の場合）

のいずれである。前段落で紹介した結果は前者（$\eta(|t|) \overset{|t|\to\infty}{\longrightarrow} 0$）の場合に対して最良であるが、後者（quasi リーマン予想とリーマン予想）の場合に対して最適ではない。実際、Bhowmik と Ruzsa [BR18] は前段落の主張を、定数 $0 < c < 1/2$ に対して $\varpi(x) = c\log x$ の場合に対して示し、(4.6)

における誤差評価と quasi リーマン予想の関係を明らかにしたが、(4.6) における定数 C の制約により、最適な同値条件が得られなかった。正確には、Bhowmik と Ruzsa [BR18] が

$$0 < \delta \le 1/2 \text{ に対して、} \quad G(N) = \frac{N^2}{2} + O(N^{2-\delta})$$

が成り立てば、$\mathrm{Re}(s) > 1 - \delta/6$ にて $\zeta(s) \neq 0$ であることを示した。前段落で紹介した Billington, Cheng, Schettler と著者 [BCSS24] の結果は、Bhowmik と Ruzsa [BR18] の手法を活かして証明したが、[BR18] で生じた 1/6 のロスは定数に吸収された。実際、[BCSS24] で Bhowmik と Ruzsa [BR18] の手法を少し改良し、その 1/6 のロスを 1/5 のロスにできた。しかし、quasi リーマン予想とリーマン予想（$\varpi(x) = c\log x$, $0 < c \le 1/2$）の場合に対しては、[BHMS19, Theorem 1 (2)] にて最適な結果が得られた。

[BCSS24] で得られた [BR18] の手法の改良ポイントは、ゴールドバッハ表現平均 $G(N)$ の近似公式 (4.4) における誤差項から素数定理 (3.1) における誤差項 $R(x)$ に直接変換するのではなく、$R(x)$ の滑らかな平均

$$R_1(x) := \int_0^x R(u)\,du$$

を経由するのである。$G(N) - \frac{1}{2}N^2$ の誤差は $R_1(N)$ と余分の項で書けるが、その余分の項について、母関数に対して簡単な円周法（circle method）を用いて評価する。これは証明の核心である。

参考文献

[BS-P10] G. Bhowmik, J. -C. Schlage-Puchta, *Mean representation number of integers as the sum of primes*, Nagoya Math. J. **200** (2010), 27–33.

[BR18] G. Bhowmik, I. Z. Ruzsa, *Average Goldbach and the quasi-Riemann hypothesis*, Anal. Math. **44** (2018), no. 1, 51–56.

[BHMS19] Gautami Bhowmik, Karin Halupczok, Kohji Matsumoto, Yuta Suzuki, *Goldbach representations in arithmetic progressions and zeros of Dirichlet L-functions*, Mathematika **65** (2019), no. 1, 57–97.

[BCSS24] Keith Billington, Maddie Cheng, Jordan Schettler and Ade Irma Suriajaya, *The Average Number of Goldbach Representations and Zero-Free Regions of the Riemann Zeta-Function*, submitted, preprint in arXiv:2306.09102 [math.NT].

[Fuj91a] A. Fujii, *An additive problem of prime numbers*, Acta Arith. **58** (1991), 173–179.

[Fuj91b] A. Fujii, *An additive problem of prime numbers. II*, Proc. Japan Acad. ser. A Math. Sci. **67** (1991), 248–252.

[Fuj91c] A. Fujii, *An additive problem of prime numbers. III*, Proc. Japan Acad. ser. A Math. Sci. **67** (1991), 278–283.

[GS22] D. A. Goldston and Ade Irma Suriajaya, *The Prime Number Theorem and Pair Correlation of Zeros of the Riemann Zeta-Function*, Res. Number Theory **8** (2022), article number: 71.

[GS23a] D. A. Goldston and Ade Irma Suriajaya, *On an Average Goldbach Representation Formula of Fujii*, Nagoya Math. J. **250** (2023), 511–532.

[GS23b] Daniel A. Goldston and Ade Irma Suriajaya, *On a smoothed average of the number of Goldbach representations*, Number Theory in Memory of Eduard Wirsing (2023), H. Maier et al. (eds.), Springer Nature Switzerland AG, 145–156.

[GY17] D. A. Goldston and L. Yang, *The Average Number of Goldbach Representations*, in: Prime numbers and representation theory, Edited by Ye Tian & Yangbo Ye, Science Press, Beijing, 2017, 1–12.

[Gra07] A. Granville, *Refinements of Goldbach's conjecture, and the generalized Riemann hypothesis*, Funct. Approx. Comment. Math. **37** (2007), 159–173.

[Gra08] A. Granville, *Corrigendum to "Refinements of Goldbach's conjecture, and the generalized Riemann hypothesis"*, Funct. Approx. Comment. Math. **38** (2008), 235–237.

[Had96] Jacques Hadamard, *Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France **24** (1896), 199–220.

[Ing32] A. E. Ingham, *The Distribution of Prime Numbers*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics **30**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1932.

[vonKoc01] H. von Koch, *Sur la distribution des nombres premiers*, Acta Math. **24** (1901), 159–182.

[Kor58a] N. M. Korobov, *Weyl's estimates of sums and the distribution of primes*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **123** (1958), 28–31.

[Kor58b] N. M. Korobov, *Estimates of trigonometric sums and their applications*, Uspehi Mat. Nauk **13** (1958), no. 4 (82), 185–192.

[LZ12] A. Languasco and A. Zaccagnini, *The number of Goldbach representations of an integer*, Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), 795–804.

[Lit14] J. E. Littlewood, *Sur la distribution des nombres premiers*, C. R. Acad. Sci. Paris **158** (1914), 1869–1872.

[MV07] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **97**, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[Pin80] J. Pintz, *On the remainder term of the prime number formula, II. On a theorem of Ingham,* Acta Arith. **37**, 209–220.

[Pin84] J. Pintz, *On the remainder term of the prime number formula and zeros of Riemann's zeta-function*, Number Theory (Noordwijkerhourt, 1983) Lecture Notes in math. 1068. Berlin: Springer-Verlag, 186–197.

[Sch03] Erhard Schmidt, *Über die Anzahl der Primzahlen unter gegebener Grenze*, Math. Ann. **57** (1903), no. 2, 195–204.

[Sta61] W. Staś, *Über die Umkehrung eines Satzes von Ingham*, Acta Arith. **6** (1961), 435–446.

[Tur50] P. Turán, *On the remainder term of the prime-number formula, II*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **1**, 155–166.

[Tur84] Paul Turán, *On a new method of analysis and its applications*, with the assistance of G. Halász and J. Pintz, and a foreword by Vera T. Sós, John Wiley & Sons, Inc. (New York), 1984.

[delaVal96] Charles-Jean de la Vallée Poussin, *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers*, Annales de la Société scientifique de Bruxelles **20 B**, **21 B** (1896), Imprimeur de l'Académie Royale de Belgique: 183–256, 281–352, 363–397, 351–368.

[Vin58] I. M. Vinogradov, *A new estimate of the function $\zeta(1+it)$*, Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. **22** (1958), 161–164.