Relative stable equivalences of Morita type and Morita equivalences for blocks of finite groups

東京理科大学　功刀 直子
Naoko Kunugi
Tokyo University of Science
東京理科大学　鈴木 香一
Kyoichi Suzuki
Tokyo University of Science

1　はじめに

有限群のモジュラー表現における問題は主に，与えられた有限群の素数 p に関する表現の情報は p 部分群の正規化群など p 局所部分群の表現の情報から得られるのではないかという考えに基づいている。p 局所構造が同じ 2 つの有限群のブロックでは，表現論的な情報が保たれるのではないかと考えられ，とくに加群の圏やその導来圏の関係について調べることは重要である。

予想 1.1（Broué[1]） G, H を有限群とし，共通の Sylow p 部分群 P をもち，p 局所構造が一致する（すなわち，G, H の P 上のフュージョン・システム $\mathcal{F}_P(G)$ と $\mathcal{F}_P(H)$ 一致がしている）とする。P がアーベル群であるとき，G と H の主 p ブロックは導来同値ではないか？

この予想は，これまでに主に p ランクの小さい群について，具体的に検証されてきた。例えば，以下がある。

例 1（[7], [3]） $p=3$ とする。次が成立する。

(1) q は $(q-1)_3=3$ を満たす素数べきとし，$G=PSL(3,q)$ とする。G の Sylow 3 部分群を P とすると $P\cong C_3\times C_3$ であり，$\mathcal{F}_P(G)=\mathcal{F}_P(N_G(P))$ である。このとき，G の主 3 ブロックと $N_G(P)$ の主 3 ブロック は導来同値である。

(2) q_1, q_2 は $(q_1-1)_3=(q_2-1)_3=3$ を満たす素数べきとする。$G_1=PSL(3,q_1)$, $G_2=PSL(3,q_2)$ は共通の Sylow 3 部分群 $P\cong C_3\times C_3$ をもち，$\mathcal{F}_P(G_1)=\mathcal{F}_P(G_2)$ である。このとき，G_1 と G_2 の主 3 ブロックは森田同値である。

Broué の予想は，P が非可換の場合には成立しない例があるが，例 1(2) のような Lie 型の有限

群の無限系列で現れる群における森田同値は，P が非可換の場合にも期待されており，主ブロック間の森田同値を構成する手法について研究することは重要である。

本稿では，p 局所構造を共有する 2 つの群の主ブロック間の森田同値について，これまで困難とされてきた中心に非自明な p 部分群をもつ場合に適用できる構成法を述べる。

以下，G を有限群とし，p を素数，k を標数 p の代数的閉体とする。加群は特に断らないときは右加群とし，有限生成であるとする。kG の主ブロックを $B_0(G)$ で表す。G の p 部分群 P に対し，G の P 上のフュージョン・システムを $\mathcal{F}_P(G)$ で表す。

2　森田同値の構成について知られている手法

有限群 G と H は共通の Sylow p 部分群 $P(\neq 1)$ をもつとし，$A = B_0(G)$, $B = B_0(H)$ とする。M を (A, B) 両側加群とし，次の状況を仮定する。

($\star$) M は左 A 加群，右 B 加群として射影的であり，両側加群としての同型

$$M \otimes_B M^* \cong A \oplus X$$
$$M^* \otimes_A M \cong B \oplus Y$$

があるとする。ただし，M^* は M の k 双対加群である。

定義 2.1　(1)　($\star$) において $X = 0$ かつ $Y = 0$ となるとき，M は A と B の間の森田同値を誘導するという。

(2)　($\star$) において X と Y が射影的となるとき，M は A と B の間の森田型安定同値を誘導するという。

定義より，森田同値なら森田型安定同値である。M が森田同値を誘導するとき，$- \otimes_A M$ は加群圏の同値を与え，森田型安定同値を誘導するときは，$- \otimes_A M$ は安定圏の同値を与える。

森田型安定同値と森田同値に関して，次の定理はとても重要である。

定理 2.2（Linckelmann [6]）　M を直既約 (A, B) 両側加群で A と B の森田型安定同値を誘導するとする。このとき，次が成立する。

(1)　任意の単純 A 加群に対し，$S \otimes_A M$ は直既約 B 加群である。

(2)　任意の単純 A 加群に対し，$S \otimes_A M$ が単純加群となるならば，M は A と B の間の森田同値を誘導する。

$\Delta(P) = \{(x, x) | x \in P\} \leq G \times H$ とする。$S(G \times H, \Delta(P))$ を $\Delta(P)$ に関する Scott 加群 (誘導加群 $k_{\Delta(P)} \uparrow^{G \times H}$ において自明加群 $k_{G \times H}$ を部分加群にもつ唯一の直既約因子) を表す。$\mathcal{F}_P(G) = \mathcal{F}_P(H)$ のとき，$M = S(G \times H, \Delta(P))$ とすると，($\star$) を満たす。この M が主ブロック間の森田型安定同値を誘導する条件は，Broué のはり合わせ定理とよばれる次の定理で与えられ

ている。

定理 2.3（Broué [2]） $\mathcal{F}_P(G)=\mathcal{F}_P(H)$ と仮定する。$M=S(G\times H,\Delta(P))$ とする。このとき，次は同値である。

(1) M は A と B の間の森田型安定同値を誘導する。

(2) $1\lneq\forall Q\leq P$ に対し，Brauer construction $M(\Delta(Q))$ は $B_0(C_G(Q))$ と $B_0(C_H(Q))$ の森田同値を誘導する。

定理 2.2，定理 2.3 を組み合わせて

1. 各 p 部分群 $Q(\neq 1)$ に対し，中心化群の主ブロック $B_0(C_G(Q))$ と $B_0(C_H(Q))$ の間の森田同値を構成する
2. それらをはり合わせることで $B_0(G)$ と $B_0(H)$ の間の森田型安定同値を構成する
3. その森田型安定同値での単純加群の像がまた単純になることを示す

という，森田型安定同値を構成しそれを森田同値をもちあげるという構成法が考えられる。実際，例 1 や他の多くの例で，この方法で森田同値が示されている。

3 森田型相対安定同値と主結果

G, H が非自明な中心的 p 部分群をもつ場合には，前節で確認した定理 2.2, 2.3 を組み合わせる方法は使えない。そこで，Wang-Zhang により導入された森田型安定同値を一般化した森田型相対安定同値を用いて，森田同値を構成することを考える。

A を G の主ブロックとし，Q を G の p 部分群とする。A 加群 U は

$$U\otimes_{kQ}A\longrightarrow U,\ u\otimes a\mapsto ua$$

が A 準同型として分裂するとき，Q 射影的であるという。A 加群 U, V と A 準同型 $f:U\longrightarrow V$ について，f が Q 射影的であるとは，Q 射影的 A 加群 W と A 準同型 $g:U\longrightarrow W$, $h:W\longrightarrow V$ が存在し，$f=h\circ g$ となることである。

Q 相対安定圏 $\underline{\mathrm{mod}}^Q A$ とは，A 加群を対象とし，

$$\mathrm{Hom}_A^Q(U,V)=\mathrm{Hom}_A(U,V)/\{f\in\mathrm{Hom}_A(U,V)\mid f:Q\text{-射影的}\}$$

を射の集合とする圏である。これは，三角圏の構造をもつ。

定義 3.1（Wang-Zhang [8]） G と H は Q を共通の p 部分群としてもつ有限群とし， A, B を kG, kH の主ブロックとする。(A,B) 両側加群 M があり，$(Q\times Q)$projective $k[G\times G]$ 加群 X, $(Q\times Q)$projective $k[H\times H]$ 加群 Y により，§2 における $(\star)$ を満たしているとき，A と B は M により森田型相対 Q 安定同値であるという。

注意 3.2　一般に，A と B が M により森田型相対 Q 安定同値であるときに，$-\otimes_A M$ は $\underline{\mathrm{mod}}^Q A$ から $\underline{\mathrm{mod}}^Q B$ への圏同値を与えるとは限らない。

以下，G と H は共通の Sylow p 部分群 P をもち，$\mathcal{F}_P(G) = \mathcal{F}_P(H)$ が成立しているとする。G と H は中心に p 部分群 $Z \neq P$ をもつとする。

Broué の定理 (定理 2.3) に対応するものとして，以下の定理を得た。

定理 3.3（K-Suzuki [4]）　G と H は共通の Sylow p 部分群 P をもち，$\mathcal{F}_P(G) = \mathcal{F}_P(H)$ が成立しているとする。さらに G, H は中心に p 部分群 $Z \lneq P$ をもつとし，$M = S(G \times H, \Delta(P))$ とする。このとき，次は同値である。

(1)　M は $B_0(G)$ と $B_0(H)$ の間の 森田型相対 Z 安定同値を誘導する。
(2)　$Z \lneq \forall Q \leq P$ に対し，Brauer construction $M(\Delta(Q))$ は $B_0(C_G(Q))$ と $B_0(C_H(Q))$ の森田同値を誘導する。

Linckelmann の定理 (定理 2.2) に対応するものとして，以下の定理を得た。

定理 3.4（K-Suzuki[4]）　G と H は共通の Sylow p 部分群 P をもち，$\mathcal{F}_P(G) = \mathcal{F}_P(H)$ が成立しているとする。さらに G, H は中心に p 部分群 $Z \lneq P$ をもつとし，$M = S(G \times H, \Delta(P))$ が $A = B_0(G)$ と $B = B_0(H)$ の間の森田型相対 Z 安定同値を導くと仮定する。このとき，次が成立する。

(1)　M は $\underline{\mathrm{mod}}^Z A$ と $\underline{\mathrm{mod}}^Z B$ の間の三角圏としての同値を導く。
(2)　任意の単純 $B_0(G)$ 加群 S に対し，$S \otimes_{B_0(G)} M$ は直既約である。
(3)　任意の単純 $B_0(G)$ 加群 S に対し，$S \otimes_{B_0(G)} M$ が単純であれば，M は森田同値を誘導する。

定理 3.3, 3.4 を組み合わせることで，非自明な中心的 p 部分群 Z を持つ場合に

1. 各 p 部分群 $Z \lneq Q$ に対し，中心化群の主ブロック $B_0(C_G(Q))$ と $B_0(C_H(Q))$ の間の森田同値を構成する
2. それらをはり合わせることで $B_0(G)$ と $B_0(H)$ の間の森田型相対 Z 安定同値を構成する
3. その森田型相対 Z 安定同値での単純加群の像がまた単純になることを示す

という，森田型相対 Z 安定同値を構成しそれを森田同値へ持ち上げるという構成法が得られたことになる。

この方法を適用することで，K-Suzuki([5]) において 2 次一般線形群における森田同値が得られている。

参考文献

[1] M. Broué, Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées, *Astérisque* **181-182** (1990), 61–92.

[2] M. Broué, Equivalences of blocks of group algebras, in Finite Dimensional Algebras and Related Topics, (edited by V. Dlab and L.L. Scott) Kluwer Acad. Pub., Dordrecht, 1994, pp.1–26.

[3] N. Kunugi, Morita equivalent 3-blocks of the 3-dimensional projective special linear groups, *Proc. London Math. Soc.* (3) **80** (2000), no. 3, 575–589.

[4] N. Kunugi and K. Suzuki, Relative stable equivalences of Morita type for the principal blocks of finite groups and relative Brauer indecomposability, *J. Group Theory* 26 (2023), no.6, 1157–1184.

[5] N. Kunugi and K. Suzuki, Splendid Morita equivalences for the principal 2-blocks of 2-dimensional general linear groups in non-defining characteristic, SUT Journal of Mathematics, Vol.59 (2023), No.2, 117-135.

[6] M. Linckelmann, Stable equivalences of Morita type for self-injective algebras and $p$groups, *Math. Z.* **223** (1996), 87-100.

[7] T. Okuyama, Some examples of derived equivalent blocks of finite groups, preprint (1998)

[8] L. Wang and J. Zhang, Relatively stable equivalences of Morita type for blocks, *J. Pure Appl. Algebra* 222 (2018), no. 9, 2703–2717.