

A_1 型格子頂点代数の主部分空間の中心化代数について

熊本大学・大学院先端機構 川節 和哉

Kazuya Kawasetsu

Priority Organization for Innovation and Excellence

Kumamoto University

頂点代数は、整数でパラメトライズされた無限個の積を持つ代数系である。頂点代数 V が共形元 (Virasoro 代数の交換関係を満たす元) を含むとき、共形元を 1 つ固定したものは頂点作用素代数 (VOA) という。頂点代数 V とその部分代数 U に対して、 V における U の中心化代数が定義されるが、これまで考えられてきた具体例は U, V に VOA 構造が入っている場合のみであった (Goddard-Kent-Olive 構成法など)。

本稿は論文 [K23] の概説である。次の中心化代数 C を考察する。すなわち、 V が A_1 型格子 VOA であって、 U が Feigin-Stoyanovsky 主部分空間の場合である。 U はこの場合、共形元を全く持たない (従って VOA になり得ない)。しかし、モジュラー形式の理論と関係するなど、良い性質を持つ代数である。主結果として、 C の極小生成系を与え、Zhu の Poisson 代数 R_C を決定、 C の中心化代数が U と一致することなどを示した。証明等の詳細については [K23] を参照されたい。

1. 頂点代数と頂点作用素代数

1.1. **VA と VOA.** 頂点代数 (Vertex Algebra, VA) は、何らかのベクトル空間 M 上の作用素値級数 $u = u(z) \in \text{End}(M)[[z, z^{-1}]]$ のなす集合 V と思える。和・スカラー倍と、留数積と呼ばれる無限個の積

$$(n) : V \times V \rightarrow V, \quad V \times V \ni (u, v) \mapsto u(n)v \in V$$

$(n \in \mathbb{Z})$ で閉じていることが要請される。また、 $1 = \text{id}_M$ が含まれ、微分で閉じた集合である。 (-1) 積は正規順序積と一致し、元 1 は (-1) 積に関して単位元になる。また、 u の微分 ∂u は $u(-2)1$ と一致する。

頂点代数 V の元 ω が 共形元 であるとは、 $\omega(n) = L_{n-1}$ と表したとき、 L_n たちが Virasoro 代数の交換関係を満たし、 L_{-1} が微分 ∂ と一致することを言う。 V に共形元が存在するとき、共形元を 1 つ固定したものは 頂点作用素代数 (Vertex Operator Algebra, VOA) という。ただし、次の条件を満たす必要がある。線形変換 L_0 が半単純であり、固有値は全て整数で、固有値の分布が下に有

界であり、各固有空間は有限次元となる。 L_0 の固有値は共形ウェイト、固有ベクトルはウェイトベクトルであるという。 2次元共形場理論 (2d CFT) の対称性 (カイラル代数) は VOA である。

中でも、 C_2 余有限 (かつ有理的な) VOA は、指標のモジュラー不変性という性質を満たす [Z]。すなわち既約指標を並べたベクトルが $SL_2(\mathbb{Z})$ 上のウェイト 0 のベクトル値モジュラー関数になる。(個別の指標はある合同部分群上のウェイト 0 のモジュラー関数となることも知られている。) また、有理的という条件を除いてもモジュラー不変性の自然な一般化が成り立つので [M]、本質は C_2 余有限性にあると言える。そこで C_2 余有限 VOA のクラスは最も重要なクラスの 1 つである。 C_2 余有限な VOA には、偶格子に付随する VOA (格子 VOA)、Virasoro 極小模型などがある。分類は知られていない。

定義としては、 C_2 余有限性は、Zhu の Poisson 代数 $R_V = V/V(-2)V$ が有限次元であることを言う。ここで、可換積と Poisson 括弧は V の (-1) 積と (0) 積が誘導する。

1.2. 中心化代数. V を VA とし、 U はその部分 VA とする。 (V における) U の 中心化代数 (commutant) とは、部分 VA

$$\text{Com}(U, V) = \{v \in V \mid [u(n), v(m)] = 0 \ (\forall u \in U, n, m \in \mathbb{Z})\}$$

のことである。中心化代数の研究は物理学者の Goddard, Kent, Olive がアフィン Kac-Moody 代数に付随する VOA の中心化代数として Virasoro 極小模型を構成したことに始まり、既知の VOA から新しい VOA を作る手法として盛んに研究されてきた。

中心化代数は次の表示を持つ：

$$\text{Com}(U, V) = \{v \in V \mid u(n)v = 0 \ (\forall u \in U, \forall n \geq 0)\}.$$

(集合 S が U を生成するとき、条件内の「 $\forall u \in U$ 」はもちろん「 $\forall u \in S$ 」で取り替えても良い。)

V, U が VOA である場合の中心化代数の性質を述べる。(本稿で考察したいのは U が VOA 構造を持たない場合である。) ω, ω' をそれぞれの VOA 構造を与える共形元とする。まず、

$$\text{Com}(U, V) = \text{Ker}_V (L'_{-1}) \tag{1.1}$$

が成り立つ。ただし、 $\omega'(n+1) = L'_n$ と表した。

U が単純である (非自明なイデアルを持たない) 場合には、Schur の補題と似た議論を用いて、 $\text{Ker}_U (L'_{-1})$ は自明部分 VA $\mathbb{C}1$ と一致することが分かる。よって、このとき U と $\text{Com}(U, V)$ の共通部分は自明となる。このことより、中心化代数は コセット とも呼ばれる。

特に、単純 VOA V の中心は自明である。

また、 ω, ω' がある種の条件を満たすとき、元 $\omega - \omega'$ は $\text{Com}(U, V)$ の共形元となり、 $\text{Com}(U, V)$ に VOA 構造を定める。

これまで知られている全ての例において、 U, V が C_2 余有限のときは $\text{Com}(U, V)$ も C_2 余有限であった。また、何らかの仮定が必要であろうが、一般的な枠組みで C_2 余有限性は中心化代数に遺伝するだろうと考えられている。

2. A_1 型格子 VOA

A_1 型ルート格子 $A_1 = \mathbb{Z}\alpha$ を考える. 内積は $(\cdot, \cdot)$ で表す. 1 次元 Lie 環 $\mathfrak{h} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} A_1$ を考え, 付随する Heisenberg Lie 環を $\widehat{\mathfrak{h}}$ と表す. $\widehat{\mathfrak{h}}$ 上の最高ウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}$ の (レベル 1) Fock 加群 (空間) は $M(1, \lambda)$ と表す. $\beta \in \mathfrak{h}$ に対して, 頂点作用素

$$e^\beta = e^\beta(z) = : e^{\int \beta(z) dz} :$$

は, Fock 空間たちに作用する作用素値級数である. ここで, コロンは正規順序積を表す.

さて, $\beta \in A_1$ とすると, e^β は $M = \bigoplus_{\lambda \in A_1} M(1, \lambda)$ 上で閉じているので, M 上の作用素値級数と思おう. A_1 型格子 VA V_{A_1} は e^β ($\beta \in A_1$) で生成された VA である. 生成されたというのは, これらを含む最小の VA であることを意味する. 次の形の元で張られていることがわかる:

$$e^{\varepsilon_1 \alpha}(n_1) \cdots e^{\varepsilon_r \alpha}(n_r) 1 \quad (r \geq 0, \varepsilon_i \in \{\pm\}, n_i \in \mathbb{Z}). \quad (2.1)$$

ただし, 3 つ以上の積は右から読む約束である (VA の積は一般に結合的でない). また, $\beta, \gamma \in A_1$ に対して次が成り立つ:

$$e^\beta(-(\beta, \gamma) - 1)e^\gamma = e^{\beta+\gamma}, \quad e^\beta(n)e^\gamma = 0 \quad (n \geq -(\beta, \gamma)).$$

これより, V_{A_1} は 2 元 $e^{\pm\alpha}$ ですでに生成されている. なお, e^0 は恒等元 $1 = \text{id}$ である.

V_{A_1} は次の共形元に関して VOA になる:

$$\omega = \frac{1}{4}(e^{-\alpha}(-1)e^\alpha + e^\alpha(-1)e^{-\alpha}).$$

単項式 (2.1) はウェイトベクトルであり, 共形ウェイトは $\Delta = -n_1 - \cdots - n_r$ である.

V_{A_1} は単純なので, 中心は自明である. また, C_2 余有限であることが知られている.

3. 主部分空間

V_{A_1} の Feigin-Stoyanovsky 主部分空間 [SF] とは, 元 e^α で生成された部分 VA $W = \langle e^\alpha \rangle$ のことである. これは元々文献 [SF] において, アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の基本表現の部分空間として導入され, 文献 [CLM, CalLM] 等において VA 理論に持ち込まれた. (格子 VA との関わりについては [MP] も参照せよ.)

VOA V_{A_1} の共形元 ω は W に属していない. 実は, W には共形元が 1 つも存在しない. なぜかという, 生成元 e^α 同士の積を計算することにより, W は可換な VA である (W の中心が W と一致する) ことがわかる. 一方, V_{A_1} の元で微分で消えるものは 1 の定数倍のみであり, W は自明 VA でないので, 共形元は W の中心元にはなり得ない. よって, W には共形元は存在しない.

次の単項式の組は W の基底であることが知られている:

$$e^\alpha(-n_r - 2r + 1) \cdots e^\alpha(-n_2 - 3)e^\alpha(-n_1 - 1) 1 \quad (r \geq 0, n_r \geq \cdots \geq n_1 \geq 0). \quad (3.1)$$

元 (3.1) は V_{A_1} のベクトルとして共形ウェイト $\Delta = r^2 + n_1 + \dots + n_r$ のウェイトベクトルである. よって, ω が W に属していないにも関わらず, W は L_0 作用では閉じている. また, 次の形に固有空間分解される:

$$W = \bigoplus_{\Delta=0}^{\infty} W_{\Delta} \quad (W_{\Delta} = \{v \in W \mid L_0 v = \Delta v\}).$$

さて, 基底の元 (3.1) のうち長さが r かつ共形ウェイトが $\Delta = r^2 + n$ であるものは, 整数 n の高々 r 個の自然数への分割と 1 対 1 に対応する. これより, W の斉次元次元の母関数 (指標) $\chi_W(\tau)$ は次の形である:

$$\chi_W(\tau) = \sum_{\Delta=0}^{\infty} \dim(W_{\Delta}) q^{\Delta} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{q^{r^2}}{(q)_r} \quad (q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}, \operatorname{Im}(\tau) > 0).$$

ここで, $(q)_r = (1-q)(1-q^2)\dots(1-q^r)$ とおいた. この関数は (第一) Rogers-Ramanujan 恒等式に現れる:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{q^{r^2}}{(q)_r} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{1+5n})(1-q^{4+5n})}.$$

さらに, 正規化指標 $q^{-1/60} \chi_W(\tau)$ は $\Gamma(5)$ 上のウェイト 0 のモジュラー関数である.

基底 (3.1) の形から, R_W は $1, e^{\alpha}$ の類で張られていることが直ちに従う. よって, W は C_2 余有限である. なお, $R_W \simeq \mathbb{C}[x]/(x^2)$ と表せることがわかる.

W は非自明な可換 VA なので特に単純ではない.

本稿の目的は, 中心化代数 $C = \operatorname{Com}(W, V_{A_1})$ の構造の解明である.

4. 典型的な例との比較

中心化代数の典型的な場合との比較を行う. まず, $V = V_{A_1}$ は通常通り C_2 余有限な単純 VOA である. W は C_2 余有限ではあるが, 単純ではないし, VOA にはなり得ない VA である. また, W は可換であるため, C は W を含んでいる. よって, C と W の共通部分が自明でないので, 通常の「コセット」とは状況が異なる. また, C の中心は W を含むので, 上と同様の理由により共形元を持たない.

W, C は共形元を持たないが, L_n ($n \geq -1$) の作用で閉じていることがわかる (擬共形 VA であるという).

W の指標は通常通りウェイト 0 のモジュラー関数である. また, [K15] の結果より, C の指標は

$$\chi_C(\tau) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{q^{r^2}}{(q)_{2r}} \quad (4.1)$$

の形であることがわかる (後で説明する). これも正規化するとウェイト 0 のモジュラー関数となる.

なお, W は 1 元生成 VA であり, 可換であるため極めて基本的な VA と言える. VOA 理論との関わりもある. すなわち, 中心電荷 $-22/5$ の Virasoro 極小模型 $L(-22/5, 0)$ を考え, それにある

種のフィルターを入れる. すると, 付随する次数つき代数は Poisson 頂点代数として W と同型となる. これより, W は C_2 余有限 VOA と関係している.

以上の状況を踏まえて, C を調べていく.

5. 一般化頂点代数を用いた記述

A_1 の双対格子 $A_1^\circ = \mathbb{Z}\omega$ ($\omega = \alpha/2$) を考える. Fock 空間の和 $\widehat{M} = \bigoplus_{\lambda \in A_1^\circ} M(1, \lambda)$ を考える. $\beta \in A_1^\circ$ に対して, e^β は $\widehat{M}$ 上で閉じている. しかし, β が A_1 に入っていないときは e^β は z の半整数べきの項を含むので, $\{e^\beta \mid \beta \in A_1^\circ\}$ は頂点代数を生成しない. 代わりに, これは一般化頂点代数 (Generalized Vertex Algebra, GVA) [DL] $V_{A_1^\circ}$ を生成する. $V_{A_1^\circ}$ における積は, $n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ に対して定まる. $\beta, \gamma \in A_1^\circ$ に対して次が成り立つ:

$$e^\beta(-(\beta, \gamma) - 1)e^\gamma = e^{\beta+\gamma}, \quad e^\beta(-(\beta, \gamma) + n)e^\gamma = 0 \quad \left(n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_{<0}\right).$$

これより, $V_{A_1^\circ}$ は 2 元 $e^{\pm\omega}$ で生成される. 元 e^α は $V_{A_1^\circ}$ の中で V_{A_1} と同型な頂点代数を生成することに注意せよ (以下 V_{A_1} と同一視する). $e^{\pm\omega}$ の単項式のうち長さが偶数であるものは V_{A_1} を張る.

V_{A_1} の共形元 ω を考える. L_0 は $V_{A_1^\circ}$ に作用し, 元 e^β ($\beta \in A_1^\circ$) は共形ウェイト $\Delta = (\beta, \beta)/2$ のウェイトベクトルとなる. また, 一般に, 共形ウェイト Δ_1, Δ_2 のウェイトベクトル u, v に対し, $u(n)v$ は (0 にならなければ) 共形ウェイト $\Delta_1 + \Delta_2 - n - 1$ のウェイトベクトルになる.

1 元 e^ω のみで生成された部分 GVA を W° と表す. これは [K15] で導入された一般化主部分空間である. W° は次の基底を持つ [K15]:

$$e^\omega\left(-n_r - \frac{r+1}{2}\right) \cdots e^\omega\left(-n_2 - \frac{3}{2}\right) e^\omega(-n_1 - 1)1 \quad (r \geq 0, n_r \geq \cdots \geq n_1 \geq 0). \quad (5.1)$$

さて, GVA の公理を用いると, $e^\alpha(n)$ と $e^\omega(m)$ は任意の $n, m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ に対して (反) 可換であることがわかる. これより, W° と V_{A_1} の共通部分は C に含まれることが直ちに従う. それどころか実は完全に一致することがわかる [K15]. これより, 単項式 (5.1) のうち長さ r が偶数であるものは, C の基底 $\mathcal{B}$ をなす. (これより前節の指標公式 (4.1) も従う.)

6. 主結果

本節では論文 [K23] の主結果を述べる. 次の C の元を考える:

$$\Phi(n, m) = e^\omega(-m - 3/2)e^\omega(-n - 1)1 \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

このうち $m \geq n \geq 0$ であるものは基底 $\mathcal{B}$ の長さ 2 の元全体をなす. なお, n, m の順番を入れ替えると一般には異なる元になる.

$\phi_n = \Phi(n, n)$ ($n \geq 0$) とおくと, $\phi_0 = e^\alpha$ である. また, $\phi_1(1)\phi_1 = -\frac{25}{32}e^{2\alpha}$ であることがわかるので, C は可換 VA ではない.

命題 1. $\mathcal{B}$ の部分集合 $\{\Phi(n, m) \mid m \geq n \geq 0\}$ は C を生成する.

さて、頂点代数は微分で閉じていた。 $\Phi(n, m)$ の微分は次の形で表される：

$$\partial(\Phi(n, m)) = \left(m + \frac{3}{2}\right)\Phi(n, m+1) + (n+1)\Phi(n+1, m) \quad (n, m \in \mathbb{Z}).$$

これより、 $\Phi(n, m)$ のうち $n = m$ であるもの、すなわち $\phi_0, \phi_1, \dots$ が C を生成していることは想像に難くないだろう。 $\Phi(n+1, n)$ が $\Phi(n, n)$ の微分に現れることに注意が必要だが、結果として次が成り立つことがわかった。

定理 2. 集合 $S = \{\phi_0, \phi_1, \dots\}$ は C の極小生成系である。さらに、 S は C を強生成している。

ここで強生成するとは、負の n に対応する (n) 積のみで生成されることをいう。
さらに次が従う。

定理 3. Zhu の *Poisson* 代数 R_C は 1 と $\phi_0, \phi_1, \dots$ の類を基底として持つ。さらに、 *Poisson* 代数として

$$R_C \simeq \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]/(x_i x_j \mid i, j \geq 1)$$

と表される。ただし、 *Poisson* 括弧は零である。

最後に、 $\text{Com}(C, V_{A_1})$ は明らかに W を含むが、実は一致することがわかった。

定理 4. $\text{Com}(C, V_{A_1}) = W$ 。

通常のコセットの理論でもこの双対性が満たされるように部分代数が選ばれる。

7. 考察

定理 2 より次が従う。

系 5. C は無限生成である。特に、 C_2 余有限でない。

(C_2 余有限でないことは、定理 3 から直ちに読み取れる。) V_{A_1}, W は C_2 余有限なので、 C_2 余有限性の遺伝は少なくとも頂点代数の範囲では成り立たないことが確定した。

しかしながら、 C は指標がウェイト 0 のモジュラー関数になるため、 C_2 余有限 VA に近いと考えられる。実際、定理 3 の表示より次が従う。

系 6. C の随伴多様体 $X_C = \text{Specm}(R_C)$ は 1 点のみからなる。

有限強生成かつ非負数で字数づけられた VA は、 C_2 余有限であることと随伴多様体が 1 点からなることと同値であるため ([A]), C は C_2 余有限 VA に近い VA だと言えるだろう。

通常のコセットの具体例においては, 部分代数 U と中心化代数 $X = \text{Com}(U, V)$ との交わりが自明であり, V, U, X は C_2 余有限 (かつ有理的な) 単純 VOA となり, 双対性 $\text{Com}(X, V) = U$ が成り立つ. このとき, $U \otimes X$ は V の部分 VOA となり, $U \otimes X$ -加群として

$$V \simeq \bigoplus_{\ell=0}^{\ell} U_{\ell} \otimes X_{\ell} \quad (U_{\ell}, X_{\ell} \text{ は既約 } U, X\text{-加群}, U_0 \simeq U, X_0 \simeq X)$$

と分解する. 本稿の例では C が W を含むので, このような分解は存在しないが, それにも関わらず, 指標のレベルでは同様の分解公式が存在する. また, これは [BFL] の Urod VOA による V_{A_1} の分解から従う指標の分解公式と一致する. さらに, [K14] の 中間 VA $V_{E_{7+1/2}}$ とも関係する.

このように, C は面白い性質をもった VA である. 今後とも調べていきたい.

謝辞. 本研究は, 文部科学省卓越研究員事業, 科研費 (課題番号:19KK0065, 21K13775, 21H04993) および京都大学数理解析研究所の助成を受けたものである. 研究集会での講演を薦めてくださった山内博氏並びに代表者の中空大幸氏に感謝する.

REFERENCES

- [A] Arakawa, T., “A remark on the C_2 -cofiniteness condition on vertex algebras.” Math. Z. **270** (2012): 559–575.
- [BFL] Bershtein, M., B. Feigin, and A. Litvinov, “Coupling of two conformal field theories and Nakajima-Yoshioka blow-up equations.” Lett. Math. Phys. **106** (2016): 29–56.
- [CLM] Capparelli, S., J. Lepowsky, and A. Milas, “The Rogers-Ramanujan recursion and intertwining operators.” Comm. Contemp. Math. **5** (2003): 947–966.
- [CalLM] Calinescu, C., J. Lepowsky, and A. Milas, “Vertex-algebraic structure of the principal subspaces of certain-modules, I: level one case.” Int. J. Math. **19** (2008): 71–92.
- [DL] Dong, C. and J. Lepowsky, “Generalized vertex algebras and relative vertex operators.” Springer, (1993).
- [K14] Kawasetsu, K. “The intermediate vertex subalgebras of the lattice vertex operator algebras.” Lett. Math. Phys. **104** (2014): 157–178.
- [K15] Kawasetsu, K., “The free generalized vertex algebras and generalized principal subspaces.” J. Alg. **444** (2015): 20–51.
- [K23] Kawasetsu, K. “On the commutant of the principal subalgebra in the A_1 lattice vertex algebra.” Lett. Math. Phys. **113** (2023): 123.
- [MP] Milas, A., and M. Penn., “Lattice vertex algebras and combinatorial bases: general case and W-algebras.” N.Y. J. Math. **18** (2012): 621–650.
- [M] Miyamoto, M., “Modular invariance of vertex operator algebras satisfying C_2 -cofiniteness.” Duke Math. J. **122** (2004): 51–91.
- [SF] Stoyanovskii, A. V., and B. L. Feigin, “Functional models for representations of current algebras and semi-infinite Schubert cells.” Funct. Anal. Appl. **28** (1994): 55–72.
- [Z] Zhu, Y., “Modular invariance of characters of vertex operator algebras.” J. Amer. Math. Soc. **9** (1996): 237–302.