群環上の台 τ-傾加群

小境雄太 *

概要

k を代数的閉体，G を有限群，N を G の正規部分群とする。[1] により台 τ-傾加群が導入され，この理論の主役である台 τ-傾加群は，表現論的に重要な多くの対象と一対一対応することが示された。本稿では，kN 上の台 τ-傾加群全体の集合のある部分集合が，kG 上のそれと同型であることを説明する。

1 背景

[1] によって導入された台 τ-傾加群は次のように定義される。

定義 1.1 ([1]). (1) Λ-加群 M が τ リジッドであるとは, $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \tau M) = 0$ が成り立つときをいう。

(2) Λ-加群 M が τ 傾加群であるとは, M が τ リジッドであり, $|M| = |\Lambda|$ が成り立つときをいう。(ただし，$|M|$ は M の互いに非同型な直既約因子の個数を表す。特に，$|\Lambda|$ は，単純 Λ-加群の同型類の個数と一致する。)

(3) Λ 加群 M が台 τ 傾加群であるとは，ある Λ のべき等元 e が存在して，M が $\Lambda/\Lambda e\Lambda$-加群として τ 傾加群になるときをいう,

* 東京理科大学 kozakai@rs.tus.ac.jp

有限次元多元環 Λ に対して，Λ 上の台 τ-傾加群全体 $\mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}\,\Lambda$ は，Λ の表現論的に重要な多くの対象と一対一で対応する。その例として，例えば次のものがある。

定理 1.2 ([1, 3, 4, 5, 7])**.** Λ を有限次元多元環とする。$\mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}\,\Lambda$ は次の集合と一対一対応下にある。

- 台 τ^{-1} 傾加群 (support τ^{-1}-tilting module) の add-同値類の集合 $\mathrm{s}\tau^{-1}\text{-tilt}\,\Lambda$
- 二項準傾複体 (two-term silting complex) の add-同値類の集合 2-siltΛ
- 二項余準傾複体 (two-term cosilting complex) の add-同値類の集合 2-cosilt Λ
- 関手的有限なねじれ類 (functorially finite torsion class) の集合 f-tors Λ
- 関手的有限なねじれ自由類 (functorially finite torsion-free class) の集合 f-torf Λ
- 左有限 (left finite) な半煉瓦 (semibrick) の集合 $\mathrm{f_L}\text{-sbrick}\,\Lambda$
- 右有限 (right finite) な半煉瓦の集合 $\mathrm{f_R}\text{-sbrick}\,\Lambda$
- 二項単純系 (two-term simple-minded collection) の集合 2-smd Λ
- $D^b(\Lambda)$ において length heart をもつ intermediate t-structure の集合 int-t-str Λ
- 左有限な Λ-mod の広大部分圏 (wide subcategory) の集合 $\mathrm{f_L}\text{-wide}\,\Lambda$
- 右有限な Λ-mod の広大部分圏 (wide subcategory) の集合 $\mathrm{f_R}\text{-wide}\,\Lambda$

$\mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}\,\Lambda$ は $M_1, M_2 \in \mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}\,\Lambda$ に対して，$M_1 \leq M_2$ を $\mathsf{Fac}\,M_1 \subseteq \mathsf{Fac}\,M_2$ で定義することにより，半順序集合の構造をもつ。また，[2] により 2-siltΛ も半順序集合となることが示されており，上記の $\mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}\,\Lambda$ と 2-siltΛ の間の一対一対応は，単なる一対一対応ではなく，半順序集合としての同型となっ

ている。また，Λ が対称多元環である場合，準傾複体と傾複体は一致することも [2] で示されており，群環をはじめとする対称多元環 Λ 上の sτ-tilt Λ を調べることは，導来同値の研究にも役立つことが期待される。

こういった理由から，与えられた多元環に対して，その多元環上の台 τ-傾加群を与えたり，分類することは，最近では表現論の 1 つのテーマとなっている。本稿では，有限群の群環に対して，それらの上の台 τ-傾加群を調べる。具体的には，有限群 G とその正規部分群 N のそれぞれの群多元環上の台 τ-傾加群全体のある部分集合を比較する。

2　主結果

この章では，有限群 G とその正規部分群 N のそれぞれの群環上の台 τ 傾加群に関する結果を [6] に基づいて紹介する。

この章では，G は有限群，N は G の正規部分群，k は正標数 p をもつ代数的閉体を表すものとする。また，$\mathrm{Ind}_N^G : kN\text{-mod} \to kG\text{-mod}$ により誘導関手，$\mathrm{Res}_N^G : kG\text{-mod} \to kN\text{-mod}$ により制限関手を表す。

次の定理は，適切な条件を満たす kG 上の台 τ 傾加群の kN への制限が再び台 τ-傾加群になるというものである。

定理 2.1. *kG 上の台 τ 傾加群 M が次の 2 条件を満たすとする。*

- *M は相対 N-射影的，すなわち M が $\mathrm{Ind}_N^G\mathrm{Res}_N^G M$ の直和因子として現れる。*
- *$\mathrm{Ind}_N^G\mathrm{Res}_N^G M \in \mathrm{add}\, M$ が成り立つ。*

このとき，$\mathrm{Res}_N^G M$ は kN 上の台 τ 傾加群となる。さらに，kG 上の台 τ 傾加群 M_1, M_2 が上記の 2 条件を満たし，$M_1 \leq M_2$ となるとき，$\mathrm{Res}_N^G M_1 \leq \mathrm{Res}_N^G M_2$ が sτ-tilt kN で成り立つ。すなわち，制限関手は半順序構造を保つ。

次の定理を述べる準備として，kN-加群 X の G-不変性を定義する。kN-加群 X と $g \in G$ から，次のように kN-加群 gX を構成できる。

- 集合としては $gX = \{gx \mid x \in X\}$ で定める。
- $n \in N$ の $gx \in gX$ への作用が次で与えられる：$n \cdot gx := g(g^{-1}ngx)$

kN-加群の G-不変性は以下で定義される。

定義 2.2. kN-加群 X が G-不変であるとは，任意の $g \in G$ に対して，kN-加群としての同型 $gX \cong X$ が成り立つときをいう。

次の定理は，定理 2.1 の条件と同値な条件を与え，さらに誘導関手が sτ-tilt kN のある部分集合から sτ-tilt kG のある部分集合への半順序同型を与えるものである。

定理 2.3. M を kG 上の台 τ-傾加群とする。次の条件は同値である。

- M は相対 N-射影的かつ $\mathrm{Ind}_N^G \mathrm{Res}_N^G M \in \mathrm{add}\, M$ が成り立つ。
- ある G-不変な kN 上の台 τ 傾加群 X が存在して，$M =_{\mathrm{add}} \mathrm{Ind}_N^G X$ が成り立つ。
- 任意の単純 $k[G/N]$-加群 S に対して，$S \otimes_k M \in \mathrm{add}\, M$ が成り立つ。

さらに，kG 上の台 τ 傾加群で上記の同値条件を満たすものの全体の（を“ $=_{\mathrm{add}}$ ”で割ったもの）を (sτ-tilt $kG)^\star$，G-不変な kN 上の台 τ 傾加群全体（を“ $=_{\mathrm{add}}$ ”で割ったもの）を (sτ-tilt $kN)^G$ と表したとき，誘導関手 Ind_N^G により (sτ-tilt $kN)^G$ と (sτ-tilt $kG)^\star$ の間の半順序集合としての同型が与えられる：

$$\mathrm{Ind}_N^G : (\mathsf{s}\tau\text{-tilt}\, kN)^G \xrightarrow{\cong} (\mathsf{s}\tau\text{-tilt}\, kG)^\star$$

ここからは，定理 2.3 の応用として，$(G:N)$ が p べきの場合の sτ-tilt kG と sτ-tilt kN の比較を行う。まずは，モジュラー表現論でよく知られている

事実をいくつか紹介する。

定義 2.4. k 上 1 次元ベクトル空間 k に対して，G の各要素が恒等的に作用し，それを線形に拡張したものは kG-加群になる。これを自明な kG-加群とよび，k_G で表す。つまり，自明な kG-加群 k_G とは，G の作用が次のように与えられる kG-加群である：

$$g \cdot x := x \; (g \in G, x \in k)$$

注意 2.5. 自明な kG-加群 k_G は $k(\sum_{g \in G} g)$ と同型となる。また, $\dim k_G = 1$ であるため，k_G は単純 kG-加群である。

一般に単純 kG-加群の同型類は複数個あるが，p-群については次のことが知られている。

命題 2.6. Q を p-群とする。このとき，自明な kQ-加群 k_Q は唯一の単純 kQ-加群である。

M_1, M_2 を kG-加群とし，$m_1 \otimes m_2 \in M_1 \otimes M_2 =: M_1 \otimes_k M_2$ および $g \in G$ に対して，$g(m_1 \otimes m_2) := gm_1 \otimes gm_2$ と定めることで，$M_1 \otimes M_2$ は kG-加群になる。これに関して，次の命題は用意に証明できる。

命題 2.7. k_G を自明な kG-加群，M を任意の kG-加群としたとき，次の kG-加群としての同型が成り立つ。

$$k_G \otimes M \cong M$$

以上の命題 2.6, 2.7 と定理 2.3 を組み合わせることで次の定理を得る。

定理 2.8. G/N が p-群であるならば，誘導関手は次の半順序集合としての同型を引き起こす：

$$\mathrm{Ind}_N^G : (\mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}\, kN)^G \xrightarrow{\cong} \mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}\, kG$$

参考文献

[1] T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten, *τ-tilting theory.* Compos. Math. **150** (2014), no. 3, 415–452.

[2] T. Aihara, O. Iyama, Silting mutation in triangulated categories. J. Lond. Math. Soc. (2) **85** (2012), no. 3, 633–668.

[3] S. Asai, *Semibricks.* Int. Math. Res. Not. IMRN 2020, no. 16, 4993–5054.

[4] T. Brüstle, D. Yang, *Ordered exchange graphs.* Advances in representation theory of algebras, 135–193, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2013.

[5] S. Koenig, D. Yang, *Silting objects, simple-minded collections, t-structures and co-t-structures for finite-dimensional algebras.* Doc. Math. **19** (2014), 403–438.

[6] R. Koshio, Y. Kozakai, *Normal subgroups and support τ-tilting modules.* arXiv:2301.04963 (2023).

[7] F. Marks, J. Šťovíček, *Torsion classes, wide subcategories and localisations.* Bull. Lond. Math. Soc. **49** (2017), no. 3, 405–416.