佐久川・関の関数等式とコンセビッチの関数等式のコネクターによる新証明

A new proof of Sakugawa–Seki's and Kontsevich's functional equations via a connector

関 真一朗 (青山学院大学 理工学部)
Shin-ichiro Seki (Aoyama Gakuin University)

1　イントロダクション

この報告記事では, 2023 年 10 月 13 日に筆者が行った講演に基づいて, 準備中の論文 [KMS2](川村花道氏と前阪拓巳氏との共同研究) に記載予定の内容の一部を解説する.

扱われる主要な研究対象は**有限多重ポリログ**である. リーマンゼータ値の一般化である多重ゼータ値とポリログを更に同時に一般化した多重ポリログとよばれる研究対象がある. 一方で, 近年これらの「有限類似」とよばれる対象が研究されるようになっており, 金子・ザギエの有限多重ゼータ値 (論文は未発表) とエルバズ-ヴィンセント・ガングル ([EVG]) の有限ポリログの同時一般化としての佐久川・関の有限多重ポリログ ([SS]) が定義・研究されていて, これのことである.

また, ある種の等式の証明手法として**連結和法**とよばれるものがある. これは関・山本 ([SY1]) によって導入された手法であり, [S] に解説がある. **コネクター**とよばれる部品を使って定義される**連結和**を用いることが特徴の 1 つである.

本記事の内容は有限多重ポリログに関する佐久川・関の関数等式とコンセビッチの関数等式とよばれる 2 種類の既知の関数等式について, 新しいコネクターによる新証明を与えるというものである. これらの関数等式を筆者は異なる種類のものだろうと感じていたので, 今回同時証明が得られたことは, いささか驚きであった.

2　記法

2.1　環 $\mathcal{A}$ とその類似物

$\mathcal{P}$ を素数全体の集合とする. 可換環 R に対して, 環 $\mathcal{A}_R$ を

$$\mathcal{A}_R \coloneqq \left(\prod_{p\in\mathcal{P}} R/pR\right) \Big/ \left(\bigoplus_{p\in\mathcal{P}} R/pR\right)$$

で定義する. 誤解の恐れがない場合は $\mathcal{A}_R$ の元を $\prod_{p\in\mathcal{P}} R/pR$ における代表元で表示することがある. また, $\mathcal{A} \coloneqq \mathcal{A}_{\mathbb{Z}}$ と略記する.

2.2 インデックスの記法

正整数の組 $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_r)$ を**インデックス**とよぶ. また, $k_r \geq 2$ を満たすインデックスを**許容インデックス**とよぶ. r を $\boldsymbol{k}$ の**深さ**とよび $\mathrm{dep}(\boldsymbol{k})$ で表し, $k_1 + \cdots + k_r$ を $\boldsymbol{k}$ の**重さ**とよび $\mathrm{wt}(\boldsymbol{k})$ で表す. 空集合も許容インデックスに含め, **空インデックス**とよび, $\varnothing$ と記す. $\mathrm{dep}(\varnothing) = \mathrm{wt}(\varnothing) = 0$ とする. 2 つのインデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_r)$, $\boldsymbol{l} = (l_1, \dots, l_s)$ に対して, $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{l}$ の結合 $\boldsymbol{k} \sqcup \boldsymbol{l}$ を $\boldsymbol{k} \sqcup \boldsymbol{l} \coloneqq (k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s)$ で定める. $\boldsymbol{k} \sqcup \varnothing = \boldsymbol{k}$, $\varnothing \sqcup \boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}$ である. また, インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \dots, k_{r-1}, k_r)$ に対して, その**反転インデックス** $\overleftarrow{\boldsymbol{k}}$ を $\overleftarrow{\boldsymbol{k}} \coloneqq (k_r, k_{r-1}, \dots, k_2, k_1)$ で定める. また, 矢印記号を ${}_{\uparrow}\boldsymbol{k} \coloneqq (k_1 + 1, k_2, \dots, k_r)$, ${}_{\leftarrow}\boldsymbol{k} \coloneqq (1) \sqcup \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}_{\uparrow} \coloneqq (k_1, \dots, k_{r-1}, k_r + 1)$, $\boldsymbol{k}_{\rightarrow} \coloneqq \boldsymbol{k} \sqcup (1)$ とそれぞれ定める. ただし, 縦向きの矢印がつくときは原則 $\boldsymbol{k} \neq \varnothing$ とするが, $\varnothing_{\uparrow} \coloneqq \varnothing$ として等式が成立する場合もある. $\{1\}^m$ は 1 を m 個繰り返したものの略記とする. $a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_s$ が正整数であり $\boldsymbol{k} = (\{1\}^{a_1-1}, b_1 + 1, \dots, \{1\}^{a_s-1}, b_s + 1)$ と表示されるとき, その**双対インデックス** $\boldsymbol{k}^{\dagger}$ を $\boldsymbol{k}^{\dagger} \coloneqq (\{1\}^{b_s-1}, a_s + 1, \dots, \{1\}^{b_1-1}, a_1 + 1)$ と定義する. また, $\boldsymbol{k} = (\{1\}^{a_1-1}, b_1 + 1, \dots, \{1\}^{a_{s-1}-1}, b_{s-1} + 1, \{1\}^{a_s-1}, b_s)$ と表示されるとき, その**ホフマン双対インデックス** $\boldsymbol{k}^{\vee}$ を $\boldsymbol{k}^{\vee} \coloneqq (a_1, \{1\}^{b_1-1}, a_2 + 1, \{1\}^{b_2-1}, \dots, a_s + 1, \{1\}^{b_s-1})$ と定義する.

2.3 不定元について

不定元 v に対して, $v^0 \coloneqq 1$ と定める. また, $v^{\boldsymbol{p}} \coloneqq (v^p \bmod p)_{p\in\mathcal{P}} \in \mathcal{A}_{\mathbb{Z}[v]}$. 不定元の組 $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_r)$ に対して, $\overleftarrow{\boldsymbol{z}} \coloneqq (z_r, \dots, z_1)$ とする. また, $\mathbb{Z}[\boldsymbol{z}]$ は多変数多項式環 $\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_r]$ を意味する (他の係数環でも同様). $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_s)$ をもう 1 つの不定元の組とするとき, $\boldsymbol{z} \sqcup \boldsymbol{w} \coloneqq (z_1, \dots, z_r, w_1, \dots, w_s)$ とする. また, $\mathbb{Z}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}] \coloneqq \mathbb{Z}[\boldsymbol{z} \sqcup \boldsymbol{w}]$. 代入を行っていない状態の, 複数の不定元の組が現れる主張においては, 全ての不定元が相異なるものとする. $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_r)$ と深さ r のインデックス $\boldsymbol{k}$ の組 $\binom{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{k}}$ を扱うが, v が不定元であるとき,

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{z}\\ \boldsymbol{k}\end{pmatrix}_{\xrightarrow{v}} \coloneqq \begin{pmatrix}\boldsymbol{z} \sqcup (v)\\ \boldsymbol{k}_{\rightarrow}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\boldsymbol{z}\\ \boldsymbol{k}\end{pmatrix}_{\uparrow} \coloneqq \begin{pmatrix}\boldsymbol{z}\\ \boldsymbol{k}_{\uparrow}\end{pmatrix}$$

と定める. ただし, $\xrightarrow{1}$ は $\rightarrow$ と略記する. 目的に応じて変数には代入を行ってよい. 代入を問題なく行うための十分条件は気にする必要があるが, ここでは割愛する.

3 コンセビッチ の関数等式

v を不定元とし, k, N を正整数とする.

$$\pounds_{N,k}(v) \coloneqq \sum_{m=1}^{N} \frac{v^m}{m^k}$$

とし, $\pounds_{\mathcal{A},k}(v) := (\pounds_{p-1,k}(v) \bmod p)_{p\in\mathcal{P}} \in \mathcal{A}_{\mathbb{Z}[v]}$ を**有限ポリログ**とよぶ. $\pounds_{\mathcal{A}}(v) := \pounds_{\mathcal{A},1}(v)$ と略記する. これは, 彼は $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}[v]}$ の元としては定式化してはいないが, コンセビッチが "$1\frac{1}{2}$-logarithm" とよんでいるものである. その後の一般化された対象と比較すると, **有限対数**とよんでよいと思われるが, 以下に紹介するように通常の対数とは異なる関数等式を満たす. (一方で, 通常の対数法則を満たすような写像 $\log_{\mathcal{A}}\colon \mathbb{Q}^{\times} \to \mathcal{A}$ もあって, そちらの方が有限対数という名称が相応しい可能性はあるが, この記事ではこれ以降 $\log_{\mathcal{A}}$ は現れない.) 彼が観察した $1\frac{1}{2}$-logarithm の基本関数等式は以下の 3 つである.

Theorem 3.1 (コンセビッチ [K])**.** v, w を不定元とする. このとき, 以下の関数等式が成立する:

$$\pounds_{\mathcal{A}}(v) = \pounds_{\mathcal{A}}(1-v), \tag{3.1}$$

$$\pounds_{\mathcal{A}}(v) - \pounds_{\mathcal{A}}(w) + v^{\boldsymbol{p}}\pounds_{\mathcal{A}}\left(\frac{w}{v}\right) + (1-v)^{\boldsymbol{p}}\pounds_{\mathcal{A}}\left(\frac{1-w}{1-v}\right) = 0, \tag{3.2}$$

$$\pounds_{\mathcal{A}}(v) = -v^{\boldsymbol{p}}\pounds_{\mathcal{A}}\left(\frac{1}{v}\right). \tag{3.3}$$

特に, 4 項関係式 (3.2) が重要である. (3.1) と (3.3) を用いると, (3.2) は

$$\pounds_{\mathcal{A}}(v) + (1-v)^{\boldsymbol{p}}\pounds_{\mathcal{A}}\left(\frac{w}{1-v}\right) = \pounds_{\mathcal{A}}(w) + (1-w)^{\boldsymbol{p}}\pounds_{\mathcal{A}}\left(\frac{v}{1-w}\right) \tag{3.4}$$

と書き直すことができる ([EVG, (8.2)]). これは "generalized fundamental equation of information theory" とよばれる等式と同じ形をしている.

コンセビッチは有限二重対数 $\pounds_{\mathcal{A},2}$ に関する関数等式を見つけることを問題として提出したが, エルバズ-ヴィンセントとガングルが [EVG] において $\pounds_{\mathcal{A},2}$ の 3 変数 22 項関係式を与えている.

4 佐久川・関の関数等式

r を正整数, $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_r)$ を不定元の組, $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_r)$ をインデックスとする. 正整数 N に対して,

$$\pounds^{ш,\star}_{N,\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z}) := \sum_{1\le m_1\le\cdots\le m_r\le N} \frac{z_1^{m_1} z_2^{m_2-m_1}\cdots z_r^{m_r-m_{r-1}}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}$$

と定める. 素数 p に対して, $\pounds^{ш,\star}_{p-1,\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z}) \in \mathbb{Z}_{(p)}[\boldsymbol{z}]$ であり, **有限多重ポリログ** $\pounds^{ш,\star}_{\mathcal{A},\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z}) \in \mathcal{A}_{\mathbb{Z}[\boldsymbol{z}]}$ を

$$\pounds^{ш,\star}_{\mathcal{A},\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z}) := \left(\pounds^{ш,\star}_{p-1,\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z}) \bmod p\right)_p$$

と定義する ([SS]). 冒頭で述べた「佐久川・関の関数等式」は次の定理を指す:

Theorem 4.1 (佐久川・関 [SS, Corollary 3.13])**.** r を正整数とする. $\boldsymbol{l}_1, \dots, \boldsymbol{l}_r$ をインデックスとし, $l_1 := \mathrm{dep}(\boldsymbol{l}_1), \dots, l_r := \mathrm{dep}(\boldsymbol{l}_r)$, $l'_1 := \mathrm{dep}(\boldsymbol{l}_1^{\vee}), \dots, l'_r := \mathrm{dep}(\boldsymbol{l}_r^{\vee})$ とする.

$\boldsymbol{k} \coloneqq \boldsymbol{l}_1 \sqcup \cdots \sqcup \boldsymbol{l}_r$ および $\boldsymbol{k}' \coloneqq \boldsymbol{l}_1^\vee \sqcup \cdots \sqcup \boldsymbol{l}_r^\vee$ とおく．また, $z_1, \ldots, z_r$ を不定元とする．このとき,

$$\pounds^{ш,\star}_{\mathcal{A},\boldsymbol{k}}(z_1, \{1\}^{l_1-1}, \ldots, z_r, \{1\}^{l_r-1}) = \pounds^{ш,\star}_{\mathcal{A},\boldsymbol{k}'}(1-z_1, \{1\}^{l'_1-1}, \ldots, 1-z_r, \{1\}^{l'_r-1}) - \pounds^{ш,\star}_{\mathcal{A},\boldsymbol{k}'}(\{1\}^{l'_1}, 1-z_2, \{1\}^{l'_2-1}, \ldots, 1-z_r, \{1\}^{l'_r-1})$$

が成り立つ．

5 連結和法とは?

詳しくは [S] を参照していただくことにして, ここには「気持ち」のみを書くこととする．

連結和法は等式 (の族) を証明するための 1 つの手法である．多重ゼータ値の関係式族の証明に用いることができるが, 次節におけるホフマンの恒等式などもそうであるが, 多重ゼータ値に限定される手法というわけではない[1]．例えば「$A = B$」という形の等式を示したいとき, A や B は多重ゼータ値である必要はないが, 「重さ」のような自然数値を伴っている状況が望まれる．A と B はある種の「重さ」を伴っており, どちらも k であるとしよう．このとき, 各 $0 \le i \le k$ に対して, 連結和とよばれる $C(i)$ を導入する．$C(i)$ は Aっぽさと Bっぽさを併せ持った対象であり, その比率は $k-i:i$ である．また, Aっぽい部分と Bっぽい部分を単純に掛け合わせるだけでは駄目で, 「コネクター」とよばれる因子によってうまくくっつける必要がある．そうすると, Aっぽい部分を順次, B 側に「輸送」していくことができ,

$$A = C(0) = C(1) = C(2) = \cdots = C(k-1) = C(k) = B$$

という形で, 所望の「$A = B$」が示されることになる．要は, 元々ある等式を示したかったわけであるが, それをより単純な等式「$C(i) = C(i+1)$」に分割する手法というわけだ．分割された等式は複数あるが, 一律に扱うことによって普通は 1, 2 個の計算に帰着されるので, 既知の証明と比べてより単純な別証明が得られることも多い．ちなみに「$A = C(0)$」の部分と「$C(k) = B$」の部分は定義から明らかな場合もあれば, 若干の計算を伴って確認する必要がある場合もあって, 「境界条件」とよんでいる．「コネクター」はどうやって見つけるかというと, 所望される輸送関係式から逆算で求めればよい[2]．

6 ホフマンの恒等式の連結和法による証明

$\zeta^\star_N(\boldsymbol{k}) \coloneqq \pounds^{ш,\star}_{N,\boldsymbol{k}}(\{1\}^{\mathrm{dep}(\boldsymbol{k})})$, $\zeta^\star_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}) \coloneqq \pounds^{ш,\star}_{\mathcal{A},\boldsymbol{k}}(\{1\}^{\mathrm{dep}(\boldsymbol{k})})$ とおく．$\zeta^\star_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k})$ を**有限多重ゼータスター値**とよび, 有限多重ゼータ値の線形和で表すことができる．佐久川・関の関数等式において $r = 1$, $z_1 = 1$ の場合を考えて得られる有限多重ゼータ値の間の関係式

$$\zeta^\star_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}) = -\zeta^\star_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}^\vee)$$

[1] また, 級数表示を持つものが扱われることが多いが, 考え方自体は級数に限定されるわけでもなく, 例えば積分であってもよい．ただ, その場合は「連結和」の名称は「連結積分」が相応しいかもしれない．

[2] ただ, この部分は私が書いてきた文献では全て隠してしまっているので, 誰か求め方をまとめてくださると嬉しいです．

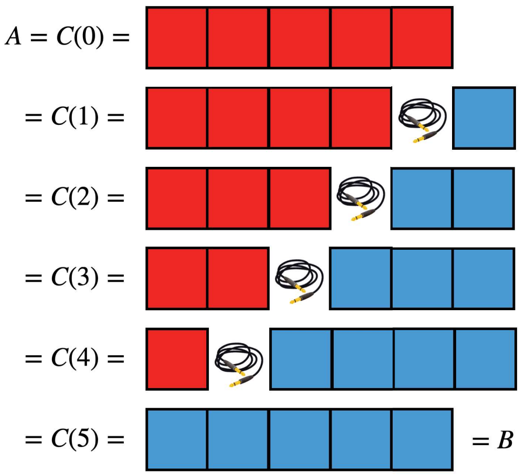

図 1: $k=5$ の場合の連結和法のイメージ

を**ホフマン双対関係式**とよぶ ([H, Theorem 4.6]). この関係式の典型的な証明は**ホフマンの恒等式**とよばれる恒等式をまず示し, その後に $\bmod p$ をとるという流れである. そして, ホフマンの恒等式の証明は現在までに複数知られているが, その中の 1 つに関・山本による連結和法を用いた証明がある ([SY2]). 本記事のメインとなるコネクターと対比するためにも, ここで彼らの証明を簡単に復習しておきたい.

N を正の整数とし, $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ と $\boldsymbol{l}=(l_1,\dots,l_s)$ をインデックスとする. ただし, $\boldsymbol{k}\neq\varnothing$. このとき, 連結和 $Z_N(\boldsymbol{k};\boldsymbol{l})$ を

$$Z_N(\boldsymbol{k};\boldsymbol{l}) \coloneqq \sum_{1\le m_1\le\cdots\le m_r\le n_1\le\cdots\le n_s\le n_{s+1}=N} \left[m_r \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{m_i^{k_i}} \right] \cdot C(m_r,n_1) \cdot \left[\prod_{j=1}^{s} \frac{1}{n_j^{l_j}} \right]$$

と定義する ($s=0$ のときは $\prod_{j=1}^{s} 1/n_j^{l_j}=1$ と読む). ここで, 正整数 m, n に対して, コネクター $C(m,n)$ は

$$C(m,n) \coloneqq (-1)^{m-1}\binom{n}{m}$$

と定義される. このとき, 望遠鏡和のテクニックによって輸送関係式

$$\begin{aligned} Z_N(\boldsymbol{k}_{\uparrow};\boldsymbol{l}) &= Z_N(\boldsymbol{k};{}_{\leftarrow}\boldsymbol{l}), \\ Z_N(\boldsymbol{k}_{\rightarrow};\boldsymbol{l}) &= Z_N(\boldsymbol{k};{}_{\uparrow}\boldsymbol{l}) \qquad (\boldsymbol{l}\neq\varnothing) \end{aligned}$$

が証明できる. これを繰り返し用いてインデックスを重さ 1 ずつ左から右へ輸送していくことにより,

$$Z_N(\boldsymbol{k}_{\uparrow};\varnothing) = \cdots = Z_N((1);\boldsymbol{k}^{\vee})$$

と変形できる. 境界条件として, インデックス $\boldsymbol{k}$ に対して

$$Z_N((1);\boldsymbol{k}) = \zeta_N^{\star}(\boldsymbol{k})$$

が成り立つので, 恒等式

$$Z_N(\boldsymbol{k}_\uparrow;\varnothing)=\zeta_N^\star(\boldsymbol{k}^\vee)$$

が示されたことになるが, これがホフマンの恒等式である. 素数 p に対して

$$Z_{p-1}(\boldsymbol{k}_\uparrow;\varnothing)\equiv-\zeta_{p-1}^\star(\boldsymbol{k}) \pmod p$$

が成り立つため, ホフマン双対関係式が得られる.

7 新コネクター

有限多重ゼータスター値は反転公式 [H, Theorem 4.5]

$$\zeta_{\mathcal{A}}^\star(\boldsymbol{k})=(-1)^{\mathrm{wt}(\boldsymbol{k})}\zeta_{\mathcal{A}}^\star(\overleftarrow{\boldsymbol{k}})$$

を満たすため, ホフマン双対関係式は以下の関係式と同値であることに注意する:

$$\zeta_{\mathcal{A}}^\star(\boldsymbol{k})=(-1)^{\mathrm{wt}(\boldsymbol{k})-1}\zeta_{\mathcal{A}}^\star(\overleftarrow{\boldsymbol{k}^\vee}). \tag{7.1}$$

実は関・山本とは異なるコネクター

$$D(m,n)\coloneqq\frac{(m+n-1!)}{(m-1)!(n-1)!}$$

を用いて (m, n は正整数), 以下のように連結和法で (7.1) を直接的に証明することができる. インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$, $\boldsymbol{l}=(l_1,\dots,l_s)$ に対して, 連結和 $M_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{l})\in\mathcal{A}$ を

$$\left(\sum_{\substack{1=m_0\le m_1\le\cdots\le m_r\le p-1\\1=n_0\le n_1\le\cdots\le n_s\le p-1}}\left[\prod_{i=1}^r\frac{1}{m_i^{k_i}}\right]\cdot\left[\prod_{j=1}^s\frac{1}{n_j^{l_j}}\right]\cdot D(m_r,n_s)\bmod p\right)_{p\in\mathcal{P}}$$

の属する剰余類と定める. すると, 輸送関係式

$$M_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}_\uparrow;\boldsymbol{l})=-M_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{l}_\rightarrow),$$
$$M_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}_\rightarrow;\boldsymbol{l})=-M_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{l}_\uparrow)$$

を証明できる. これを繰り返し用いてインデックスを重さ 1 ずつ左から右へ輸送していくことにより, 許容インデックス $\boldsymbol{k}$ に対して

$$M_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k};\varnothing)=\cdots=(-1)^{\mathrm{wt}(\boldsymbol{k})}M_{\mathcal{A}}(\varnothing;\boldsymbol{k}^\dagger) \tag{7.2}$$

と変形できる. 空でないインデックス $\boldsymbol{k}$ に対して, 境界条件

$$M_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}_\uparrow;\varnothing)=M_{\mathcal{A}}(\varnothing;\boldsymbol{k}_\uparrow)=\zeta_{\mathcal{A}}^\star(\boldsymbol{k})$$

が成り立ち, $\dagger$ と $\vee$ の間に $(\boldsymbol{k}_\uparrow)^\dagger=(\overleftarrow{\boldsymbol{k}^\vee})_\uparrow$ という関係があるため, (7.2) は (7.1) を導くことがわかる.

関•山本によるホフマンの恒等式の証明は, 和の範囲に関する変数 $m_1,\dots,m_r$ と $n_1,\dots,n_s$ について, 最大値 m_r と最小値 n_1 を繋ぐ連結和を用いるものであったのに対し, 本節における別証明で用いた連結和は最大値 m_r と最大値 n_s を繋ぐものである. この繋ぎ方は, 通常の多重ゼータ値の双対関係式 $\zeta(\boldsymbol{k})=\zeta(\boldsymbol{k}^\dagger)$ の連結和を用いた証明 ([SY1]) と同じである (コネクターは異なる).

8　定理 1 と定理 2 の同時証明

多重ゼータ値の双対関係式の連結和法による証明を自然に拡張することによって多重ポリログの双対関係式の新証明 ([KMS1]) が得られたのと同様に, 前節の証明を自然に拡張することによって, 佐久川・関の関数等式の新証明を与える.

r, s を非負整数, $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_r)$ および $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_s)$ を不定元の組, $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$, $\boldsymbol{l} = (l_1, \ldots, l_s)$ をインデックスとする. このとき, 連結和 $M_{\mathcal{A}}\binom{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{k}}; \binom{\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{l}}) \in \mathcal{A}_{\mathbb{Z}[\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}]}$ を

$$\left(\sum_{\substack{1=m_0 \le m_1 \le \cdots \le m_r \le p-1 \\ 1=n_0 \le n_1 \le \cdots \le n_s \le p-1}} \left[\prod_{i=1}^{r} \frac{z_i^{k_i - k_{i-1}}}{m_i^{k_i}} \right] \cdot \left[\prod_{j=1}^{s} \frac{w_j^{l_i - l_{j-1}}}{n_j^{l_j}} \right] \cdot D(m_r, n_s) \bmod p \right)_{p \in \mathcal{P}}$$

の属する剰余類と定める ($k_0 = l_0 = 1$ とする). すると, 輸送関係式

$$M_{\mathcal{A}} \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{k}_1 \end{pmatrix}_{\xrightarrow{v}} ; \begin{matrix} \boldsymbol{z}_2 \\ \boldsymbol{k}_2 \end{matrix} \right) = -M_{\mathcal{A}} \left(\begin{matrix} \boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{k}_1 \end{matrix} ; \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_2 \\ \boldsymbol{k}_2 \end{pmatrix}_{\xrightarrow{1-v}} \right)$$

が成り立つ. ここで, $\boldsymbol{z}_1$ が r 個の不定元の組で, $\boldsymbol{z}_2$ が s 個の不定元の組であるとき, $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$ はそれぞれ $\mathrm{dep}(\boldsymbol{k}_1) = r$, $\mathrm{dep}(\boldsymbol{k}_2) = s$ を満たすインデックスであり, v は不定元である. 特に, v に 0 または 1 を代入することにより

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{A}} \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{k}_1 \end{pmatrix}_{\uparrow} ; \begin{matrix} \boldsymbol{z}_2 \\ \boldsymbol{k}_2 \end{matrix} \right) &= -M_{\mathcal{A}} \left(\begin{matrix} \boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{k}_1 \end{matrix} ; \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_2 \\ \boldsymbol{k}_2 \end{pmatrix}_{\rightarrow} \right), \\ M_{\mathcal{A}} \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{k}_1 \end{pmatrix}_{\rightarrow} ; \begin{matrix} \boldsymbol{z}_2 \\ \boldsymbol{k}_2 \end{matrix} \right) &= -M_{\mathcal{A}} \left(\begin{matrix} \boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{k}_1 \end{matrix} ; \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_2 \\ \boldsymbol{k}_2 \end{pmatrix}_{\uparrow} \right) \end{aligned} \tag{8.1}$$

の成立がわかる. これらを繰り返し用いてインデックスを重さ 1 ずつ左から右へ輸送していくことにより, 定理 4.1 の記号のもと, $\boldsymbol{z} := (z_1, \{1\}^{l_1 - 1}, \ldots, z_r, \{1\}^{l_r - 1})$, $\boldsymbol{z}' := (1 - z_1, \{1\}^{l'_1 - 1}, \ldots, 1 - z_r, \{1\}^{l'_r - 1})$ として,

$$M_{\mathcal{A}} \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix}_{\uparrow} ; \begin{matrix} \varnothing \\ \varnothing \end{matrix} \right) = \cdots = (-1)^{\mathrm{wt}(\boldsymbol{k})+1} M_{\mathcal{A}} \left(\begin{matrix} \varnothing \\ \varnothing \end{matrix} ; \begin{matrix} (1) \sqcup \overleftarrow{\boldsymbol{z}'} \\ \overleftarrow{\boldsymbol{k}'}_{\rightarrow} \end{matrix} \right) \tag{8.2}$$

と変形されることが確認できる. また, 境界条件として

$$M_{\mathcal{A}} \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix}_{\uparrow} ; \begin{matrix} \varnothing \\ \varnothing \end{matrix} \right) = \frac{1}{z_1} \pounds^{\text{ш},\star}_{\mathcal{A},\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z})$$

および

$$M_{\mathcal{A}} \left(\begin{matrix} \varnothing \\ \varnothing \end{matrix} ; \begin{matrix} (1) \sqcup \overleftarrow{\boldsymbol{z}'} \\ \overleftarrow{\boldsymbol{k}'}_{\rightarrow} \end{matrix} \right) = (-1)^{\mathrm{wt}(\boldsymbol{k})+1} \cdot \frac{1}{z_1} \left(\pounds^{\text{ш},\star}_{\mathcal{A},\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{z}') - \pounds^{\text{ш},\star}_{\mathcal{A},\boldsymbol{k}'}((1) \sqcup \boldsymbol{w}) \right)$$

の成立を確認できる. ここで, $\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{z}' = (1 - z_1) \sqcup \boldsymbol{w}$ を満たすもの. 従って, (8.2) は

$$\pounds^{\text{ш},\star}_{\mathcal{A},\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z}) = \pounds^{\text{ш},\star}_{\mathcal{A},\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{z}') - \pounds^{\text{ш},\star}_{\mathcal{A},\boldsymbol{k}'}((1) \sqcup \boldsymbol{w})$$

を導き, これは佐久川・関の関数等式に他ならない.

この導出は $M_{\mathcal{A}}\binom{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{k}};\binom{1}{1}$ という表示を持つ連結和を2通りに計算したものと考えることができるが, この表示を持たないケースとして不定元 v, w に関する連結和 $M_{\mathcal{A}}\binom{v}{1};\binom{w}{1}$ を考えてみよう. 輸送関係式 (8.1) および境界条件の計算より

$$M_{\mathcal{A}}\begin{pmatrix} v & w \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -M_{\mathcal{A}}\begin{pmatrix} \varnothing & w, 1-v \\ \varnothing & 1, \quad 1 \end{pmatrix} = \frac{(1-v)^{\boldsymbol{p}}}{vw}£_{\mathcal{A}}\left(\frac{w}{1-v}\right) - \frac{1}{vw}£_{\mathcal{A}}(w)$$

を得る. 定義から明らかに

$$M_{\mathcal{A}}\begin{pmatrix} v & w \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{A}}\begin{pmatrix} w & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つため, 関数等式 (3.4) が導かれる.

佐久川・関の関数等式の重さ1のインデックスの場合が (3.1) であるが, (3.2) は佐久川・関の関数等式とは無縁であると筆者は思っていた. しかしながら, 連結和 $M_{\mathcal{A}}$ の輸送関係式によって, (3.1) と等価である (3.4) が佐久川・関の関数等式と同じ仕組みで得られることが今回判明したことは強調するに値するだろう.

9 論文には何が書かれる?

[KMS1] では, 関・山本の ([SY2] の方ではなく, [SY1] で用いられた) コネクターを一般化した

$$C(a_1, a_2, \ldots, a_n) \coloneqq \frac{(a_1)!(a_2)!\cdots(a_n)!}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)!}$$

をコネクターとする多変数連結和を導入し, それを多重ポリログで表示する計算アルゴリズムを与えた. 応用として多重ポリログの関係式が得られる. 準備中の [KMS2] では, 先述の新コネクターを一般化した

$$D(a_1, \ldots, a_n) \coloneqq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n-1)!}{(a_1-1)!(a_2-1)!\cdots(a_n-1)!}$$

をコネクターとする多変数連結和を導入し, それを有限多重ポリログで表示する計算アルゴリズムを与える. 応用として, 例えば次の関数等式が得られる.

Theorem 9.1. x, y, z を不定元とする. このとき, 関数関係式

$$£^{ш,\star}_{\mathcal{A},(1,1)}(-x,y) + £^{ш,\star}_{\mathcal{A},(1,1)}(-x,z) = £^{ш,\star}_{\mathcal{A},(1,1)}(1-x,y) + £^{ш,\star}_{\mathcal{A},(1,1)}(1-x,z) \text{ in } \mathcal{A}_{\mathbb{Z}[x,y,z]/(x+y+z-1)}$$

が成り立つ.

Acknowledgments

講演の機会を与えてくださった世話人の安福悠先生と中筋麻貴先生に感謝いたします. また, 本研究は科研費 (課題番号:21K13762) の助成を受けています.

参考文献

[EVG] P. Elbaz-Vincent, H. Gangl, *On poly(ana)logs I*, Compositio Math. **130** (2002), 161–210.

[H] M. Hoffman, *Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums*, Kyushu J. Math., **69** (2015), no. 2, 345–366.

[KMS1] H. Kawamura, T. Maesaka, S. Seki, *Multivariable connected sums and multiple polylogarithms*, Res. Math. Sci. **9** (2022), 4.

[KMS2] H. Kawamura, T. Maesaka, S. Seki, *Multivariable connected sums and finite multiple polylogarithms*, in preparation.

[K] M. Kontsevich, *The* $1\frac{1}{2}$*-logarithm*, Appendix to "On poly(ana)logs I" by Elbaz-Vincent, Gangl, Compositio Math. **130** (2002), 211–214.

[SS] K. Sakugawa, S. Seki, *On functional equations of finite multiple polylogarithms*, J. Algebra **469** (2017), 323–357.

[S] S. Seki, *Connectors*, RIMS Kôkyûroku **2160** (2020), 15–27.

[SY1] S. Seki, S. Yamamoto, *A new proof of the duality of multiple zeta values and its generalizations*, Int. J. of Number Theory, Vol. 15, No. 6 (2019), 1261–1265.

[SY2] S. Seki, S. Yamamoto, *Ohno-type identities for multiple harmonic sums*, J. Math. Soc. Japan **72** (2020), 673–686.