ピライ方程式の特別なタイプの解の個数について

Number of solutions to a special type of Pillai's equation [1]

宮崎 隆史
群馬大学・理工学部
Takafumi Miyazaki
Faculty of Science and Technology, Gunma University

1 序

本稿では，始めに，今日ピライ予想と呼ばれる問題で扱われている方程式について述べる．Pillai [Pi2] の予想は,「与えられた数を差に持つ様な累乗数の組は高々有限個である」ことを主張し，不定方程式論における有名な未解決問題である．

予想 1 (Pillai, 1936) 任意に与えられた自然数 c に対して，方程式

(ピ) $$X^x - Y^y = c$$

を満たす 1 より大きい自然数の四つ組み (X, Y, x, y) は高々有限個である．

この予想については，未知数 X, Y, x, y と数 c のいくつかを (具体的に) 固定する場合が主に考察され，現在でも活発に研究されている．既存の成果の中でとりわけ有名なものは，$c = 1$ の場合を扱う Mihăilescu の定理 (Catalan 予想と呼ばれ約 160 年もの間未解決であった) であり，この場合には解の有限性のみならず，解の決定，すなわち等式 $3^2 - 2^3 = 1$ に対応する $(X, Y, x, y) = (3, 2, 2, 3)$ だけが解であることが示されている．これらの話題の詳細については [ShTi, 12 章], [Ri], [Wa], [BiBuMi] 等を参照して頂きたい．

さて，予想 1 を提起した Pillai だったが，彼の主な考察対象は方程式 (ピ) の左辺の '底数 (base number)' である X と Y の値を固定する場合であった．つまり興味の対象を未知の指数 x と y に限定するのである．すると，次の方程式を考察することになる：

(abc) $$a^x - b^y = c.$$

ここで，a, b, c は与えられた自然数であり，x, y は未知の自然数である．ただし，a と b は 1 より大きい．注意として，この方程式では指数 x と y のいずれも 1 に等しくなることが許されている (この許容は，次節以降にみられるように方程式 (abc) の研究をより豊かにする)．方程式 (abc) は純指数型

[1] 本研究は科研費 (課題番号 20K03553) の助成を受けたものである．

不定方程式あるいはより一般の単数方程式と称されるものの最も単純な例でもある ([Mi] を参照). Pillai [Pi, Pi2] は特にその解の個数について研究を行った. 以後, 方程式 (abc) の解の個数を $N(a, b, c)$ あるいは単に N と記す.

2 解の個数の一般的な評価

Pillai は特に次の様な結果を得ており, それは本研究の内容の出発点になっている.

命題 1 (Pillai, 1936) 方程式 (abc) を条件 $\gcd(a, b) = 1$ の下で考える. 任意に与えられた a と b に対して, $N(a, b, c) > 1$ となる整数 c は高々有限個である.
※ c の符号が負となることを含めている.

この命題は,「a と b だけに依存する定数 $c_0 = c_0(a, b)$ が存在し, $|c| > c_0$ である限り, 方程式 (abc) の解は存在しないまたはただ一つである」ことを主張している. その証明は, a と b だけに依存する代数的無理数に対する有理数による近似の限界を測る方法に帰着されていて, 実効的 (effective) でない, つまり, c_0 の存在性のみを保証する. これに関連することとして, Pillai は $(a, b) = (3, 2)$ の場合を取りあげ, $c_0(3, 2) = 13$ と予想した (Pillai のもう一つの予想). 実際, $N(3, 2, c) > 1$ となる例として $3 - 2 = 3^2 - 2^3 = 1$, $3 - 2^3 = 3^3 - 2^5 = -5$, そして $3 - 2^4 = 3^5 - 2^8 = -13$ がある. この予想は, 後年, Stroeker と Tijdeman [StTi] によって肯定的に証明されている. その証明では, 指数型不定方程式の解の明示的な上限評価に有効な対数の一次形式に関するいわゆる Baker 理論 ([Bu2] を参照) が用いられている.

命題 2 (Stroeker & Tijdeman, 1982) $|c| > 13$ ならば $N(3, 2, c) \leqq 1$.

この命題は, 後に Scott [Sc] によってその別証明が与えられている. 彼の手法は虚二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-b^y c})$ 上の初等整数論であり, a が素数であるより一般の場合に関して方程式 (abc) の解の個数の '最良評価' を与える. 彼の研究はこの分野のブレイクスルーであると認識されている ([Gu, p.242] を参照). この時点で, おそらく経験的には既に成立が予測されていたであろう命題『方程式 (abc) の解の個数は一般に 2 以下である』がより深く一般に認識されたのではないかと筆者は考える. これらのより詳しい歴史的経緯は [Be, Be2] のそれぞれの第 1 節に紹介されている. その後, Le [Le] によって, 複数個の架空解の存在性の下で Baker 理論を適用する方法が示され, それを改良した Bennett [Be] によって得られた結果が次のものである:

命題 3 (Bennett, 2001) 一般に, $N(a, b, c) \leqq 2$.

この命題は, Baker 理論と, (a と b が互いに素な場合における) 三つ以上の架空の解の間の間隙原理を組み合わせることで証明が成されている. a と b が非自明な公約数を有する場合は, 短く初等的 (けれど鮮やか) に処理されるので, "a と b が互いに素である場合が本質である" と考えられることに注

意する．命題 3 は，その後，その係数付きなどの一般化問題が Scott と Styer らによって熱心に研究され続けている ([ScSt2, ScSt3, ScSt4] 等を参照)．

3 M.A.Bennett の予想

さて，命題 3 は '最良' である．すなわち，実際に $N=2$ となる例がいくつか見つかっている．その様なものは以下である ([Be, (1.2)] を参照)：

$$2^3-3=2^5-3^3=5;\quad 2^4-3=2^8-3^5=13;$$
$$2^3-5=2^7-5^3=3;\quad 3-2=3^2-2^3=1;$$
$$13-3=13^3-3^7=10;\quad 91-2=91^2-2^{13}=89;$$
$$6-2=6^2-2^5=4;\quad 6^4-3^4=6^5-3^8=1215;$$
$$15-6=15^2-6^3=9;\quad 280-5=280^2-5^7=275;$$
$$4930-30=4930^2-30^5=4900.$$

この各例に対応する三つ組み (a,b,c) に対して方程式 (abc) の解は上記の様に与えられることに注意する (当然そのいずれの場合も $N=2$ である)．さて，方程式 (abc) の解の個数の評価に関するさらなる問題として，Bennett [Be] は次のことを提起している．

予想 2 (Bennett, 2001) $N(a,b,c)=2$ となる例は，前掲のものに限る，すなわち，三つ組み (a,b,c) が次の集合の要素である場合に限る．

$$\text{(exc)}\qquad \{\,(2,3,5),(2,3,13),(2,5,3),(3,2,1),\ (13,3,10),(91,2,89),(6,2,4),(6,3,1215),\ (15,6,9),(280,5,275),(4930,30,4900)\,\}.$$

※ここでは a または b が累乗数となる場合を除外している．

Bennett はこの予想を次の様な場合に確かめている．

・$c \geqq b^{2a^2\log a}$；
・$c \leqq b^y/6000$；
・$c \leqq 100$；
・a が素数で，$b \equiv \pm 1 \pmod{a}$.

この内，最初のものは命題 1 の (実質的な) 明示版である．三番目の仮定の c の上限は須藤 [Su] によって 300 まで拡張されている．また，最後のものを用いて，予想 2 は a がフェルマー素数 (2 の累乗と 1 の和で表される素数) である場合に成立することが示されている．これは，前述した Scott による仕事の一つ ($a=2$ の場合に予想 2 は成立する) のアナロジーとみなせる．論文 [Be] 内にも言及されているが，a または b の値を具体的に固定する場合でさえ，予想 2 を示すことは決して容易でない．これらに関するさらなる一般的な研究成果としては，[ScSt] や，Schmidt の部分空間定理や abc 予想の

応用も含めた [Lu], [BuLu] 等が挙げられる．特に次の非常に興味深い結果は Bugeaud と Luca [BuLu] によって示されている：

命題4 (Bugeaud & Luca, 2006)　$N(a,b,c)=2$ となる三つ組み (a,b,c) は (abc 予想の下で) 高々有限個である．

この命題は，$N=2$ となる三つ組み (a,b,c) の例は (exc) の外に存在しても高々有限個であることを主張する．

さて，[MiPi2] では，我々は方程式 (abc) 含む様なより一般の純指数型不定方程式 (典型例：$3^x+4^y=5^z$) を考察した．その系として，特に "方程式 (abc) の最大項 a^x の底数 a の値を固定する場合" に関して，予想 2 に対する次の様な結果を得る事が出来ている．

記号　1 より大きい自然数 M と非零整数 h に対し，h を割り切る様な M の最大のベキ指数を $\nu_M(h)$ と記す．
※これは M が素数 p である場合の p 進付値の自然な一般化である．

命題5 (宮崎 & Pink)　方程式 (abc) を条件 $\gcd(a,b)=1$ の下で考える．不等式

$$\max\{\,2^{\nu_2(a)},\,3^{\nu_3(a)}\,\}>\sqrt{a} \tag{23}$$

を満たす任意に与えられた a に対して，$N(a,b,c)=2$ となる組 (b,c) は高々有限個であり，それらは実効的に決定可能である．

不等式 (23) は，a が多くの 2 あるいは 3 で割り切れることを意味しており，その様なものの例 ($\neq$ 累乗数) を値の小さい順に列挙すると：

$$a=2,3,6,12,18,24,40,45,48,54,56,63,72,80,96,108,112,\cdots$$

命題 5 の主張にある「実効的に決定可能」とは，その証明法から，不等式 (23) を満たす各 a に対して，'具体的な有限時間' 内 (1 時間以内，24 時間以内，1 年以内，など) に $N=2$ となるすべての組 (b,c) を列挙できることを意味する．またさらに，条件不等式 (23) の左辺の値が a に十分近い (a がとても多くの 2 あるいは 3 で割り切れる) ならば，$N=2$ となる例は存在しないことまで結論できる．よって特に，予想 2 (厳密に言えばその本質的な場合：$\gcd(a,b)=1$) が成立する様な a の具体的な例が無数!!に与えられることになり，前述した論文 [Be] で言及されていた困難さを克服したものとなっている．しかしながら，依然，多くの a の値について予想 2 の扱いは難しいと言わざるをえない．次節で述べる本稿の主結果はこの点に貢献する．

4 主結果

ここでは，前節の後半に引き続いて，方程式 (abc) の最大項 a^x の底数 a の値を固定する場合を考える．主結果は次の通りである ([MiPi3] を参照)．

定理 (宮崎 & Pink)　方程式 (abc) を条件 $\gcd(a,b)=1$ の下で考える．任意に与えられた a に対して，$N(a,b,c)=2$ となる組 (b,c) は高々有限個である．

この定理の利点はもちろん任意の a の値を扱えているところである．結果が一般的である一方，残念ながら (命題 5 で述べた意味で) 実効的ではない．それは証明の過程で部分空間定理 ([Hi] を参照) が使用されているからである (後述)．

方程式 (abc) の研究において，a が素数である場合には，予想 2 の研究は $\gcd(a,b)=1$ の場合に帰着される事が知られている (方程式の両辺を a の適当なベキで割ればよい)．よって上記の定理から直ちに次の結果を得る：

系 1　任意に与えられた素数 a に対して，$N(a,b,c)=2$ となる組 (b,c) は高々有限個である．

さらに，次のことを定理から直ちに導くことができ，それは論文 [BuLu, 7 節] で提起されている問題に貢献する．

系 2　任意に与えられた 1 より大きい自然数 a に対して，方程式

$$a^{x_1}-a^{x_2}=b^{y_1}-b^{y_2}$$

および条件

$$\gcd(b,a)=1,\ x_1\neq x_2,\ a^{x_1}>b^{y_1}$$

を満たす自然数の五つ組み (b,x_1,x_2,y_1,y_2) は高々有限個である．

記号　1 より大きい自然数 M と，M と互いに素な整数 h に対し，h^e の法 M による剰余が 1 または -1 となるような自然数 e の内最小のものを $e_M(h)$ と記す.
※これは法 M の既約剰余類群における乗法位数の自然な一般化である．

定理の証明の主なアイディア
証明の目的から $e_a(b)=e_a(c)$ の場合だけを考えればよいことが分かるので (初等的)，以下その値を E と記すことにする．まず，方程式に二つの解が存在することを仮定する：

$$c+b^y=a^x,\ \ c+b^Y=a^X.$$

一般性を失うことなく $x<X$ かつ $y<Y$ としてよい．この二つの式から，次の整除関係式を導くことができる (初等的)：

$$\text{(div)}\qquad a^x \ \mid\ \gcd(\,b^E\pm 1,\,c^E\pm 1\,)\cdot\Delta.$$

ここで，二つの復号は $\gcd(\cdots)$ が a で割り切れる様に選ばれ，また $\Delta=Y-y$ である. この関係式において，割り切られる方の第二因子 Δ は (指数型) 方程式の解で記述される量なので，Baker 理論によってその大きさは方程式のパラメータ $(=a,b,c)$ の対数値の積として表される上限評価が成される．故に，Δ の大きさは除数 a^x に比べてとても小さいことが期待できる．粗く言うと関係式から Δ は除外して考えていよい．すると，第一因子が除数で割

り切れることになり，これと E の大きさも除数に比べて小さい (高々$\varphi(a)$) ことを合わせて考えると，“b と c が共に a 進的に 1 に近い” ことが結論できる!! この考察が定理の証明の核になる．なぜなら，この事実を踏まえて，Baker 理論の非アルキメデス付値に対する類似法 ([Bu] を参照) を使い，第二方程式の左辺の a 進付値 ($=\nu_a(c+b^Y)$) の上限評価を行うと，非常にシャープなものが得られ，それは X の良い上限評価を与えるのである．以上の様なアイディアは，特別な場合に [MiPi, MiPi2] でも用いられている．
※上記の議論において，法の役割を果たしている a は，その任意の奇素数因子 (以下，p と記す) に置き換える事ができる．ここで，a が 2 のベキである場合には定理が成立することは命題 5 (あるいは Scott [Sc]) によって既に示されている事に注意する．

定理の証明の概略
$M=p^x$ とする．ここで，p は a の奇素数因子である．第二方程式 $c+b^Y=a^X$ の両辺の M 進付値を評価する．先ず，下限として：

$$\nu_M(c+b^Y)=\nu_M(a^X)\geqq \nu_{a^x}(a^X)\geqq \lfloor X/x\rfloor \gg X/x.$$

次に，この上限評価は，関係式 (div) を用いてだいたい次の様になる (この点の詳細は省略する)：

$$\nu_M(c+b^Y)\ll E\,\cdot\,\frac{\log b\,\log c}{\log^4 M}\cdot\Big(\log\,\max\Big\{\frac{\log M}{\log c}\,Y, M\Big\}\Big)^2.$$

ここで，$E=e_p(b)=e_p(c)$. この評価においては $\frac{\log M}{\log c}\,Y\leqq M$ である場合が結局本質的なものであることが分かるので，その場合に，大きさが a だけに依存する定数を省略した形で書くと，

$$\begin{aligned}\nu_M(c+b^Y)&\ll_a \frac{\log b\,\log c}{x^2}\ \ (\because\ p,\,E\ll_a 1)\\&\ll_a \frac{X/Y\,\cdot\,x}{x^2}\ \ (\because\ \log b<\tfrac{X}{Y}\log a,\,\log c<x\log a).\end{aligned}$$

以上の $\nu_M(c+b^Y)$ の下限・上限評価を組み合わせれば，

$$Y\ll_a 1 \qquad \text{(Yu)}$$

が導かれる．最後に，二つの方程式から項 c を消去して得られる式：

$$b^Y-b^y=a^X-a^x$$

について考える．ここで，(Yu) より，a を固定すると y と Y は共に有限になるので，次の命題 6 を用いれば，b,x,X のすべてが有限となり，このことから c も有限となる.（証明終わり）

命題 6 (Bugeaud & Luca, 2006) m と n を $m>n$ である自然数とする．$\mathcal{A}$ を 1 より大きい自然数とする．このとき方程式

$$\mathcal{Z}^m-\mathcal{Z}^n=\mathcal{A}^{x_2}-\mathcal{A}^{x_1}$$

と条件

$$\mathcal{Z} > 1,\ \gcd(\mathcal{Z}, \mathcal{A}) = 1$$

を満たす自然数の三つ組み $(\mathcal{Z}, x_1, x_2)$ は高々有限個である．

命題 6 の証明法は部分空間定理に依存しており実効的ではないが，前述した定理の証明において最後に命題 6 を使う前の全ての過程は実効的である事に注意する．

5 今後の展望

定理を実効的にすることができれば素晴らしい．前述した Bennett [Be] の結果と命題 5 から，次の二条件を満たす a を考えればよい：

$$a \neq \text{フェルマー素数}\ \&\ \max\{\, 2^{\nu_2(a)}, 3^{\nu_3(a)}\,\} \leqq \sqrt{a}.$$

この様なものの例 ($\neq$ 累乗数) を値の小さい順に列挙すると：

$$a = 7, 10, 11, 13, 14, 15, 19, 20, 21, 22, 23, 26, 28, 29, 30, 31, 33, \cdots$$

この各 a に対して，命題 6 (の $\mathcal{A} = a$) の実効化が出来ればよい．しかしながら，前述した様に，その為には部分空間定理の実効化が必要になり難しい．実は命題 6 の証明では部分空間定理は実際には $\mathcal{A}$ が合成数 (かつ $m \geqq 3$, $n = 1$) の場合だけに必要である．故に，特に a が素数ならば，その難しさは回避できて，代わりに次の形の代数的無理数 ξ の良い '制限付き有理近似式' が必要になる：

$$\xi = a^{\frac{1}{m}}, a^{\frac{2}{m}}, \cdots, a^{\frac{m-1}{m}}.$$

ここで，m は定理の証明の Y に対応する．不等式 (Yu) にあるように，m の大きさは a だけに (実効的に) 依存する．さて，前述した「ξ の制限付き有理近似式」とは，Ridout [Rid] の仕事から従う次の命題で扱われる不等式として定義される：

命題 7 (Ridout, 1957) ξ を代数的無理数とする．ε を 1 より小さい正数 1，$\mathcal{S}$ を空でない有限個の素数の集合とする．このとき，ξ, ε および $\mathcal{S}$ に依存する正定数 $\mathcal{C}$ が存在して，不等式

$$(\xi) \qquad \left|\, \xi - \frac{p}{q} \,\right| > \frac{\mathcal{C}}{q^{1+\varepsilon}}$$

が任意の整数 p と $\mathcal{S}$ 内の素数だけを素因子に持つ様な任意の自然数 q に対して成立する．

※この命題もやはり実効的でない，つまり，その証明は $\mathcal{C}$ の存在性のみを保証する．

※※本稿の主定理では，a が素数である場合，$\mathcal{S} = \{a\}$ に対応する (つまり，q は a のベキである)．

(ξ) の様な近似式の $\mathcal{C}$ を明示的に求めることは，一般化された Ramaujan-Nagell 方程式 ([Te] を参照) の研究のために Beukers [Beu] や Bauer と Bennett

[BaBe] が，非常に限られた代数的無理数 (と 1 に近い ε) に対して成功している．本項の主定理の実効化，さらには予想 2 の解決には，彼らの手法を改良し，より多くの代数的無理数に対する近似式 (ξ) の実効的確立が必須になると筆者は考えている．

References

[BaBe] M. Bauer and M.A. Bennett, Applications of the hypergeometric method to the generalized Ramanujan-Nagell equation, *Ramanujan J.* **6** (2002), 209–270.

[Be] M.A. Bennett, 'On some exponential equations of S. S. Pillai', *Canad. J. Math.* **53** (2001), 897–922.

[Be2] ——, 'Pillai's conjecture revisited', *J. Number Theory* **98** (2003), 228–235.

[Beu] F. Beukers, 'On the generalized Ramanujan-Nagell equation I', *Acta Arith.* **38** (1981), 389–410.

[BiBuMi] Y.F. Bilu, Y. Bugeaud, and M. Mignotte, 'The Problem of Catalan', Springer, 2014.

[Bu] Y. Bugeaud, 'Linear forms in two m-adic logarithms and applications to Diophantine problems', *Compositio Math.* **132** (2002), 137–158.

[Bu2] ——, 'Linear forms in logarithms and applications', *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.* vol. 28, European Mathematical Society, 2018.

[BuLu] Y. Bugeaud and F. Luca, 'On Pillai's Diophantine equation', *New York J. Math.* **12** (2006), 193–217.

[Gu] R. Guy, 'Unsolved problems in Number Theory', 3rd ed., *Probl. Books in Math.*, Springer-Verlag, 2004.

[Hi] 平田 典子, '整数解と Schmidt の部分空間定理', 数理解析研究所講究録 **1026** (1998), 89–103.

[Le] M. Le, 'A note on the diophantine equation $ax^m - by^n = k$', *Indag. Math.* **3** (1992), 185–191.

[Lu] F. Luca, 'On the diophantine equation $p^{x_1} - p^{x_2} = q^{y_1} - q^{y_2}$', *Indag. Math. (N.S.)* **14** (2003), 207–222.

[Mi] 宮崎 隆史, 'ある三変数の純指数型不定方程式の解の個数について', 数理解析研究所講究録 **2222** (2022), 212–218.

[MiPi] T. Miyazaki and I. Pink, 'Number of solutions to a special type of unit equations in two unknowns', to appear in Amer. J. Math.

[MiPi2] ——, 'Number of solutions to a special type of unit equations in two unknowns, II', preprint 2022, arXiv:2205.11217 (to appear in Res. Number Theory).

[MiPi3] ——, 'Number of solutions to a special type of unit equations in two unknowns, III', in preparation.

[Pi] S.S. Pillai, 'On the inequality $0 < a^x - b^y \leq n$', *J. Indian Math. Soc.* **19** (1931), 1–11.

[Pi2] ——, 'On $a^x - b^y = c$', *J. Indian Math. Soc. (N.S.)* **2** (1936), 119–122, and 215.

[Ri] P. Ribenboim, 'Catalan's Conjecture: Are 8 and 9 the only Consecutive Powers?' Academic Press Incl., 1994.

[Rid] D. Ridout, Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika* **4** (1957), 125–131.

[Sc] R. Scott, 'On the equations $p^x - b^y = c$ and $a^x + b^y = c^z$', *J. Number Theory* **44** (1993), 153–165.

[ScSt] R. Scott and R. Styer, 'On $p^x - q^y = c$ and related three term exponential Diophantine equations with prime bases', *J. Number Theory* **105** (2004), 212–234.

[ScSt2] ——, 'On the generalized Pillai equation $\pm a^x \pm b^y = c$', *J. Number Theory* **118** (2006), 236–265.

[ScSt3] ——, 'The number of solutions to the generalized Pillai equation $\pm ra^x \pm sb^y = c$', *J. Theor. Nombres Bordeaux* **25** (2013), 179–210.

[ScSt4] ——, 'Bennett's Pillai theorem with fractional bases and negative exponents allowed', *J. Theor. Nombres Bordeaux* **27** (2015), 289–307.

[ShTi] T.N. Shorey and R. Tijdeman, 'Exponential Diophantine Equations', Cambridge University Press, 1986.

[StTi] R.J. Stroeker and R. Tijdeman, 'Diophantine Equations', *Computational Methods in Number Theory, M.C. Tract 155, Centre for Mathematics and Computer Science*, 1982, pp. 321–369.

[Su] M. Sudo, 'On the exponential equations $a^x - b^y = C\,(1 \le C \le 300)$', *J. Fac. Sci. Tech., Seikei Univ.* **42** (2005), 57–62.

[Te] 寺井 伸浩, '指数型不定方程式 $a^x + b^y = c^z$ と $x^2 + b^m = c^n$ の最近の進展について', 第 64 回代数学シンポジウム 報告集.

[Wa] M. Waldschmidt, 'Perfect Powers: Pillai's works and their developments', preprint 2009, arXiv:0908.4031.