位数3の宮本自己同型を持つ軸代数について

東京大学大学院数理科学研究科　矢部　貴大
Takahiro Yabe
Graduate School of Mathematical Science,
the University of Tokyo

本講究録では、軸代数 (axial algebra) と呼ばれる可換非結合的代数のうち位数 3 の自己同型と関係があるものについていくつかの例を見て行く。

軸代数とは、Monster 頂点作用素代数の Griess 代数を一般化したものとして [1] において導入されたものである。軸代数は、積作用が半単純であるような冪等元で生成される代数であり、結合性の代わりに fusion 則と呼ばれる条件で制御される。具体的には、以下の様に定義される。$\mathbb{F}$ を体、$\mathcal{F} = (S, \star)$ を集合 S と $S \times S$ から 2^S への写像 $\star$ の組とする (この組を fusion 則という)。さらに、S から $\mathbb{F}$ への写像 λ をとる。この時、$\mathbb{F}$ 上の可換非結合的代数 M の冪等元 a と M の直和分解 $M = \bigoplus_{s \in S} \Phi_s$ の組が $(\mathcal{F}, \lambda)$-軸 (axis) であるとは,

- Φ_s の元は a 倍作用の $\lambda(s)$-固有ベクトルである。
- $\Phi_s \Phi_t \subset \bigoplus_{u \in s \star t} \Phi_u$

を満たすことを言う M が $(\mathcal{F}, \lambda)$-軸の集合 $\mathcal{A}$ によって「生成」される、すなわち以下の条件を満たすとき、M を $(\mathcal{F}, \lambda)$-軸代数という。

- M の部分代数 N で、任意の $(a, \Phi) \in \mathcal{A}$ について $(a, \phi \cap N)$ が N の軸になる様なものは M 自身と等しい。

ここで、軸 a が原始的とは 1-固有空間が一次元であることをいい、$\mathcal{A}$ の元が全て原始的なとき軸代数 M は原始的という。

Monster 群が Monster 頂点作用素代数の Griess 代数に作用しているように、一般の軸代数に対してもそれと対応する自己同型群が考えられる。具体的には各軸に対して、fusion 則により特徴づけられる次のような自己同型が定義される。まず、fusion 則 $\mathcal{F} = (S, \star)$ に対し群 G と写像 $g : S \to G$ が S の任意の元 s_1, s_2 について $g(s_1 \star s_2) \subset \{g(s_1)g(s_2)\}$ を満たすとする（このようなとき、$\mathcal{F}$ が G-grading を誘導する、という）。このとき、G の指標 χ と $\mathcal{F}$-軸代数 M 及び $\mathcal{F}$-軸 (a, Φ) に対し Φ_s を $\chi(g(s))$ 倍するような写像は M の自己同型となる。これを宮本自己同型と呼び、その生成する群を宮本群という。

軸代数の一例として、以下の表の様な fusion 則に従う Jordan 型と呼ばれる軸代数がある。Jordan 型 fusion 則は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-grading を誘導し、$\xi \neq \frac{1}{2}$ のとき宮本群は 3-互換群と呼ばれるクラスに含まれる（[2]）。また、逆に 3-互換群から松尾代数と呼ばれる Jordan 型軸代数を構成出来る。

$\star$	0	1	ξ
0	0		ξ
1		1	ξ
ξ	ξ	ξ	$0, 1$

Table 1: Jordan 型 fusion 則

もう少し複雑な例として、Majorana 型軸代数がある。これは頂点作用素代数（VOA) に起源を持つ。モンスター VOA と呼ばれる頂点作用素代数 $V^\natural$ は、

$$V^\natural = V_0^\natural \oplus \bigoplus_{i=2}^{\infty} V_i^\natural$$

という grading と整数で指数づけられた積構造を持ち、最大の散在型有限単純群であるモンスター群が自己同型群となる。この $V_2^\natural$ は Ising fusion 則と呼ばれる以下の表の fusion 則に従う軸代数となる。

$\star$	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{32}$
0	0		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{32}$
1		1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{32}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$0, 1$	$\frac{1}{32}$
$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$0, 1, \frac{1}{4}$

Table 2: Ising fusion 則

Majorana 代数の宮本群は 6-互換群となり、現在 6-互換群から軸代数を構成する研究が盛んに行われている。

以上の例はどちらも宮本自己同型が位数 2 となる例である。その他の位数の例は現在あまり知られていない。位数 3 の宮本自己同型を与える fuision 則で最も簡単なものの一つが次の表である。

$\star$	0	1	η^+	η^-
0	0		η^+	η^-
1		1	η^+	η^-
η^+	η^+	η^+	η^-	$0, 1$
η^-	η^-	η^-	$0, 1$	η^+

Table 3: 位数 3 の fusion 則 $\mathcal{F}$

現在、この fusion 則に従う 2 元生成軸代数の構造を研究している。このような非結合的軸代数の例として、線形空間 $B = \sum_{i=0}^{3} \mathbb{F} a_i$ に積を $i \neq j$、$\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$ として $a_i a_j = \frac{\eta}{3}(2a_i + 2a_j - a_k - a_l)$ で定めて得られるものがある。

実は、一定の制限のもとでは、これが唯一の例となる。

Theorem 1. *平面上の 2 点を中心とした $\frac{2\pi}{3}$ 回転で生成されるアフィン変換群 G を考える（$p3$ 型の壁紙群とも呼ばれる)。このとき、0,1 以外の固有値 η が $\frac{1}{2}$ でないなら、宮本群が G の商となる非結合的軸代数は B のみである。*

以下証明の概略を述べる。$\mathbb{F}$ を体、$\mathrm{ch}\mathbb{F} \neq 2, 3$, $\mathbb{F} \ni \omega$ とする。ここで、ω は 1 の原始三乗根である。$\mathbb{F}$ 上の 2 元生成 $\mathcal{F}$-軸代数で宮本群が G の商となるものは、次のように表せる。格子 $L = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$ とし、$d : L \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を $n + m\omega \mapsto \overline{n+m}$ で定めて部分集合 $X := d^{-1}(\bar{1}, \bar{0}) \subset L$ をとる。

$\phi : L \to \mathbb{F}$ を次を満たす写像とする。

- $\forall u \in L, \forall \bar{i}, \phi(u) = \phi(\omega u) = \phi(\omega u - \omega + 1)$
- $\forall u, v \in L,\ \phi(u - v) = \phi(v - u)$
- $\forall u, v, w \in L,$

$$
\begin{aligned}
0 = &(\phi(v - u) - \frac{2\eta}{3})\phi(u - w) \\
&-(\phi(u - v) - \frac{2\eta}{3})\phi(v - w) \\
&+\frac{\eta}{3}(\phi(\omega u + (1-\omega)v - w) + \phi(\omega^2 u + (1-\omega^2)v - w) \\
&\quad - \phi((1-\omega)u + \omega v - w) - \phi((1-\omega^2)u + \omega^2 v - w)
\end{aligned}
$$

$M(\phi) = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{a_u \mid u \in X\}$ は次を満たす線型空間とする。
$\forall u, v \in X,$

$$
\begin{aligned}
0 = &(\phi(v - u) - \frac{2\eta}{3})a_u - (\phi(u - v) - \frac{2\eta}{3})a_v \\
&+\frac{\eta}{3}(a_{\omega u + (1-\omega)v} + a_{\omega^2 u + (1-\omega^2)v} - a_{(1-\omega)u + \omega v} - a_{(1-\omega^2)u + \omega^2 v})
\end{aligned}
$$

積は以下で定める。

$$
a_u a_v = \phi(v - u)a_u + \frac{\eta}{3}(2a_v - a_{(1-\omega)u + \omega v} - a_{(1-\omega^2)u + \omega^2 v})
$$

このとき、$M(\phi)$ は可換代数となる。今考えている軸代数は全てこのように書けるため、ϕ を決定すれば分類が完了する。

実際、この ϕ は以上の条件及び fusion 則から 3 通りに定まり、そのうち 2 つは 1 次元及び 2 次元の可換結合的代数なので、定理が示される。

References

[1] J. I. Hall, F. Rehren, and S. Shpectorov, Universal Axial Algebras and a Theorem of Sakuma, J. Algebra 421, (2015), 394–424.

[2] J. I. Hall, F. Rehren, and S. Shpectorov, Primitive axial algebras of Jordan type, J. Algebra 437 (2015), 79–115, arXiv:1403.1898.