

Fornberg-Whitham 方程式の砕波現象に関する数値的研究

岐阜大学 田中光宏

Mitsuhiro Tanaka (Gifu University)

1 イントロダクション

1.1 水面重力波における 2 種類の「解の破綻」

重力を復元力とする水面波に対しては 2 種類の「解の破綻」が知られている．1 つ目の破綻は、定常進行波解に関するものである．微小振幅の極限で単一の正弦波で表現される周期的な定常進行波解は、波高の増大とともに高調波を含む非線形解（Stokes 波と呼ばれる）に移行する．この非線形解においては波高の増大とともに波の峰が急峻化する一方で波の谷は平坦化していく．そしてある振幅に達すると波峰の頂点は滑らかさを失い、120 度の角を持つに至る (peaking).¹ この限界波高を超える波高を持つ定常進行波解は存在しない．[1][2]

もう一つの「解の破綻」は波の非定常伝播に関するものである．海の波は海岸に近づくにつれ、波長に対して水深が浅い、いわゆる浅水波または長波と呼ばれる状態になる．長波の伝播速度は水深の平方根に比例するため、波自身がもたらす水深の増加によって、波のより高い部分はより速く伝播する傾向があり、したがって伝播に伴い波形の前面が急峻化し、最終的には微分係数が発散する砕波 (breaking) に至る．

peaking と breaking, これらはどちらも非線形水面波を特徴付ける興味深い現象であるが、浅水水面波に対するモデル方程式としてよく知られている Korteweg-de Vries 方程式 (KdV)

$$u_t + c_0 u_x + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

では残念ながら peaking と breaking のどちらも再現することができない．KdV 方程式には「KdV ソリトン」として有名な非常に安定なパルス的な定常進行波解が知られているが、その振幅の取りうる値の範囲に特別な制限はない．また非定常な波形変形についても、初期波形が十分滑らかである限り、微分係数の発散が発生しないことが示されている ([3] およびその引用文献参照)．このような背景から、peaking と breaking の両者を再現できるような簡単なモデル波動方程式の可能性を模索することは研究の自然な成り行きであった．

1.2 Whitham 方程式と Fornberg-Whitham 方程式

そんな中 Whitham[4] は、KdV と同じ長波型の非線形項と線形の積分項 (分散項) を持つモデル方程式

$$u_t + \alpha u u_x + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) u_{\xi}(\xi, t) d\xi = 0 \quad (2)$$

を提案した．この方程式は **Whitham 方程式** とよばれている．非線形項を除いた (2) に $u(x, t) = ae^{i(kx - \omega t)}$ を代入すると、

$$-i\omega a e^{i(kx - \omega t)} + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) a i k e^{i(k\xi - \omega t)} d\xi = 0 \quad \longrightarrow \quad c(k) = \frac{\omega}{k} = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{-ikx} dx \quad (3)$$

¹波長 λ に比べて水深が十分に深い深水波の場合、この限界振幅は 0.142λ 程度であることが知られている．

となることからわかるように、 $K(x)$ として、位相速度 $c(k)$ のフーリエ変換を採用することによって、(2) に任意の線形分散関係を持たせることができる。ただし、 $c(k)$ も $K(x)$ も実の偶関数、 $c(-k) = c(k)$ 、 $K(-x) = K(x)$ とする。例えば、 $K(x) = c_0\delta(x) + \beta\delta''(x)$ とすれば、 $c(k) = c_0 - \beta k^2$ となり、このとき Whitham eq.(2) は KdV eq.(1) に一致する。

また、 $|x| \rightarrow \infty$ で十分速く減衰する $u(x, t)$ に対して、以下の諸量は (2) の保存量となることが知られている：

- $I_1 := \int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx$
- $I_2 := \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x) dx,$
- $I_3 := \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{u^3}{3} + u\tilde{K}u \right] dx$ ここで $\tilde{K}u := \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi)u(\xi) d\xi$
- $\frac{dX(t)}{dt} = \text{const.}$ ここで $X(t) := \int_{-\infty}^{\infty} xu(x, t) dx / \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx$ (重心速度一定)

これらの中で特に保存量 I_2 は本研究において砕波発生の検出に用いられる。

Whitham と Fornberg[5] は (2) において、特に $K(x) = K_{\text{FW}}(x) := B e^{-b|x|}$ の場合、すなわち

$$u_t + \alpha u u_x + \int_{-\infty}^{\infty} B e^{-b|x-\xi|} u_\xi(\xi, t) d\xi = 0 \quad (4)$$

に着目した。この $K(x)$ を選択した Whitham 方程式は特に Fornberg-Whitham 方程式 (FW eq.) と呼ばれており、本研究では今後この方程式のみを対象とする。FW 方程式の線形分散関係は

$$c(k) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\text{FW}}(x) e^{-ikx} dx = \frac{2Bb}{k^2 + b^2} \longrightarrow \omega(k) = \frac{2Bbk}{k^2 + b^2} \quad (5)$$

で与えられる。また $K_{\text{FW}}(x)$ は微分演算 $\left(\frac{d^2}{dx^2} - b^2 \right)$ の Green 関数であり、

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - b^2 \right) K_{\text{FW}}(x - \xi) = -2bB\delta(x - \xi) \quad (6)$$

を満たすので、両辺にこの微分演算を作用することにより、(4) は通常の偏微分方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - b^2 \right) (u_t + \alpha u u_x) - 2bB u_x = 0 \quad (7)$$

に帰着させることもできる。

FW 方程式 (4) に対しては peaking が起こる、すなわち定常進行波（周期波&孤立波）には限界波高があり、そのとき波形は波頂にシャープな角を持つことが知られている [2]。例えば $B = \pi/4$, $b = \pi/2$ のとき、最大孤立波解は

$$u(x, t) = \frac{8}{9} e^{-\frac{\pi}{4}|x - \frac{4}{3}t|} \quad (8)$$

という簡潔な表式で与えられる。この波形の波頂角は 110° で、水面重力波の限界波高における波頂角 120° とかなり近い値を取るが、これはパラメタの選択によるもので単なる偶然に過ぎない。また FW 方程式に対しては breaking、すなわち波形の前傾化に伴う微分係数の発散も生じうることが理論的にも [6]、また数値的にも示されている [5]。

2 FW 方程式の砕波に関する理論的結果

FW 方程式 (4), またはより一般的な Whitham 方程式 (2) に対して, 砕波が生じるために初期波形 $u_0(x)$ が満たすべき十分条件が様々な理論的研究によって導出されている. それらのうちごく一部ではあるが以下に紹介しておく.

この類の研究でもっとも初期のものは Seliger[6] であろう. この論文は一般的な Whitham 方程式 (2) を対象としているが, そこでは初期条件 $u_0(x)$ が $M(0) + m(0) < -2K(0)/\alpha$ が成り立つ程度の十分な前後非対称を有すれば, $|\alpha m(0) + K(0)|^{-1}$ より小さなある時刻において $m(0)$ が無限大に発散することが巧妙な議論によって示されている. ここで $m(t)$, $M(t)$ はそれぞれ $m(t) := \min_{x \in \mathbb{R}}(u_x(x, t))$, $M(t) := \max_{x \in \mathbb{R}}(u_x(x, t))$ で定義される量, すなわち, $M(t)$ は最も正の, $m(t)$ は最も負の波形勾配を表す. のちに Constantin & Escher[7] は対象とする関数空間を明確にするなど, Seliger の結果をより数学的に厳密なものにしている.

Haziot[8] は, 有限時間内での (13) の解の爆発 (blow-up) は「砕波」, すなわち $\sup_{x \in \mathbb{R}} |u_x(x, t)| \rightarrow \infty$ という形でのみ生じること, 初期波形 $u_0(x)$ が,

$$5km(0) + kM(0) \leq -4, \quad k \in \left(0, \frac{3}{5}\right) \quad (9)$$

を満たすならば有限時間内で砕波が生じることなどを示した.

また Wei[9] は, 初期条件が

$$m_0 < \min \left\{ -\frac{2}{3}, -\frac{1}{6} \left(1 + \sqrt{1 + 12M_0} \right) \right\} \quad (10)$$

を満たすならば有限時間 T のうちに砕波が生じること, blowup time T に対しては

$$0 < T \leq \frac{2\sqrt{3}}{(3 + 2/m_0)\sqrt{3m_0^2 + m_0 - M_0}} \quad (11)$$

という評価ができること, また最大負勾配 $m(t)$ の発散の強さは

$$m(t) \sim -\frac{2}{3(T-t)} \quad \text{as } t \rightarrow T \quad (12)$$

であることなどを示した.

なお, 上に触れたような数学的論文においては FW eq. は

$$(1 - \partial_x^2) \left(u_t + \frac{3}{2}uu_x \right) = u_x \quad (13)$$

または同等であるが

$$u_t - u_{xxt} + \frac{3}{2}uu_x - \frac{9}{2}u_xu_{xx} - \frac{3}{2}uu_{xxx} - u_x = 0 \quad (14)$$

のように規格化された形で扱われることが多い.

このように, 数学者たちによって, Whitham eq.(2) や FW eq.(13) の解の時間発展の中で有限時間内に砕波 ($u_x(x, t) \rightarrow -\infty$) が生じるために, 初期条件 $u_0(x)$ が満たすべきさまざまな十分条件が提示されている ([6]–[10]). しかし, これらの研究からは, 実際に波形がどのように変化し, どのようなタイプの砕波が起こるのか, といった波形変化の様子をイメージすることは難しい. ま

たこれらの論文で導き出された砕波のための十分条件は、何らかの意味で初期波形の非対称性に依拠しているものが多い。まだ前傾していない穏やかな初期波形が時間発展と共に次第に前傾し、最終的に砕波に到るという非定常な波形変化を観察し、それによって砕波の発生・非発生を砕波を引き起こすメカニズムと関連付けて理解するためには、やはり数値計算による波形の時間発展の追跡が必須である。このような背景から、本研究では FW 方程式における砕波現象について数値的な検討を行った。

なお、著者は 2012 年に同様な趣旨の研究に一度着手し、その結果を講究録でも報告している [11] が、今回はパラメタのより広い範囲を対象とし、より精密な数値計算を行うことによって、現象に対する理解が以前より深まったので、再度ここに報告するものである。ただし、本研究の内容は 2023 年 11 月に我が国で開催された「Workshop on Nonlinear Water Waves and Related Topics」において発表し、現在その Proceedings に向け投稿準備中である。そのため、「講究録に投稿した論文をそのままの形で、或いはその翻訳を、他誌に投稿することは許されません。」という執筆要領に抵触することを避けるために、本講究録原稿では結果の一部のみを簡潔に報告するに留める。そのため、多少説明不十分な点もあろうかと思うがその点をご理解を頂きたい。

3 研究の方法

3.1 問題の規格化

本研究では FW eq. として

$$u_t + \alpha u u_x + \int_{-\infty}^{\infty} B e^{-b|x-\xi|} u_{\xi}(\xi, t) d\xi = 0 \quad (15)$$

を考え、初期波形には典型的な周期波 $u_0(x) = A \cos kx$ を採用する。本来は $x \in \mathbb{R}$ を対象として、例えば $u_0(x) = A e^{-(kx)^2}$ のようなパルス的な場合も扱うべきであるが、数値的な困難などからこれについては研究が十分進んでいないので、今回は周期的初期条件についてのみ報告する。

この場合、問題に含まれるパラメタは、方程式に含まれる (α, B, b) と初期波形に含まれる (A, k) の計 5 つであるが、一般性を失うことなく $\alpha = A = k = 1$ とすることができるので、本研究では 2 つのパラメタを含む初期値問題

$$u_t + u u_x + \int_{-\infty}^{\infty} B e^{-b|x-\xi|} u_{\xi}(\xi, t) d\xi = 0, \quad u_0(x) = \cos x \quad \text{or} \quad e^{-x^2} \quad (16)$$

を扱う。この初期値問題を対象にして、パラメタ平面 (B - b 平面) において砕波が生じる領域と生じない領域の区別、それらの境界である臨界曲線の形状の同定とそれに対する物理的な説明付けなどが研究の主目的になる。

3.2 数値手法

数値計算には標準的なスペクトル法を用いる。計算対象領域は $[0, 2\pi]$ (+周期境界条件) で、空間波形 $u(x, t)$ の離散 Fourier 変換 $\{\hat{u}_k\}$ の時間発展を追跡する。このとき (16) の積分項、すなわち線形分散項は $-i\omega_k \hat{u}_k$ という単純な代数計算となる。ここで ω_k は線形分散関係 (5) が与える第 k モードの振動数である。また非線形項の計算は、 $\{\hat{u}_k\}$ から逆離散 Fourier 変換で $u(x_j)$ および $u_x(x_j)$ を求め、実空間上で $u u_x(x_j)$ で算出し、それを離散フーリエ変換することにより算出している。この手順において発生するアライアジング誤差は「3/2 則」により消去した。実空間におけ

るメッシュ点数 N はパラメタによって異なるが, $N = 4096 (= 2^{12})$ から $16384 (= 2^{14})$ 程度とした. このとき最高波数のモード番号は $k_{\max} = N/3$ で与えられる.

時間に関する積分には時間キザミ Δt を固定した 4 次精度の Runge-Kutta 法を用いた. Δt は (B, b) によって異なるが, 典型的には $\Delta t = 1/5000$ 程度とした. ちなみに, FW eq.(16) で分散項を無視した双曲型方程式の初期値問題

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(x, 0) = \cos x \quad (17)$$

において, 特性曲線の追いつきによる砕波 ($u_x = -\infty$ の発生) が初めて生じる時刻 T_b は 1 である. したがって我々は時間をこの T_b を 1 単位として計測していることになり, 初期値問題 (16) においても, もし砕波が発生するとしたら, その時刻は $t \approx 1$ 程度になることが期待できる.

3.3 砕波発生 の判定

本研究にとって重要で, かつ議論の余地がありそうなものは砕波判定条件であろう. 数値計算において文字通りの「砕波」, すなわち「 $u_x(x, t)$ の $-\infty$ への発散」を捉えること不可能なので, 何らかの実行可能な判定条件が必要となる. 図 1 は我々が「砕波が生じた」と判定された典型例であ

$(B, b) = (2, 1)$

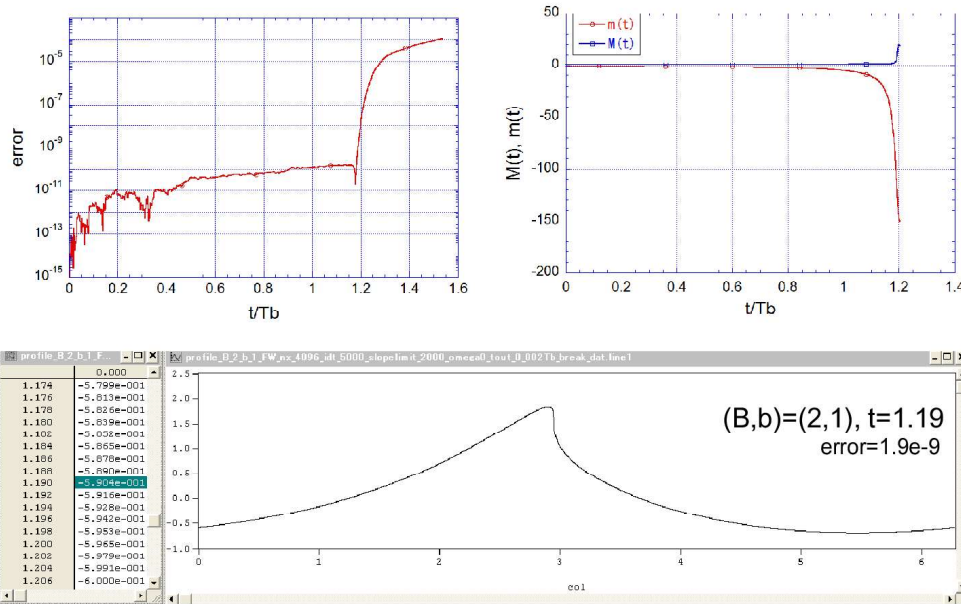


図 1: 砕波が発生する典型的な計算結果 ($B = 2, b = 1$)

る $(B, b) = (2, 1)$ の場合に得られた保存量 $I_2 = \int u^2 dx$ に含まれる相対誤差の時間発展, 最大波形勾配 $M(t)$ と最小波形勾配 $m(t)$ の発展, および数値計算が破綻する直前の $t = 1.19$ における波形を示している. 一方, 図 2 は我々が「砕波が生じない」と判定された典型例である $(B, b) = (3, 1)$ の場合に得られた同様のものを示している. (特に両ケースの波形勾配 M, m のグラフのスケールの違いに注意)

これらの図に見られる砕波する場合としない場合の振舞いの違いから, 本研究では (i) 保存量 $I_2 = \int u^2 dx$ に含まれる相対誤差の急増, (ii) 波形勾配の最小値 (負) $m(t)$ の急激かつ ($M(t)$ と

$(B,b)=(3,1)$

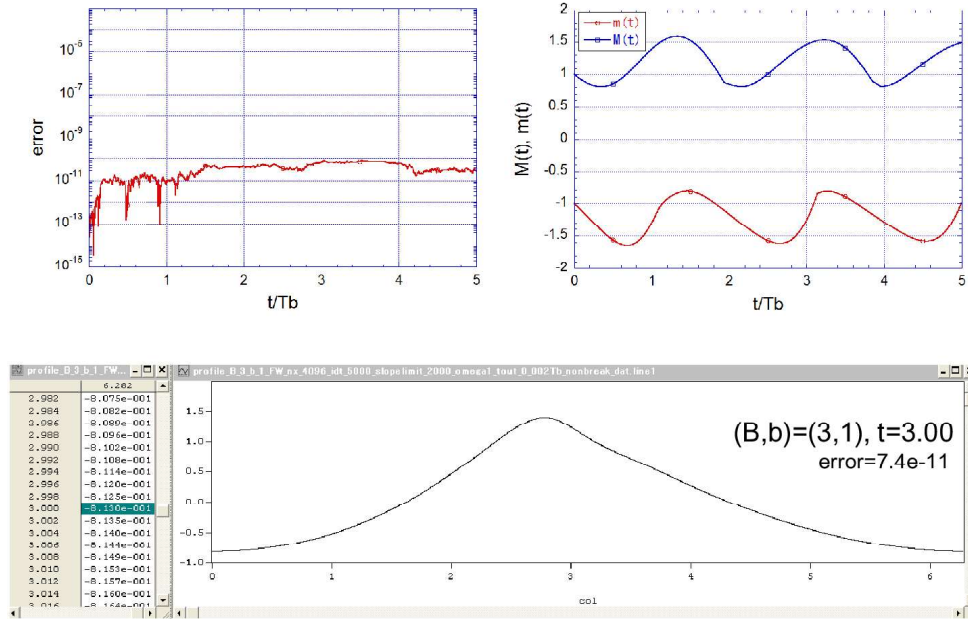


図 2: 砕波が発生しない典型的な計算結果 ($B = 3, b = 1$)

比較しての) 非対称的な増大, の 2 つを同時に検出した場合に砕波が発生したものと判定することにした。

4 数値計算結果

数値計算の結果は図 3 に示す B - b 平面上の散布図に集約される。図中の赤丸は砕波したケース, 青四角は砕波しなかったケースを表す。砕波領域と非砕波領域を分かち「臨界曲線」の位置を数値計算で同定することはもとより不可能であるが, このような散布図だけからでも臨界曲線の全体像がかなり鮮明に浮かび上がってくる。

なお, b が大きい領域にのみ見える緑色の三角は仮に「対称的な砕波」と名付けた分類に対応する。これは §3.3 で記した 2 つの「砕波」判定要件のうち, (i) の「誤差 ϵ の急増」は認められるものの, (ii) の波形勾配の最小値 (負値) $m(t)$ の非対称的な急増が見られないケースである。一例として $(B,b) = (50,30)$ の場合の ϵ , $m(t)$, $M(t)$ の時間発展, および, 数値計算が破綻する直前の波形とその波峰部分の拡大図を図 4 に示す。 $m(t)$ と $M(t)$ の時間発展や砕波直前の波形を見ると, この場合に数値計算誤差が急増している原因は, 前傾化に伴う大きな負勾配の出現 (すなわち「真の砕波」) ではなく, ほぼ前後対称な非常に細いパルスの出現に伴う空間解像度不足であるように見える。したがって, 仮に「対称的な砕波」と呼んだものの, 数学的な意味での「砕波」の定義に則れば, むしろ「非砕波」に分類すべきケースであろうと思われる。

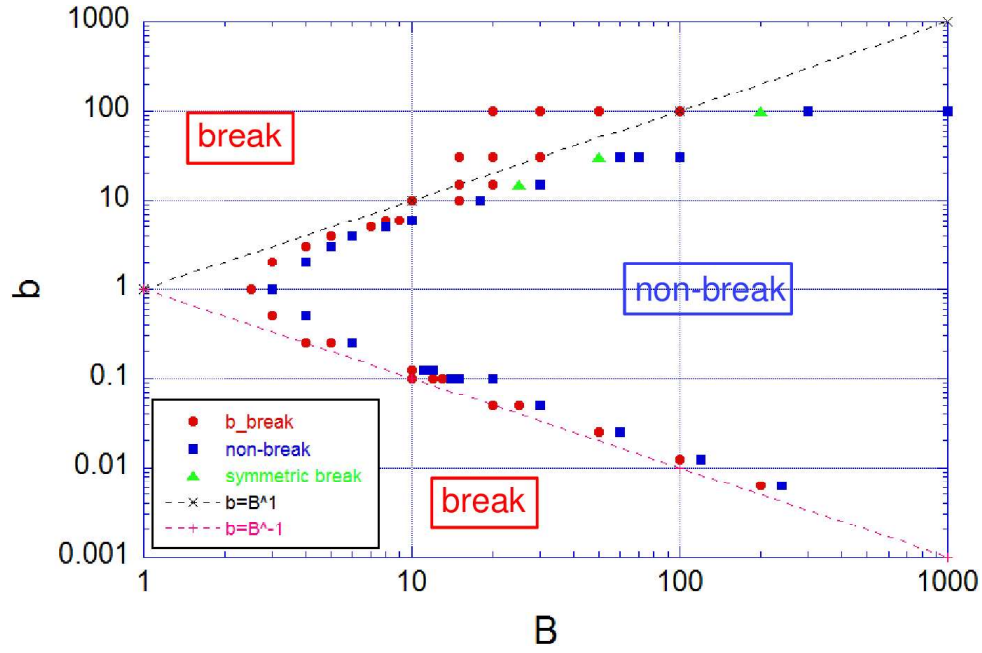


図 3: B - b 平面における砕波・非砕波の区別

$(B, b) = (50, 30)$; $nx = 16384$, $idt = 15000$; symmetric break?

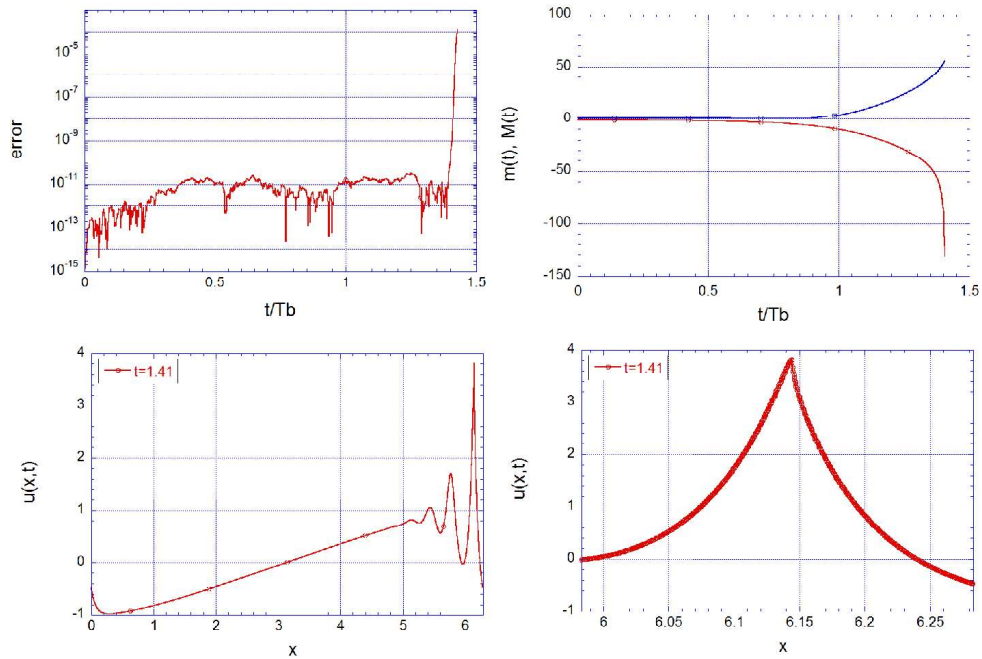


図 4: 「対称的な砕波」の一例 $((B, b) = (50, 30))$

5 議論

5.1 臨界曲線の全体的な形状について

臨界曲線は全体的に見ると、 B - b 平面上で左に凸の形状をしている。このような形状になるためには、(i) B が増大すると「砕波」→「非砕波」への遷移が起こる、(ii) b が増大すると「砕波」→

「非砕波」→「砕波」という遷移が起こる、の2つが同時に起こることが必要である。このうち (i) については、 B が分散項の係数であり、 B の増大につれて分散性の効果が増大し、それに伴い砕波が起こりにくくなることから当然のことであろう。

(ii) についても FW eq. の分散関係 (5) から大理解できる。(5) によると、

$$c(k) = \frac{2Bb}{k^2 + b^2}, \quad \frac{dc}{dk} = -\frac{4Bbk}{(k^2 + b^2)^2} \quad (18)$$

図5は位相速度 $c = \omega/k$ とその変化率 $|dc/dk|$ を図示したものである。ただし、横軸の波数 k は b で、また縦軸の c と $|dc/dk|$ はそれぞれ B/b , B/b^2 で無次元化したものである。そもそも「分散性」とは波数による伝播速度の違いであり、その意味では $c(k)$ の変化率 $|dc(k)/dk|$ がその効果の大きさの目安を与える。図5によると、 $|dc(k)/dk|$ は $k/b \approx 1$ 近くで最大となり、そこから両側に遠ざかるにつれ減少する。

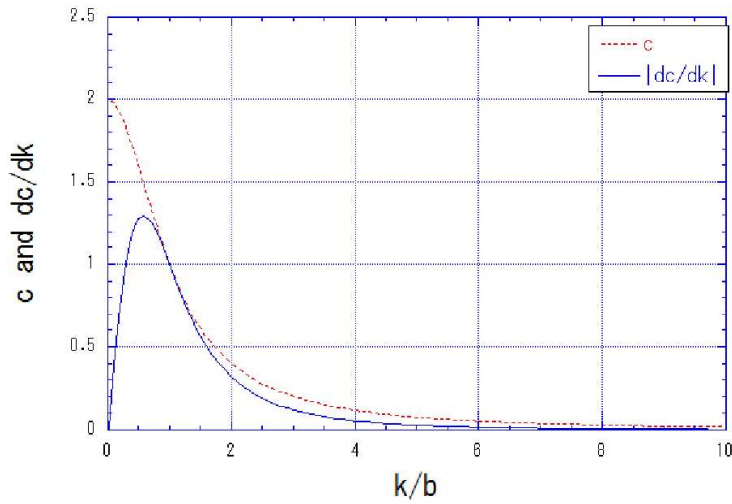


図 5: FW eq. の分散関係（位相速度とその変化率）

B を固定して b を非常に小さい値から増大させていくことを考えよう。我々の初期波形は $k = 1$ の単色波である。 $b \ll 1$ の場合、初期波形のフーリエスペクトルは図5の $k/b \gg 1$ の領域、すなわち $|dc/dk|$ が非常に小さい領域にのみ存在する。時間が経過すると非線形性による波形の急峻化が起こり、それに伴いスペクトルもより高波数領域（右方向）へ移動するであろうが、そこは $|dc/dk|$ がより小さく分散性が効かない領域であり、結局分散性は非線形性の効果に対抗するだけの強さを持つことができないであろう。

b が増大すると、初期スペクトルの位置が $|dc(k)/dk|$ が大きな値を持つ k/b に対応するようになり、同じ B の値でも分散性の効果が増大し、 b のある範囲では分散性が非線形性による砕波の出現を食い止めることが可能な領域が生じるであろう。

さらに b が増大すると、 k/b の値が小さくなり過ぎて、図5の $|dc/dk|$ のピークの左側の $|dc/dk|$ が小さい領域に入り、再び非線形性が卓越して砕波が生じるようになるであろう。ただし、この $b \gg 1$ の場合は、 $b \ll 1$ の場合と異なり、非線形性によるスペクトルの高波数への移動が分散性の効果を増強する方向へ起こるため、初期条件に対して「分散性 $\ll$ 非線形」が成り立つからと言って、必ず砕波が生じるとは言えない。 $b \gg 1$ の領域については、KdV 方程式と関連付けた議論が有益だと思われるので、この点については後の §5.3 で改めて触れることにする。

5.2 臨界曲線の $b \ll 1$ の領域での振舞い

砕波非砕波の現象は、非線形項による突っ立ち効果と分散性によるその抑止効果のバランスで理解するというのが常套手段である．非線形性によって生じる波数モード間の波速の差 Δc_{nl} は FW eq.(15) の uu_x によって生み出され、われわれの規格化では $O(1)$ である．一方、分散性によって生じる波数モード間の波速の差 Δc_l は、初期波形が $u_0(x) = \cos x$ で $k \sim 1$ であることを考慮すると、 $b \ll 1$ の場合は

$$\Delta c_l = \frac{dc}{dk} \Delta k \sim \frac{Bbk}{(k^2 + b^2)^2} \sim O(Bb) \quad (19)$$

で評価できる．したがって、 $b \ll 1$ のとき、分散効果と非線形効果のバランス $\Delta c_{nl} \sim \Delta c_l$ は、 $b \propto 1/B$ を要求する．

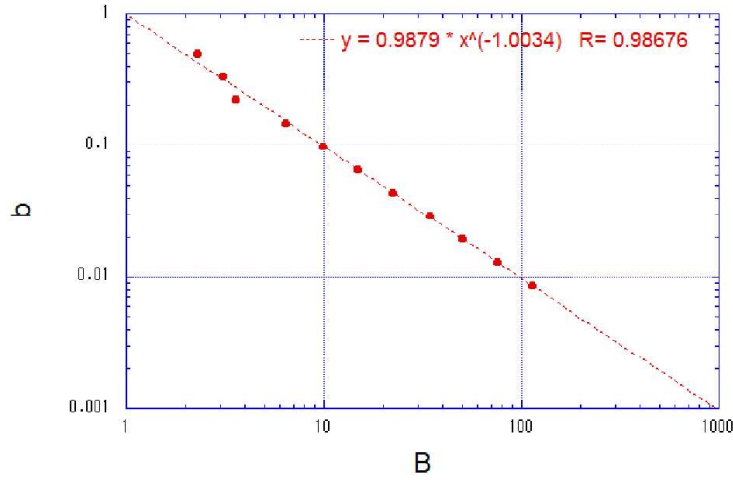


図 6: 臨界曲線の $b < 1$ の領域とべき則 $b \propto B^{-1}$ の比較

図 6 は $b < 1$ の領域を対象にして、砕波から非砕波への遷移が起こる (B, b) の点をプロットしたものであり、点線はそれに対して最小二乗法を用いてべき乗則を当てはめたものであるが、期待通りほぼ $b \propto 1/B$ の関係が成立している様子が見られる．臨界曲線（図 3）の下側の分枝の振舞いは、この程度の単純な考えでほぼ理解できそうである．

5.3 臨界曲線の $b \gg 1$ の領域での振舞い

FW eq.(16) の分散関係は (5) で与えられる．少なくとも初期には $k \sim O(1)$ なので $b \gg 1$ であれば $k/b \ll 1$ と考えてよい．このとき、線形分散関係は

$$\omega(k) = \frac{2Bbk}{k^2 + b^2} = \frac{2Bk}{b} \left\{ 1 - \left(\frac{k}{b}\right)^2 + \left(\frac{k}{b}\right)^4 - \dots \right\} \quad (20)$$

のように展開される．高次項を無視すれば、このとき FW eq.(16) は KdV eq.

$$u_t + c_0 u_x + uu_x + \frac{2B}{b^3} u_{xxx} = 0, \quad c_0 := \frac{2B}{b} \quad (21)$$

でよく近似することができる．なお、この KdV eq. の振幅 a の孤立波解は

$$u(x, t) = a \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{ab^3}{24B}} \left\{ x - \left(c_0 + \frac{a}{3} \right) t \right\} \right] \quad (22)$$

で与えられる．KdV eq. に対する逆散乱法によると，初期波形の振幅の 2 倍以上の波高の孤立波は生じないので， $u_0(x) = \cos x$ の場合，出現するソリトンの振幅 a は $O(1)$ と考えてよい．したがって出現するソリトンを特徴づける波数 k_{KdV} は

$$k_{\text{KdV}} := \sqrt{\frac{b^3}{24B}} \quad (23)$$

で評価できるであろう．

初期には $u \sim O(1)$, $k \sim O(1)$ なので非線形項 $uu_x \sim O(1)$ ，分散項は $O(\frac{2B}{b^3})$ である． $\frac{2B}{b^3}$ の大きさによって，非線形項が卓越するか分散項が卓越するかは異なるにしても， $k/b \ll 1$ である以上，ほぼ KdV eq. に従う波形変化が生じ，自動的に $uu_x \approx \frac{2B}{b^3} u_{xxx}$ という「KdV バランス」の状態に向かって時間発展が進むであろう．しかし，このような KdV バランスが必ずしも実現するとは限らない．

初期は $k = 1$ であり， $(\frac{k}{b})^2 \gg (\frac{k}{b})^4$ が成り立つため，FW eq. の分散性 (20) のうちまず有効に働くのは，KdV eq. でも考慮される u_{xxx} の項であることは間違いなく，したがって波形変化の初期段階はほぼ KdV eq. に従うものになるであろう．しかし，仮に KdV バランスに到達して長さスケール $1/k_{\text{KdV}}$ 程度の構造が生じた場合，それに対しては

$$\frac{k}{b} \sim \frac{k_{\text{KdV}}}{b} = \sqrt{\frac{b}{24B}} \sim O\left(\sqrt{\frac{b}{B}}\right) \quad (24)$$

となる．したがって， $\frac{b}{B} \ll 1$ の場合には，KdV バランスに到達した時点でも KdV eq. が FW eq. のよい近似であるための前提条件は崩れていない．このことから，ソリトンへの分裂やその相互作用など時間発展の全体を通して，FW eq. でも KdV eq. とほぼ同様のことが起こり，したがって砕波現象も発生しないであろう．

一方， $\frac{b}{B} \sim 1$ or $\frac{b}{B} \gg 1$ の場合には，KdV バランスに到達する以前に KdV eq. が FW eq. の良好な近似であるための条件が崩れ，したがって FW eq. の時間発展は KdV eq. のそれとかなり異なるものになるであろう．そしてこのようなケースにおいては，砕波が生じる可能性がある．

このような議論から， B - b 平面の上方領域 ($b \gg 1$) においては，「KdV eq. が終始良い近似を与えるかどうか，KdV バランスの状態に到達可能かどうか」という観点から， $b \sim B$ を挟んで「KdV 領域」($B \gg b$) と「非 KdV 領域」($B \ll 1$) に分類でき，砕波の出現は「非 KdV 領域」に限られるであろうと考えられる．ただし，本来「KdV 領域」($B \gg b$ の領域) であっても，時間発展の中で出現するであろう孤立波の長さスケールは $1/k_{\text{KdV}}$ 程度なので， $(b \ll B) \ll b^3$ の場合には数値計算の空間解像度が出現してくる孤立波を適切に表現することができず，その結果数値計算の破綻につながる可能性がある．図 3 で「対称的砕波」と判定されたケースはこのような状況に対応しているのではないかと考えられる．

今回の計算で扱った最大の b は $b = 100$ であるので，計算例として，非 KdV 領域にあり砕波が生じた $(B, b) = (20, 100)$ と KdV 領域にあり砕波が生じない $(B, b) = (1000, 100)$ の結果を紹介する．図 7 は $(B, b) = (20, 100)$ の場合の結果で，上段は保存量 I_2 の相対誤差と波形勾配の最大値 M ，最小値 m の時間変化，中段は数値計算誤差が急増する直前の $t = 1.01$ における波形，下段はその波形の砕波部分の拡大図を示す．小規模ながら確かに $m = -\infty$ に近い状況が生じている様子が見られる．

一方，図 8 は「KdV 領域」にある $(B, b) = (1000, 100)$ の場合の時刻 $t = 3.0$ における波形を示す．この時刻まで砕波が生ずることなく，初期波形の孤立波列への分裂がほぼ完了しており，また波形も KdV eq. によって得られる同時刻の波形 (青点線) と大差ないことが確認できる．

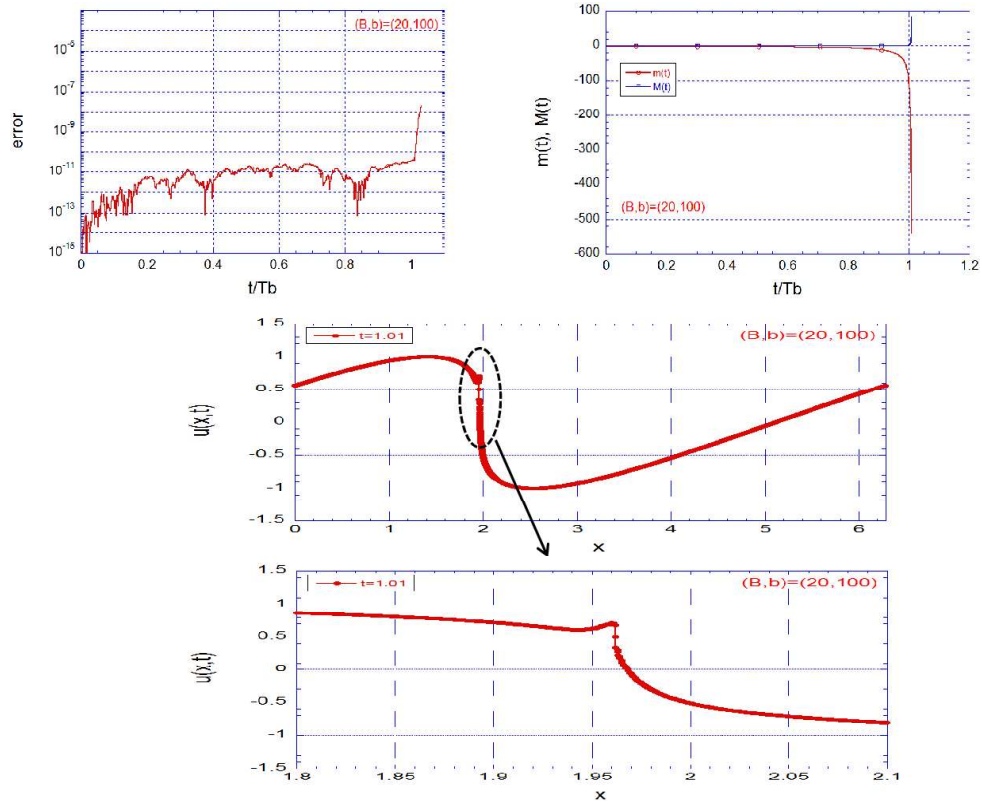


図 7: $(B, b) = (20, 100)$ の場合の結果

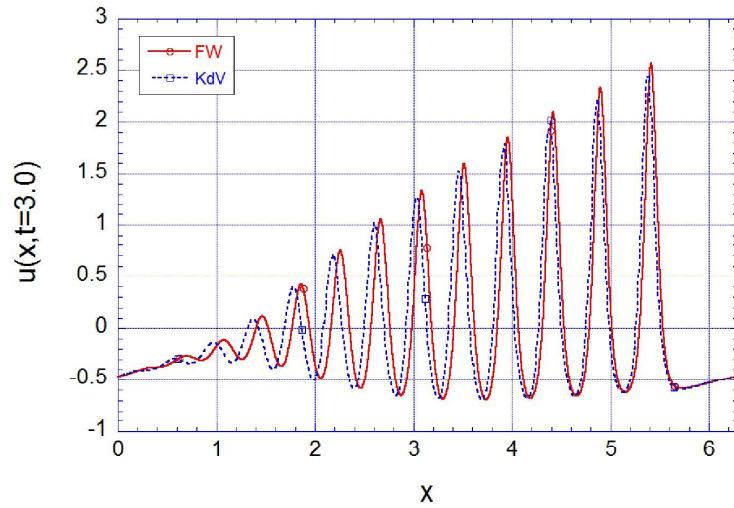


図 8: $(B, b) = (1000, 100)$ の場合の波形. 赤実線 : FW eq., 青点線 : KdV eq. ($t = 3.0$)

6 結論と今後の課題

初期波形として $u_0(x) = \cos x$ を採用した場合に, Fornberg-Whitham 方程式 (16) の解 $u(x, t)$ に現れる砕波現象について数値的に検討した. 得られた結果は以下のようにまとめることができる.

- 時間発展の途中で砕波が発生するかないかはパラメタ (B, b) の組み合わせに依存する.

- パラメタ平面 (B - b 平面) において, b を固定して B を増大させる (右へ移動する) と砕波が生じにくくなり, ある B において「砕波→非砕波」の遷移が起こる. また, B を固定して b を増大させる (上へ移動する) と「砕波→非砕波→砕波」の遷移が起こる傾向がある. この2つの傾向の結果, 砕波領域と非砕波領域の境界である臨界曲線は B - b 平面において左に凸の曲線となり, その左側が砕波領域, 右側が非砕波領域となる.
- 臨界曲線の下側の分枝 ($b \ll 1$) においては $b \propto B^{-1}$ というべき則が明瞭にみられる. このべき則は非線形効果と分散性効果のバランスから理解することができる.
- 臨界曲線の上方領域 ($b \gg 1$) においては, $B \ll b$ では波形が前傾する真の砕波が発生する. $B \gg b$ では波形変化は終始 KdV eq. のそれに近く, 砕波は生じない. 中間領域 $B \sim b$ においては非線形効果による波形の前傾化の過程の中で非常に鋭い孤立波が出現する. これらの孤立波はそれほど強い前後非対称性は持たないが, 数値計算の設定, 特に空間解像度の設定によっては十分に表現することができず, 数値計算が破綻することが多い. 数値計算が破綻したという意味で本研究ではこれらのケースを「対称的砕波」と呼んだが, 数学的には「非砕波」と分類すべきであろうと思われる.

また今後の主な課題としては

- 非周期的な場合 ($x \in \mathbb{R}$) に対する数値計算の実施, およびその結果と理論との比較,
- FW eq. でなく, 水面重力波の分散関係 $\omega(k) = \sqrt{gk \tanh kh}$ に対応する Whitham eq. に対する同様の数値解析とその結果に対する物理的考察, および, 理論的な予測との比較,

などが残されている.

参考文献

- [1] Stokes, G.G., On the theory of oscillatory waves. Camb. Trans. **8**, 441–473.
- [2] Whitham, G.B., *Linear and nonlinear waves*, (John Wiley & Sons., 1974)
- [3] Naumkin, P.I. and I.A. Shishmarev, *Nonlinear nonlocal equations in the theory of waves.*, American Mathematical Society, 1994.
- [4] Whitham, G.B., Variational methods and applications to water waves. Proc. Roy. Soc. A. **299** (1967), 6–25.
- [5] Fornberg, B. and G.B. Whitham, A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena. Phil. Trans. R. Soc. Lond. (1978), 373–404.
- [6] Seliger, R.L., A note on the breaking of waves. Proc. Roy. Soc. A. **303** (1968), 493–496.
- [7] Constantin, A. and J. Escher, Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations, Acta Math., **181**(1998), 229–243.
- [8] Haziot, S.V., Wave breaking for the Fornberg-Whitham equation, J. Differ. Equ. 263(2017) 8178–8185.
- [9] Wei, L., Wave breaking analysis for the Fornberg-Whitham equation, J. Differ. Equ. 265 (2018) 2886–2896.
- [10] Wei, L., New wave-breaking criteria for the Fornberg-Whitham equation, J. Differ. Equ. 280(2021) 571–589.
- [11] 田中光宏, 水面波に関連するあるモデル方程式における砕波現象について, 京都大学数理解析研究所講究録 1847 「非線形波動研究の数理, モデリングおよび応用」 (2013), 64–72.