Relative projective modules for blocks with metacyclic defect groups

東京理科大学大学院・理学研究科数学専攻 田口 宏明
Hiroaki Taguchi
Department of Mathematics
Tokyo University of Science

1　はじめに

本稿は切刀直子氏との共同研究に基づく．
有限群 G に対して, Maschke の定理から, 複素係数の群環 $\mathbb{C}G$ は半単純多元環となる．すなわち, 全行列環のいくつかの直和となるため, 既約表現たちを調べれば十分である．一方で, 体 k の標数 p が正標数であり, G の位数を割り切る場合には, 群環 kG は半単純多元環とならない．そこで, 次のような両側イデアルでの直既約分解を考える．

$$kG = B_0 \oplus B_1 \oplus \cdots \oplus B_l$$

この直和因子 B_i を kG のブロックという．各ブロックは k 多元環となり, このような分解は一意的である．また, 有限生成 kG 加群 U に対して, B_i のみが U を零化しない場合には, U は B_i に属するという．(特に断りのない限り, 本稿では加群と言えば有限生成左加群を表すものとする．) 単純加群や, 直既約加群は必ずいずれかのブロックに属し, 相異なるブロックに属する加群たちの間の準同型は零写像のみとなるため, モジュラー表現論においては, ブロックに着目して研究が行われている．特に自明表現に対応する kG 加群 k_G が属するブロックは主ブロックといい, $B_0(kG)$ と表す.

ブロック B に対しては, 次の全射が分裂するような G の極小 p 部分群 D が G 共役の違いを除いて一意に定まる．

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_{kD} B & \longrightarrow & B \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \alpha \otimes \beta & \longmapsto & \alpha\beta \end{array}$$

このような p 部分群を B の不足群という．特に, $B_0(kG)$ の不足群は G の Sylow p 部分群となる．Brauer は kG のブロックと, その不足群の正規化群上の群環のブロックを結びつける重要な定理を示した.

定理 1.1 (Brauer の第一主定理)**.** D を G の p 部分群とすると, kG のブロックのうち, D を不足群に持つものたちと $kN_G(D)$ のブロックのうち, D を不足分に持つものたちの間には一対一対応が存在する.

この対応を Brauer 対応という．特に, P を G の Sylow p 部分群としたとき, $B_0(kG)$ は $B_0(kN_G(P))$ と Brauer 対応する．さらに Broué によって Brauer 対応するブロックに関する予想が提出された.

予想 1.2 (Broué, [2])**.** B を kG のブロックとし, D をその不足群とする．このとき, D が可換であれば, B と, それと Brauer 対応する $kN_G(D)$ のブロックの間には導来同値が存在するのではないか?

この予想はいくつかの場合には正しいことが示されており, その一つとして, 不足群 D が巡回群の場合が示

されている．

一方で, p が奇素数であり, 有限群 G が非可換メタ巡回群 $C_{p^a} \rtimes C_p (2 \leq a)$ に同型な Sylow p 部分群 P を持つ場合, G の指数 p の正規部分群 G_0 と位数 p の部分群 Q が存在し, $G = G_0 \rtimes Q$ となる．加えて G の Sylow p 部分群 P_0 は位数が C_{p^a} の巡回群となる．さらに, P_0 の G 上の正規化群 $N_G(P_0)$ は $N_G(P_0) = N_{G_0}(P_0) \rtimes Q$ となる．G_0 は巡回群 P_0 を Sylow p 部分群に持ち, $B_0(kG_0)$ の不足群は P_0 となるため, Broué 予想の成立が確認されている場合となっている．すなわち, $B_0(kG_0)$ と Brauer 対応する $B_0(kN_{G_0}(P_0))$ の間には導来同値が存在する．したがって, $B_0(kG)$ と $B_0(N_G(P_0))$ の間の導来同値の成立が期待されている．

ブロックの間の導来同値を考察する手法の一つとして, 導来同値より”弱い”同値関係である森田型安定同値を構成し, それについて調べるというものがある [4]．また, 主ブロックの間の森田型安定同値を構成する方法が Rouquier[6] によって示され, Okuyama はこの方法を用いて $B_0(kG)$ と $B_0(kN_G(P_0))$ の間の森田型安定同値を構成した [5]．そこでは相対射影被覆が重要な役割を担っている．加えて, 構成された森田型安定同値を調べ, 導来同値の存在を検証する上では単純加群の相対射影被覆に関する考察が必要となる．本研究はこのような動機のもとで相対射影被覆について考察を行った．

2　相対射影加群と相対射影被覆

本節では G を有限群, k を正標数 p の代数閉体とし, p が G の位数を割り切るとする．相対射影性には様々な特徴づけが存在するが, 本稿では次のように定義する．

定義 2.1. *H を G の部分群とする, このとき, kG 加群 M が relatively H-projective であるとは, ある kH 加群 N に対して, M が $N\uparrow^G = kG \otimes_{kH} N$ の直和因子となることをいう．*

これは M が $M\downarrow_H\uparrow^G$ の直和因子となることと同値である．また, 部分群 H が単位元からなる自明な部分群 $\{1\}$ の場合, $kG \otimes_{kH} M$ は kG の $\dim M$ 個のコピーの直和となるため, M が射影的であることと, relatively $\{1\}$-projective であることは同値となる．注意として, G の Sylows p 部分群を P とすると, 全ての kG 加群は relatively P-projective となる．

kG 加群 M が直既約の場合, M が relatively projective となるような極小の p 部分群が定まる．すなわち, G のある p 部分群 R が存在し, 次を満たす．

- M は relatively R-projective である．
- G の部分群 H に対して, M が relatively H-projective ならば, R は H の部分群のいずれかと G 共役となる．

この R を M の vertex といい, G 共役の違いを除いて一意に定まる．

次に relative projective cover を定める．

定義 2.2. *H を G の部分群, M を kG 加群とする．このとき, 次の kG 加群の完全列*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

が次の 3 つの条件を満たすとき, M の relative H-projective cover という．

(1) *X は relatively H-projective である．*
(2) *この完全列は kH 加群の完全列として分裂する．*
(3) *N はゼロでない relatively H-projective な直和因子を持たない．*

簡単のため, X を M の relative H-projective cover ともいう．また, X を $P_H(M)$, N を $\Omega_H(M)$ と表す．

Relatively projectivity の場合と同様にして, H が単位元からなる自明な部分群のとき, relative H-projective cover は通常の projective cover と一致する. G の部分群 H に対して, kG 加群 M の relative H-projective cover は常に存在し, 同型の違いを除いて一意に定まる. また, X が直既約ならば, (1) と (2) から (3) が従う.

自明加群の relative projective cover は次のような加群となる.

命題 2.3. G の部分群 H に対して, $k_H\uparrow^G$ の直既約因子のうち, 自明 kG 加群 k_G への全射が存在するものが一意的に存在する.

この加群を H に関する Scott kG 加群といい, $\mathrm{Sc}(G,H)$ と表す. 加えて $\mathrm{Sc}(G,H)$ は k_G の relative H-projective cover となる. よって, 次の H 分裂する kG 加群の完全列が存在する.

$$0 \longrightarrow \Omega_H(k_G) \longrightarrow \mathrm{Sc}(G,H) \longrightarrow k_G \longrightarrow 0$$

この完全列に kG 加群 M を k 上でテンソルすることで次の完全列を得る.

$$0 \longrightarrow \Omega_H(k_G)\otimes_k M \longrightarrow \mathrm{Sc}(G,H)\otimes_k M \longrightarrow k_G\otimes_k M \longrightarrow 0$$

この完全列はまた, H 分裂する完全列となる. 加えて, $k_G\otimes_k M\cong M$ である. さらに, $\mathrm{Sc}(G,H)\otimes_k M$ は $k_H\uparrow^G\otimes_k M$ の直和因子であり,

$$k_H\uparrow^G\otimes_k M\cong (k_H\otimes_k M\downarrow_H)\uparrow^G$$

であるため, $\mathrm{Sc}(G,H)\otimes_k M$ は relatively H-projective となる. よって上の完全列は M の relative H-projective cover の条件 (1) と (2) を満たす.

3 非可換メタ巡回群を Sylow 部分群に持つ有限群とその群環

はじめに述べたように, 本稿では次のような有限群たちとその群環たちについて考察する. p を奇素数とし, k を標数 p の代数閉体とする. G を有限群とし, その位数が p で割り切れるものとする. 加えて, G は非可換メタ巡回群 $C_{p^a}\rtimes C_p (2\leq a)$ に同型な Sylow p 部分群を持つとする. このとき, G のある正規部分群 G_0 と G のある p 部分群 Q が存在し, $G=G_0\rtimes Q$ となる. P を Q を含む G の Sylow p 部分群とし, $P_0=P\cap G_0$ とおくと, $P=P_0\rtimes Q$ となる. 加えて, P_0 は G_0 の Sylow p 部分群であり, 位数が p^a の巡回群と同型となる. また, $H=N_G(P_0), H_0=N_{G_0}(P_0)$ とすると, $N_G(P_0)=N_{G_0}(P_0)\rtimes Q$ となる. これを図で表すと次のようになる.

$$\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[r, dash, "\lhd"] \arrow[d, dash] & G=G_0\rtimes Q \arrow[d, dash] \\
N_{G_0}(P_0) \arrow[r, dash, "\lhd"] & N_G(P_0)=N_{G_0}(P_0)\rtimes Q
\end{tikzcd}$$

この状況のもとで, $B_0(kH)$ に属する単純加群たちと $B_0(kG)$ に属する単純加群たちの relative Q-projective cover を求めていく.

単純 kG 加群たちのなかで, $B_0(kG)$ に属するものたちの同型類の完全代表系を $\mathrm{IBr}(B_0(kG))$ と表す. $\mathrm{IBr}(B_0(kH))$ や, $\mathrm{IBr}(B_0(kG_0)), \mathrm{IBr}(B_0(kH_0))$ についても同様に定義する.

$\mathrm{IBr}(B_0(kG))$ と $\mathrm{IBr}(B_0(kG_0))$ の関係については次のような事実が示されている.

補題 3.1 ([3, Lemma2.2])**.** 次の一対一対応が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{IBr}(B_0(kG)) & \longrightarrow & \mathrm{IBr}(B_0(kG_0)) \\ \cup & & \cup \\ S & \longmapsto & S\downarrow_{G_0} \end{array}$$

G を H, G_0 を H_0 としても同様の事実が成り立つ.

また, G_0 は巡回群 P_0 を Sylow p 部分群に持ち, その G_0 上での正規化群は H_0 であるため, Broué 予想の成立が確認されている場合となっている. すなわち, $B_0(kG_0)$ と $B_0(kH_0)$ は導来同値である. 導来同値によって保たれる性質の一つとして, 単純加群の同型類の個数がある. したがって, $|\,\mathrm{IBr}(B_0(kG_0))| = |\,\mathrm{IBr}(B_0(kH_0))|$ となる. 加えて上の対応とあわせることで,

$$|\,\mathrm{IBr}(B_0(kG))| = |\,\mathrm{IBr}(B_0(kG_0))| = |\,\mathrm{IBr}(B_0(kH_0))| = |\,\mathrm{IBr}(B_0(kH))|$$

となる. これらの同型類の個数を n とおく.

4 kH の主ブロックに属する単純加群とその relative Q-projective cover たち

この節では $B_0(kH)$ に属する単純加群の relative Q-projective cover について考察する.

補題 4.1. $B_0(kH)$ に属する単純 kH 加群 T に対して, $\mathrm{Sc}(H,Q)\otimes_k T$ は T の relative Q-projective cover である.

証明. 次の完全列は T の relative Q-project cover の条件 (1) と (2) を満たす.

$$0 \longrightarrow \Omega_Q(k_H)\otimes_k T \longrightarrow \mathrm{Sc}(H,Q)\otimes_k T \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

加えて, $\mathrm{Sc}(H,Q)\otimes_k T$ が直既約であることがわかるため, relative Q-projective cover の条件 (3) が (1) と (2) から従う. それゆえ, $\mathrm{Sc}(H,Q)\otimes_k T$ は T の relative Q-projective cover である. □

また, $T_1,\ldots,T_n$ を $B_0(kH)$ に属する相異なる単純 kH 加群全体としたとき, それらの relative Q-projective cover たちについて次のことがわかる.

補題 4.2. $P_Q(T_1),\ldots,P_Q(T_n)$ が $B_0(kH)$ に属する相異なる $k_Q\uparrow^H$ の直既約因子全体である.

加えて, これらが射影的でない, すなわち, Q をバーテックスにもつこともわかる. したがって, Broué の結果 [1, (3.2)] を用いることで, $|\,\mathrm{IBr}(B_0(kC_{H_0}(Q)))| = n$ がわかる.

5 kG の主ブロックに属する単純加群とその relative Q-projective cover たち

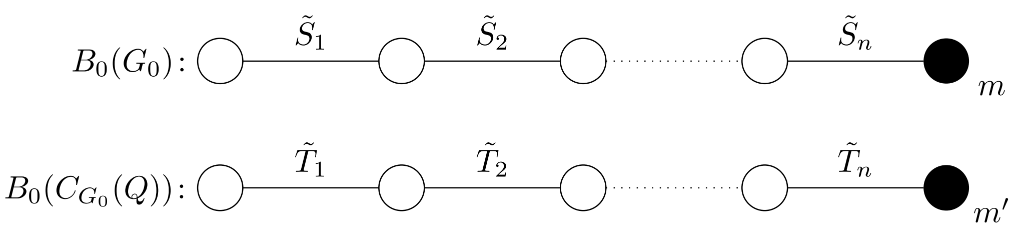
[5] において, $B_0(kG)$ と $B_0(kH)$ の間の森田型安定同値を構成する過程で, $B_0(kC_{G_0}(Q))$ と $B_0(kC_{H_0}(Q))$ の間の導来同値が構成されている. したがって, $|\,\mathrm{IBr}(B_0(kC_{G_0}(Q)))| = |\,\mathrm{IBr}(B_0(kC_{H_0}(Q)))| = n$ となる. よって, $B_0(kH)$ の場合と同様に, Broué の結果から, $k_Q\uparrow^G$ の射影的でない直既約因子のうち, $B_0(kG)$ に属するものの同型類の個数も n となる. この同型類の完全代表系を $X_1,\ldots,X_n$ とする. また, $S_1,\ldots,S_n$ を $B_0(kG)$ に属する相異なる単純加群全体とする.

いくつかの仮定のもと, 次の結果を示した.

定理 5.1. 仮定 5.2 と仮定 5.3 のもと, 適切に添字を入れ替えることで, $1 \le i \le n$ に対して, X_i は S_i の relative Q-projective cover となる.

仮定の内容について述べる. $B_0(kG_0)$ の不足群は G_0 の Sylow p 部分群 P_0 で, 巡回群であるため, $B_0(kG_0)$ は Brauer tree algebra となり, 直既約射影加群の根基列が Brauer tree から決定される. 同様に, $B_0(kC_{G_0}(Q))$ の不足群は $C_{G_0}(Q)$ の Sylow p 部分群で, 特に巡回群であるため, $B_0(kC_{G_0}(Q))$ も Brauer tree algebra となる. これらの Brauer tree について仮定をつける.

仮定 5.2. $B_0(kG_0)$ と $B_0(kC_{G_0}(Q))$ の Brauer tree は次の通り.



ただし, $\{\tilde{S}_1, \ldots, \tilde{S}_n\} = \mathrm{IBr}(B_0(kG_0))$ かつ, $\{\tilde{T}_1, \ldots \tilde{T}_n\} = \mathrm{IBr}(B_0(kC_{G_0}(Q)))$ である. 加えて, $\tilde{S}_1$ は自明 kG_0 加群であり, $\tilde{T}_1$ は自明 $kC_{G_0}(Q)$ 加群である.

[1, (3,2)] から各 X_i たちは $B_0(kC_{G_0}(Q))$ に属する直既約射影加群たちと Q に関する Brauer construction によって対応しているため, X_i たちの添字を, X_i が $\tilde{T}_i$ の射影被覆と対応するように付け替える. また, S_i たちの添字を, $S_i \downarrow_{G_0} \cong \tilde{S}_i$ となるように付け替える. 加えて, $X_1, \ldots, X_{n-1}$ について次の仮定を課した.

仮定 5.3. $1 \le i \le n-1$ に対して, $X_i \downarrow_{G_0}$ は直既約である.

定理の仮定は以上となる. これらの仮定を満たす例として, $p = 3$ における $SL(2, 2^3) \rtimes C_3$ などがある.

参考文献

[1] M. Broué. On Scott modules and p-permutation modules: an approach through the Brauer morphism. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 93(3):401–408, 1985.

[2] M. Broué. Equivalences of blocks of group algebras. In *Finite-dimensional algebras and related topics (Ottawa, ON, 1992)*, Vol. 424 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci.*, pp. 1–26. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.

[3] M. Holloway, S. Koshitani, and N. Kunugi. Blocks with nonabelian defect groups which have cyclic subgroups of index p. *Arch. Math. (Basel)*, 94(2):101–116, 2010.

[4] T. Okuyama. Some examples of derived equivalent blocks of finite groups. *preprint*, 1997.

[5] T. Okuyama. Relative projective covers and the brauer construction over finite group algebras (cohomology theory of finite groups and related topics). 第 1784 巻, pp. 77–95. 京都大学数理解析研究所, 3 2012.

[6] R. Rouquier. Block theory via stable and Rickard equivalences. In *Modular representation theory of finite groups (Charlottesville, VA, 1998)*, pp. 101–146. de Gruyter, Berlin, 2001.