Schur 型の多重ポリログ関数の積分表示について

東北大学理学研究科　角野裕太 *
Yuta Kadono
Mathematical Institute, Tohoku University

Abstract

多重ゼータ値と多重ゼータスター値の組合せ論的補間として、Nakasuji-Phuksuwan-Yamasaki [2] によって導入された Schur 多重ゼータ値がある。この Schur 多重ゼータ値には、Jacobi-Trudi 公式と呼ばれる、各成分が多重ゼータ値である行列式を用いた表示が知られている。今回、無理数論で古くから研究されてきた、Beukers 型積分を用いて、反復積分表示とは見かけ上異なる、ribbon 型の Schur 多重ゼータ値の積分表示を与えた。また、その積分を別の方法で級数へ展開することにより、ribbon 型の Schur 多重ゼータ値の Jacobi-Trudi 公式の別証明を与える。

1 Schur 多重ゼータ値

分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ s.t. $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$ に対して、

$$D(\lambda) \coloneqq \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq i \leq r \text{ and } 1 \leq j \leq \lambda_i\}$$

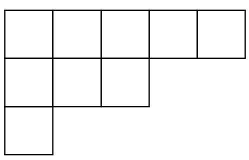
を λ に対応する **Young diagram** と呼び、その全ての **bottom** と **corner** の部分集合をそれぞれ

$$B(\lambda) \coloneqq \{(i, j) \in D(\lambda) \mid (i+1, j) \notin D(\lambda)\},$$
$$C(\lambda) \coloneqq \{(i, j) \in B(\lambda) \mid (i, j+1) \notin B(\lambda)\}$$

と表すことにする。この Young diagram は、**Young 図形**に対応させることができる。例えば、$\lambda = (5, 3, 1)$ に対して、Young diagram は、

$$D(\lambda) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$

であり、対応する Young 図形は



* *E-mail address*: `hebigami.math@gmail.com`

となる。以下では常に、この同一視を用いる。また、集合 X に対して

$$\mathrm{YT}(\lambda,\, X) = \{\boldsymbol{k} = (k_{i,j}) \,|\, (i,\, j) \in D(\lambda) \text{ and } k_{i,\,j} \in X\}$$

を形が λ の X 上の **Young tableaux** と呼び、特に

$$\mathrm{SSYT}(\lambda) \coloneqq \left\{ \boldsymbol{m} = (m_{i,j}) \in \mathrm{YT}(\lambda,\, \mathbb{N}) \,\middle|\, \begin{array}{c} m_{i,j} < m_{i+1,j} \text{ and } m_{i,j} \leq m_{i,j+1} \\ m_{i,j} < m_{i+1,j+1} \end{array} \right\}$$

の元を **semi-standard Young tableaux** と呼ぶ。

次に、 $D(\mu) \subsetneqq D(\lambda)$ を満たす分割 $\lambda,\, \mu$ に対して、

$$D(\lambda/\mu) \coloneqq D(\lambda) \setminus D(\mu)$$

を **skew Young diagram** と呼び、これに対しても、bottoms の集合や Young tableaux などは同様に定義する。本稿では常に、**ribbon** と呼ばれる以下の 2 条件を満たす skew Young diagram に限定して議論する。

- 対応する Young 図形の各箱は、少なくとも 1 個の他の箱に辺で隣接する。
- 田の字型 $\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline\end{array}$ を含まない。

以下では、特に断りが無い限り ν を列の数が c 、行の数が r の ribbon とする。**ribbon 型の Schur 多重ゼータ値**（以下、単に Schur MZVs）は、 $(i,j) \in C(\nu) \implies k_{i,j} > 1$ を満たすインデックス $\boldsymbol{k} \in \mathrm{YT}(\nu, \mathbb{N})$ （以下、収束インデックス）に対して、多重級数

$$\zeta_\nu(\boldsymbol{k}) \coloneqq \sum_{(m_{i,j}) \in \mathrm{SSYT}(\nu)} \prod_{(i,j) \in D(\nu)} \frac{1}{m_{i,j}^{k_{i,j}}},$$

で定義される。特に、

$$\zeta(\boldsymbol{k}) \coloneqq \zeta_\nu\left(\begin{array}{|c|}\hline k_1 \\ \hline \vdots \\ \hline k_r \\ \hline\end{array}\right) = \sum_{0<m_1<\cdots<m_r} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}},$$

$$\zeta^\star(\boldsymbol{k}) \coloneqq \zeta_\nu\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline k_1 & \cdots & k_c \\ \hline\end{array}\right) = \sum_{0<m_1\leq\cdots\leq m_r} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_c^{k_c}}$$

をそれぞれ、**多重ゼータ値**（以下、MZVs）、**多重ゼータスター値**（以下、MZSVs）と呼ぶ。この意味で、Schur MZVs は MZVs と MZSVs の組合せ論的補間である。この Schur MZVs に関して、以下の Jacobi-Trudi 公式が成り立つことが知られている。

定理 1.1 (Jacobi-Trudi 公式 （ribbon ver.）, Nakasuji-Phuksuwan-Yamasaki'18 [2]). 任意の収束インデックス $\boldsymbol{k} \in \mathrm{YT}(\nu,\, \mathbb{N})$ に対して、

$$\zeta_\nu(\boldsymbol{k}) = \det\left[\zeta(a_{j-1},\, a_{j-2},\, \ldots,\, a_{j-(\nu'_i-i+j)})\right]_{1\leq i,\, j\leq s}$$

が成り立つ。ただし、 $a_l = k_{i,i+l}$ で、 $\nu'_i - i + j = 0$ であれば $\zeta(\cdots) = 1$、$\nu'_i - i + j < 0$ であれば $\zeta(\cdots) = 0$ と解釈する。

つまり、Schur MZVs は各成分が 0, 1, もしくは MZVs であるような行列式を用いて表すことができる。例えば、

$$
\zeta_\nu\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline \multicolumn{1}{c|}{} & 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}\right)=\begin{vmatrix}\zeta(4) & \zeta(1,\,3,\,4) & \zeta(2,\,1,\,3,\,4)\\ 1 & \zeta(1,\,3) & \zeta(2,\,1,\,3)\\ 0 & 1 & \zeta(2)\end{vmatrix}
$$

$$
=\zeta(2,1,3,4)-\zeta(4)\zeta(2,1,3)-\zeta(1,3,4)\zeta(2)+\zeta(4)\zeta(1,3)\zeta(2)
$$

が成り立つ。

また、通常の MZVs と同様に Schur MZVs に対応する **ribbon 型の Schur 多重ポリログ関数**（以下、単に Schur MPLs、cf. [1]）をインデックス $\boldsymbol{k}\in\mathrm{YT}(\nu,\mathbb{N})$ に対して、

$$
\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z}) \coloneqq \sum_{(m_{i,j})\in\mathrm{SSYT}(\nu)}\ \prod_{(i,j)\in D(\nu)} \frac{z_{i,j}^{m_{i,j}}}{m_{i,j}^{k_{i,j}}},
$$

で定義する。ただし、$\boldsymbol{z}=(z_{i,j})\in\mathrm{YT}(\nu,\,\mathbb{C})$ with $|z_{i,j}|<1$ である。定義から、 $\boldsymbol{k}$ が収束インデックスであれば、 $\boldsymbol{z}$ の全ての成分を 1 に近づける極限 $\boldsymbol{z}\to\boldsymbol{1}$ を考えると、Schur MPLs は Schur MZVs となる。

2　Beukers 型の積分と多重ゼータスター値の積分表示

1978 年に Apéry は、$\zeta(3)$ が無理数であることを示した。翌年、Beukers は 単位立方領域上の積分を用いて、$\zeta(3)$ が無理数であることを再証明した。この Beukers による証明を、他の奇数点でのリーマンゼータ値の無理数性の証明へ拡張する試みが数多く行われてきた。中でも、Vasilenko は任意の自然数 $n\in\mathbb{N}$ と非負整数 $\sigma\in\mathbb{N}_0$ に対して、多重積分

$$
V_n(\sigma)=\int_{[0,1]^n}\frac{\prod_{i=1}^n x_i^\sigma(1-x_i)^\sigma}{(1-x_1+x_1x_2-\cdots+(-1)^n x_1x_2\cdots x_n)^{\sigma+1}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n
$$

を定義し、以下の式が成り立つことを示した（see [3]）。

- $V_3(0)=2\zeta(3),\ V_5(0)=2\zeta(5)$
- $V_{2k}(0)\in\big\langle\zeta(2),\,\zeta(4),\,\ldots,\,\zeta(2k)\big\rangle_{\mathbb{Q}}$

さらに、Vasil'ev は $V_n(0)$ の母関数を考察することで、以下の定理を示した。

定理 2.1 (Vasil'ev [4])**.** 任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して、

$$
V_{2k}(0)=2(1-2^{1-2k})\zeta(2k),\ V_{2k+1}(0)=2\zeta(2k+1)
$$

が成り立つ。

その後、Zlobin は漸化式

$$
Q_0=1,\ Q_j=1-x_{w_{j-1}+2}\cdots x_{w_j}(1-x_{w_{j-1}+1}Q_{j-1})
$$

によって定義される多項式 Q_j を被積分関数に持つ多次元平方領域上の積分

$$Z_0^{(\sigma)}(\boldsymbol{k}) \coloneqq 1,\ Z_j^{(\sigma)}(\boldsymbol{k}) \coloneqq \int_{[0,1]^{w_j}} \frac{(1-Q_j)^\sigma}{Q_j} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{w_j}.$$

が MZSVs の積分表示 $\zeta(k_1,\, \dots,\, k_c) = Z_c^{(0)}(k_1,\, \dots,\, k_c)$ を与えることを示した（see [3]）。ここで、 $w_j \coloneqq k_1 + \cdots + k_j$ である。今回、この Zlobin の積分 $Z_j^{(\sigma)}(\boldsymbol{k})$ を参考に、Schur MPLs の積分表示を導入した。

3 主定理

漸化式

$$\begin{aligned}
&a_{r+1,1} \coloneqq 1,\\
&\quad a_{r,1} \coloneqq a_{r,1}(\boldsymbol{z},\, \boldsymbol{x}) = 1 - z_{r,1} x_{r,1,1} \cdots x_{r,1,k_{r,1}},\\
&\quad a_{i,j} \coloneqq a_{i,j}(\boldsymbol{z},\, \boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 - z_{i,j}(1 - a_{i+1,j}) x_{i,j,1} \cdots x_{i,j,k_{i,j}}, & (i+1,j) \in D(\nu) \\ \\ 1 - z_{i,j}(1 - x_{i,j,1}\, a_{i,j-1}) x_{i,j,2} \cdots x_{i,j,k_{i,j}}, & (i,j-1) \in D(\nu) \end{cases}
\end{aligned}$$

によって多項式 $a_{i,j}$ を定義する。ただし、各 (i,j) に対して、 $z_{i.j}$ は $|z_{i.j}| < 1$ を満たす複素変数である。この $a_{i,j}$ に対して、多重積分

$$\begin{aligned}
&I_{r+1,1}^{(\sigma)}(\boldsymbol{k};\, \boldsymbol{z}) \coloneqq 1,\\
&\quad I_{i,j}^{(\sigma)}(\boldsymbol{k};\, \boldsymbol{z}) \coloneqq \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{(1-a_{i,j})^\sigma}{a_{i,j}} \prod_{\substack{(p,q) \in D_{i,j}(\nu) \\ (p,q) \notin B(\nu)}} \left(\frac{1 - a_{p+1,q}}{a_{p+1,q}} \right) \prod_{(p,q) \in D_{i,j}(\nu)} \mathrm{d}x_{p,q}
\end{aligned}$$

を考える。ただし、 $(i,j) \in D(\nu)$ に対して、 $D_{i,j}(\nu) = \{(p,q) \in D(\nu) \,|\, i \le p \le r,\ 1 \le q \le j\}$ とする。この時、主定理は以下である。

定理 3.1 (Schur MPLs の Beukers 型の積分表示)**.** 任意の $\boldsymbol{k} \in \mathrm{YT}(\nu, \mathbb{N})$ と $\boldsymbol{z} \in \mathrm{YT}(\nu, \mathbb{C})$, with $|z_{i.j}| < 1$ に対して、

$$I_{i,j}^{(0)}(\boldsymbol{k};\, \boldsymbol{z}) = \mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z}) \prod_{(i,j) \in D(\nu)} \frac{1}{z_{i,j}}$$

が成り立つ。

この定理において、収束インデックス $\boldsymbol{k}$ に対して、辺々 $\boldsymbol{z} \to \boldsymbol{1}$ の極限を考えると Schur MZVs に対する積分表示が得られる。さらに、1 列のみもしくは 1 行のみの ribbon ν に特殊化すると、Zlobin の結果を含む既存の結果が得られる。また、上記の積分を定理 3.1 とは異なる方法で級数へ展開することにより 2 つ目の主定理を得る。

定理 3.2. 任意の $\boldsymbol{k} \in \mathrm{YT}(\nu, \mathbb{N})$ と $\boldsymbol{z} \in \mathrm{YT}(\nu, \mathbb{C})$, with $|z_{i.j}| < 1$ に対して、

$$I_{1,c}^{(0)}(\boldsymbol{k};\, \boldsymbol{z}) = \prod_{(p,q) \in D(\lambda)} \frac{1}{z_{p,q}} \sum_{i=0}^{c-1} (-1)^{c+i-1} \sum_{0 = j_0 < j_1 < \cdots < j_i < j_{i+1} = c}$$

$$\times \prod_{l=0}^{i} \mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}_{j_{l+1}},\ldots,\boldsymbol{k}_{j_l+1}}(\boldsymbol{z}_{j_{l+1}},\ldots,\boldsymbol{z}_{j_l+1}) \tag{3.1}$$

が成り立つ。ただし $\boldsymbol{k}_j \coloneqq (k_{r_j,j},\, \ldots,\, k_{r_{j+1},j})$, $\boldsymbol{z}_j \coloneqq (z_{r_j,j},\, \ldots,\, z_{r_{j+1},j})$ とおいた。

この定理も、収束インデックス $\boldsymbol{k}$ に対して、辺々 $\boldsymbol{z} \to \mathbf{1}$ の極限を考えることができる。また、式 (3.1) の右辺は、Jacobi-Trudi 公式の行列式の余因子展開と等価であることが示せる。よって、定理 3.1 と合わせると ribbon 型の Schur MZVs に対する Jacobi-Trudi 公式の別証明が得られる。

注意 3.3. 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 Henrik Bachmann 先生から、Schur MPLs にも Jacobi-Trudi 公式が成り立つことがすぐにわかるので、定理 3.2 は定理 3.1 から直接導出できることのご指摘をいただいた。

謝辞

2023 年度 RIMS 共同研究（公開型）「解析的整数論とその周辺」での講演機会をくださいました研究代表者の安福 悠 先生（日本大学)、研究副代表者の中筋 麻貴 先生 (上智大学／東北大学) に心より感謝申し上げます。

References

[1] Y. Baba, *Study on multiple poly-bernoulli numbers*, 上智大学大学院理工学研究科修士論文, (2023).

[2] M. Nakasuji, O. Phuksuwan, and Y. Yamasaki, *On Schur multiple zeta functions: a combinatoric generalization of multiple zeta functions*, Adv. Math., 333 (2018), pp. 570–619.

[3] С. А. Злобин (S. A. Zlobin), *Кратные интегралы и обобщенные полилогарифмы*, PhD thesis, Ломоносов Мосцощ Стате Университы, 2005.

[4] D. V. Vasil'ev, *Some formulas for the Riemann zeta function at integer points*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., (1996), pp. 81–84.