冪零クラス 2 の群と原田予想 II

宮本雅彦, 筑波大学名誉教授

1 序文

有限群 G に対して，共役類と既約指標の間にはある種の関係があることは知られている．例えば，共役類の個数と既約複素指標の個数は一致する．原田耕一郎 [2] は複素既約指標の次数の全体の積は共役類のサイズの全体の積を割るだろうという不思議な予想を提出した．

原田予想 II G を有限群，$\mathrm{Irr}(G)=\{\chi_1,...,\chi_k\}$ を G の複素既約指標の集合，$\{K_1,...,K_k\}$ を G の共役類の集合とすると，$\prod_{i=1}^{k}\chi_i(1)$ は $\prod_{i=1}^{k}|K_i|$ を割る．

散在型有限単純や交代群やいくつかの線形群に対して，この予想が正しいことは指標表を調べることで確認されている ([1], [3], [4] を参照). また，アーベル群に対しては自明である．しかしながら，指標表を正確に決定できない状況では，有限群論の一般的な手法である位数に関する帰納法が使えないために，ほとんど結果が示されていない．この講演では，冪零クラス 2 の有限群に対して原田予想 II が成り立つことを証明する．

もし G が直積 $A\times B$ なら，G の共役類は A の共役類と B の共役類の積であり，G の既約指標は A と B の既約指標の積なので，A と B の両方が原田予想 II を満たせば，G も原田予想 II を満たす．以下，冪零クラス 2 の p-群のみを扱う．

2 用語と簡略化

以下の用語を使う．

記号 1 $E=[G,G]$, $T=G/E$, $|E|=p^m$, 且つ $|T|=p^n$ と置く. 仮定より $E\subseteq Z(G)$ である. $\alpha\in T$ に対して, $D_\alpha=[\alpha,G]$ と置く．これは E の部分群である. $m_\alpha:=\log_p(|D_\alpha|)$ と置く．すなわち, $|D_\alpha|=p^{m_\alpha}$ である. $\{\alpha^g\mid g\in G\}=\alpha[\alpha,G]$ なので, α を含む共役類のサイズは $|\{\alpha^g\mid g\in g\}|=p^{m_\alpha}$ である.

$B\leq E$ に対して，$T_B=\{\alpha\in T\mid D_\alpha\subseteq B\}$ とおく．以下，χ,μ で $\mathrm{Irr}(E)$ の元を表し，1_{ch} で自明指標を表す．$\chi\in\mathrm{Irr}(E)$ に対して, $T_\chi=T_{\mathrm{Ker}\chi}=\{\alpha\in T\mid D_\alpha\subseteq\chi\}$ および $|T_\chi|=p^{n_\chi}$ と置く. $\sum$ における下付き記号を簡単にするために、$D\subseteq\mathrm{Ker}\chi$ を $D\subseteq\chi$ だけで表す．T の部分群 L に対して，$X(L)=\sum_{\alpha\in L}m_\alpha$ と置き，$D\leq E$ に対しては，$X(D)=X(T_D), X(\mu)=X(T_\mu$ と置く．

G は p-群なので，指標の次数も共役類のサイズも　p の冪である．冪の次数に注目して，次の補題と用語を得る．それぞれを G の負荷 (Debt) と資産 (Asset) と呼ぶ．

補題 1

$$\begin{aligned}\mathrm{Debt}(G) &:= \log_p(\textstyle\prod_{i=1}^k \chi_i(1)) = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(E)} \frac{n-n_\chi}{2} n_\chi p^{n_\chi},\\ \mathrm{Asset}(G) &:= \log_p(\textstyle\prod_{i=1}^k |K_i|) = \sum_{\alpha\in T} m_\alpha p^{m-m_\alpha}.\end{aligned}$$

それゆえ，原田予想 II は $\mathrm{Asset}(G) \geq \mathrm{Debt}(G)$, すなわち，次と同等である．

$$\sum_{\alpha\in T} m_\alpha p^{m-m_\alpha} \geq \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \frac{n-n_\chi}{2} p^{n_\chi}$$

2.1　$Z(G)=[G,G]$ の場合へ帰着

まずは，良く知られた帰着の一例を説明しよう．

補題 2 T と E をアーベル群とする．E に値をとる T の歪対称 $\mathbb{Z}$-線形積 $\phi : T\otimes_{\mathbb{Z}} T \to E$ があると仮定する．この時，T の E による中心拡大 G で，すべての $\alpha,\beta\in T$ に対して，$[\alpha+E,\beta+E]=\phi(\alpha,\beta)$ を満たすものがある．ここで，$\alpha+E,\beta+E\subseteq G$ と考えている．

[証明]　T を巡回群の直積 $T=\langle t_1\rangle\times ... \times\langle t_k\rangle$ に分解し，$|t_i|=p^{m_i}$ と置く．この時，形式的元の集合 $\{\bar{t}_1,\ldots,\bar{t}_k\}$ に以下の関係式を導入する．
(1) $j\geq i$ に対して，$\bar{t}_j\bar{t}_i=\bar{t}_i\bar{t}_j\phi(t_j,t_i)$,
(2) $\bar{t}_i^{p^{m_i}}=1$, 且つ
(3) すべての i と $z\in E$ に対して，$z\bar{t}_i=\bar{t}_iz$.
この時，$\{\bar{t}_1,...,\bar{t}_k,E\}$ から関係式 (1)∼(3) で生成された群 G は補題の結論を満たす．□

それゆえ，もし $[G,G]\neq Z(G)$ なら, $G/Z(G)$ 上の $\phi(\alpha+Z(G),\beta+Z(G))=[\alpha,\beta]$ で与えられる歪対称 $\mathbb{Z}$-線形積 ϕ を使って，$G/Z(G)$ の E による中心拡大 $\tilde{G}$ が構成できる．この場合には，次を得る．

補題 3 $\mathrm{Debt}(G)=|Z(G)/E|\mathrm{Debt}(\tilde{G})$ かつ $\mathrm{Asset}(G)=|Z(G)/E|\mathrm{Asset}(\tilde{G})$ が成り立つ．

[証明]　各 $\mu\in\mathrm{Irr}(Z(G)/E)$ に対して，　線形指標 $\tilde{\mu}\in\mathrm{Irr}(G)$ で $\tilde{\mu}|_{Z(G)}=\mu$ となるものがある．この時，各 $g\in Z(G)/E$ に対して, g による積は共役類を正則に置換し，同時に，$\tilde{\mu}$ による積は G の既約指標を正則に置換する．両方とも，群 $Z(G)/E$ の正則置換を与えており，補題の主張が成り立つ．□

2.2 $[G,G]$ が基本アーベル群の場合への帰着

講演で述べた『$\mathrm{Asset}(G)-\mathrm{Debt}(G)$ の正負は G の構造ではなく，$\alpha\in G$ に対する資産（$[G,\alpha]=D_\alpha$ で定まる）だけで決まる』という言葉の意味を 2 段階に分けて説明していく．第 1 段階の説明は，次の命題である．

命題 4 もし，原田予想 II が冪零クラス 2 の群に対して正しくなければ，反例 $\tilde{G}$ で，$[\tilde{G},\tilde{G}]$ と $\tilde{G}/[\tilde{G},\tilde{G}]$ の両方が基本アーベル群となるものがある．

[証明] 反例 G から $|\tilde{G}|=|G|$, $|[\tilde{G},\tilde{G}]|=|E|$, かつ $[\tilde{G},\tilde{G}]$ が基本アーベル群となる反例 $\tilde{G}$ を構成する．$Z(G)=E$，且つ E と T はアーベル群だとしてよい．重要な性質は，$\alpha,\beta\in G$ と $a,b\in\mathbb{Z}$ に対して，

$$[\alpha^a,\beta^b]=[\alpha,\beta]^{ab}$$

が成り立つことである．すなわち，交換子は Frattini 部分群 $\Phi(G)$ の代表系同士の交換子の冪であり，$\Phi(G)=\Phi^1(G)=\{\alpha^p\mid\alpha\in G\}Z(G)$ である．以下，しばしば基本アーベル群に対しては，有限体 $\mathbb{F}_p$ 上のベクトル空間の用語を利用する．アーベル群 A に対して，$\Phi^m(A)=\{\alpha^{p^m}\mid\alpha\in A\}$ とし，$L(A)=\oplus_{j=0}^{\infty}\Phi^j(A)/\Phi^{j+1}(A)$ と置く．これは基本アーベル群であり，$|L(A)|=|A|$ である．次に，$\{(\alpha_i+\Phi(A))/\Phi^1\}(A)\mid i=1,...,s\}$ が $A/\Phi^1(A)$ の基底となる $\alpha_i\in A$ を選ぶ．しかも，$\{\alpha_i^{p^j}+\Phi^j(A)/\Phi^{j+1}(A)\mid i=1,...,s_j\le s\}$ が $\Phi^j(A)/\Phi^{j+1}(A)$ の基底であり，各 j と $i>s_j$ に対して，$\alpha_i^{p^j}=0$ としてよい．

それらの積を考えることで，1 : 1-写像 $\mu_A:A\to L(A)$ で，代表系 $\alpha_1,...,\alpha_s$ に対しては，$\mu|_{\Phi^j(G)/\Phi^{j+1}(G)}$ において恒等写像となっているものが構成できる．さらに，$\Delta(\mu(\alpha))=\mu(\alpha^p)$ によって与えられる $\mathbb{F}_p$-線形写像 $\Delta:L(A)\to L(A)$ が定義できる（冪零写像と呼ぶ）．

T, E に対して，$L(T)$ と $L(E)$ を定義し, まず，α_i 達に対して，

$$\varphi(\mu_T(\alpha_i),\mu_T(\alpha_j))=\mu_E([\alpha_i,\alpha_j])$$

と定義し，それを $L(E)$ に値を持つ $T/\Phi(T)$ の歪対称 $\mathbb{F}_p$-両線形積に拡張する．次に，冪零写像 Δ を利用して，上の歪対称両線形積を $L(E)$ に値を持つ $L(T)$ の歪対称 $\mathbb{F}_p$-両線形積に拡張できる．すなわち，$\varphi(\alpha^p,\beta)=\varphi(\alpha,\beta^p)=\Delta(\varphi(\alpha,\beta))$ が成り立っている．これにより，$L(T)$ から $L(E)$ への歪対称両線形積 φ を得たので，$L(T)$ の $L(E)$ による 中心拡大 $\tilde{G}$ が構成でき，$g_1,g_2\in\tilde{G}$ に対して，$[g_1+L(E),g_2+L(E)]_{\tilde{G}}=\varphi(g_1,g_2)\in L(E)$ を満たしている．この時，次の補題が成り立つ．

補題 5 $\mathrm{Asset}(\tilde{G})=\mathrm{Asset}(G)$ かつ $\mathrm{Debt}(\tilde{G})\ge\mathrm{Debt}(G)$ である．特に，$\tilde{G}$ も反例である．

[証明] 上記の構成から，$\alpha,\beta\in T$ に対して $\varphi(\mu_T(\alpha),\mu_T(\beta))=\mu_E(\phi([\alpha,\beta]))$ が成り立っている．それゆえ，すべての $\alpha\in T$ に対して，$|D_\alpha|=|D_{\mu_T(\alpha)}|$ となり，$\mathrm{Asset}(\tilde{G})=\mathrm{Asset}(G)$ を得る．2 番目の主張は，$\mu:\mathrm{Irr}(E)\to L(\mathrm{Irr}(E))\cong\mathrm{Irr}(L(E))$ を固定して，$n_{\mu(\chi))}\ge n_\chi$ を帰納法を使って証明する． これにより，E は巡回群と仮定してよくなる．$\chi\in\mathrm{Irr}(E)$ を固定する．χ は E の忠実な表現としてよい． $\chi^p=1$ なら, $\mathrm{Debt}_G(\chi)=\mathrm{Debt}_{G/\Phi^1(E)}(\chi)$ を得る．すなわち，$|\chi|=p^k=|E|$ で, $k\ge 2$. この時，$E/\mathrm{Ker}\chi$ で，$L(E/\mathrm{Ker}\chi)=\mathbb{F}^{\oplus k}$ である．構成から，$\chi\in\mathrm{Irr}(E)$ と $\alpha\in T$ に対して, もし $D_\alpha=[T,\alpha]\subseteq\mathrm{Ker}(\chi)$ なら，$j=1,...,p^k$

に対して，$D_\alpha \subseteq \chi^j$ であり，すべての $\mu \in \mathrm{Irr}(L(T/\mathrm{Ker}\chi)$ に対して，それゆえ，２番目の主張が成り立つ． $\square$

以下，$E=[G,G] \subseteq Z(G)$ と $T=G/E$ は基本アーベル群と仮定してよい．

3 証明の準備（非交換子型へ拡張）

これまでは、交換子（歪対称両線形積）によって定義されたものを考えていたが，変形や帰納法が使えるようにするために対象の拡張を考える．交換子で定義されたものの重要な性質の一つは，$D_1, D_2 \leq E$ に対して，$T_{D_2} \cap T_{D_1} = T_{D_2 \cap D_1}$ であり，特に，$Z(G)=E$ を考えると，$D_1 \cap D_2 = 0$ なら，$T_{D_1} \cap T_{D_2} = 0$ である．より一般に，$D_1, ..., D_t$ があって，$i \neq j$ に対して，$D_i \cap D_j = 0$ を満たすなら，T_{D_i} 達の直和 $\oplus T_{D_i}$ は T の部分空間となっている．それゆえ，E の部分空間 D に対して，$F(D) = T_D / \sum_{J \lneq D} T_J$ と置くと，$\dim T = \sum_{D \leq E} \dim F(D)$ である．逆に，

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \oplus_{D \leq E} F(D) \\ \tilde{T}_D &= \oplus_{J \leq D} F(J) \end{aligned} \qquad (A)$$

と置くと，$|\tilde{T}_D| = |T_D|$ である．特に，$\tilde{T}$ の E による形式的中心拡大を $\tilde{G}$ で表すと，$|\tilde{T}_{\mathrm{Ker}\chi}| = p^{n_\chi}$ なので，これにより，$\mathrm{Debt}(\tilde{G})$ が定義でき，$\mathrm{Debt}(G) = \mathrm{Debt}(\tilde{G})$ である．更に，$|D| = p^k$ となる $D \leq E$ における $\tilde{T}_D - \cup_{J<D} \tilde{T}_J$ の元 $\tilde{\alpha}$ に対して，$m_{\tilde{\alpha}} = k$ とし, $\tilde{\alpha}$ の資産 $\mathrm{Asset}(\tilde{\alpha})$ を kp^{m-k} と定義することで，$\mathrm{Asset}(\tilde{G})$ が定義でき，$\mathrm{Asset}(\tilde{G}) = \mathrm{Asset}(G)$ となっている．($\tilde{G}$ では交換子を考えていないので，単に $\tilde{T}, \tilde{E}$ の組である．)

このように，群の交換子で定義されたものから出発したものだけではなく，単純に，E の各部分空間 D に対して，ベクトル空間 F(D) が与えられると，上記のように $\mathrm{Asset}(\tilde{G})$ と $\mathrm{Debt}(\tilde{G})$ が定義でき，$\mathrm{Asset}(\tilde{G})$ と $\mathrm{Debt}(\tilde{G})$ の比較が可能でとなる．これが我々の対象であり，次の定理を証明する．

定理 6 上記の設定で．$\mathrm{Asset}(G) \geq \mathrm{Debt}(G)$ が成り立つ．

以下，T_χ, m_α は同じように定義できるので，$G, E, T, m_\alpha, X(\cdot)$ など交換子で定義された場合と同様の記号を使って議論を続ける．T の部分空間 L に対して，$X(L) = \sum_{\alpha \in L} m_\alpha$ と置く．特に，$\chi \in \mathrm{Irr}(E)$ に対して，$X(\chi) = X(T_\chi)$ と置く．

補題 7 $|T_\phi/(T_\chi \cap T_\phi)| = p^k$ なら，$X(T_\phi) \leq p^k X(T_\chi \cap T_\phi)$ が成り立つ．

[証明]　$X(\cdot)$ の定義から，これは独立した $1 \neq \mu \in \mathrm{Irr}(E)$ に対する共通部分の個数の総和で与えられる．$T_\phi \cap T_\mu$ と $T_\chi \cap T_\phi \cap T_\mu$ における元の個数の比は常に p^k 以下なので，補題の主張が成り立つ． $\square$

$\mathrm{Asset}(G) - \mathrm{Debt}(G) = \sum_{\alpha \in T} (m - m_\alpha) p^{m-m_\alpha} - \sum_{1 \neq \chi \in \mathrm{Irr}(E)} \frac{n-n_\chi}{2} p^{n_\chi}$ であることを示したが，$|T_\chi| = p^{n_\chi}$ であり，$\alpha \in T$ に対して，$\mathrm{Asset}(\alpha) = m_\alpha p^{m-m_\alpha}$ である．$p^{m-m_\alpha} = |\{\chi \in$

$\mathrm{Irr}(E) \mid D_\alpha \subseteq \chi\}|$ であることに着目すると,

$$\mathrm{Asset}(G) - \mathrm{Debt}(G) = mp^n - X(T) + \sum_{1 \neq \chi \in \mathrm{Irr}(E)} \{(m - \frac{n - n_\chi}{2})p^{n_\chi} - X(\chi)\}$$

と書ける．更に，各既約指標 χ に対して，$Y(\chi) = (-\frac{n}{2} + \frac{n_\chi}{2} + m)p^{n_\chi}$ と置くと，$X(1_{ch}) = X(T)$ であり, $n_{1_{ch}} = n$ なので，$Y(1_{ch}) = mp^n$ となる．それゆえ，

$$\mathrm{Asset}(G) - \mathrm{Debt}(G) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} (Y(\chi) - X(\chi))$$

と表示できる．これが講演で述べた言葉の 2 番目の解釈である．すなわち,『負債は各指標ごとに定義されるので，各指標 χ 毎に分解して捉える』ことを意味している．

4 定理の証明

2.1 章で証明したことを忘れて，$E = [G, G]$ となることや，$Z(G) \subseteq [G, G]$ を仮定していない．このような，より広い設定で $\mathrm{Asset}(G) - \mathrm{Debt}(G) \geq 0$ を証明すれば，定理が正しくないとして，反例がある最小の $|[G, G]| = p^m$ を取り, この m を固定する．次に $|[G, G] = p^m$ の中で G を $\mathrm{Asset}(G) - \mathrm{Debt}(G)$ が最小値となる反例とし，その中で最小位数を持つものとする．この場合，$T_{\{0\}} = \{0\}$ である．今までの記号に従い，$E = [G, G]$, $T = G/[G, G]$ と置く．すなわち，

$$\mathrm{Asset}(G) - \mathrm{Debt}(G) = mp^n - X(T) + \sum_{1 \neq \chi \in \mathrm{Irr}(E)} \{Y(\chi) - X(\chi)\} < 0$$

である．ただし，$Z(G) = E$ は仮定していない．まず，$mp^n - X(T) \geq 0$ であることを述べておく．まず，次の変形を考える．

$B \leq E$ を $F(B) \neq 0$ となるものとする．$\alpha \in T_B - \cup_{B \not\subseteq \mu}(T_B \cap T_\mu)$ となる元 α を固定して考える．α の取り方から，もし $\alpha \in T_\mu$ なら $T_\chi \subseteq T_\mu$ である．$F(B) = \mathbb{F}_p\beta \oplus J_1$ と分解しておく．ここで，$\cup_{B \not\subseteq \mu}(T_B \cap T_\mu) \subseteq J_1$ としてよい．次に，各 $D \leq E$ に対して，$\tilde{F}(D)$ を次のように定義する．
(1) $\tilde{F}(0) = \mathbb{F}_p\alpha$,
(2) $\tilde{F}(B) = J_1$,　且つ
(3) それ以外の $D \leq E$ に対しては，$\tilde{F}(D) = F(D)$ と置く．
これは（A）の条件をすべて満たしており，群 $\tilde{G}$ が定義でき，$|G| = |\tilde{G}|$ である．以下，G における各記号 Z に対応する $\tilde{G}$ における記号を $\tilde{Z}$ で表す．この時， $\tilde{T}_\chi = \mathbb{F}_p\alpha + T_\chi$ である．

$D \subseteq \chi$ となる $\chi \in \mathrm{Irr}(E)$ をとる．$v \in \tilde{T}_\chi$ である必要十分条件は，$r \in \mathbb{F}_p$ があって，$v + r\alpha \in T_\chi$ である．もし，異なる 2 つ $v + a\alpha, v + b\alpha$ を含むような T_μ があれば，$\alpha \in T_\mu$ であり，$D \subseteq \mu$ である．このような元 v の T_χ における個数を δ_χ で表す．すなわち，$D \subseteq \chi$ に対して，$X(\chi)$ の G/D において対応する記号を $X_D(\chi)$ で表すと，$g_D(\chi) := X(\chi) - X_D(\chi) = |(\cup_{D \not\subseteq \mu} T_\mu) \cap T_\chi| \leq |T_\chi|$ である．上の議論より次の補題を得る．

補題 8 $\tilde{G}$ において，$\alpha \in T$ を $\{\mu \in \mathrm{Irr}(E) \mid \alpha \in \tilde{T}_\mu\}$ は高々$\{\mu \in \mathrm{Irr}(E) \mid \alpha \in T_\mu\}$ の p-倍であり，$m \tilde{-} m_\alpha = m - m_\alpha$ または $= m - m_\alpha + 1$ となる．等号は，α が『もし $D \not\subseteq \mu$ なら $\alpha \notin T_\mu$ となる』という条件を満たしているときである．

次に，$\mathrm{Asset}(\tilde{G}) - \mathrm{Debt}(\tilde{G}) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(E)}(\tilde{Y}(\chi) - \tilde{X}(\chi))$ を計算する．

$D \not\subseteq \mu$ となる μ に対しては，$\alpha \in Z(\tilde{G})$ であり，$\tilde{T}_\mu = \mathbb{F}_p\alpha \oplus T_\mu$ なので，$\tilde{Y}(\mu) - \tilde{X}(\mu) = p(Y(\mu) - X(\mu))$ である．$D \subseteq \mu$ となる μ に対しては，$\tilde{T}_\mu = T_\mu$ なので，$\tilde{Y}(\mu) = Y(\mu)$ である．また，上の補題により，$Y(\mu) \leq \tilde{Y}(\mu) \leq Y(\mu) + p^{n_\mu}$ である．それゆえ，$\mathrm{Asset}(\tilde{G}) - \mathrm{Debt}(\tilde{G}) - (\mathrm{Asset}(G) - \mathrm{Debt}(G)) \leq -(\sum_{D \subseteq \mu} p^{n_\mu} - \delta_\mu) + (p-1)\sum_{D \not\subseteq \mu}(Y(\mu) - X(\mu))$ を得る．それゆえ，次の結果を得る．

命題 9 G を最小反例とする．$B \leq E$ に対して，もし $F(B) \neq 0$ なら, $(p-1)\{\sum_{B \not\subseteq \chi} Y(\chi) - X(\chi)\} - \sum_{B \subseteq \chi} g_D(\chi) \geq 0$ が成り立つ．

特に，$F(E) \neq 0$ なら，$\sum_{1 \neq \chi \in \mathrm{Irr}(E)}\{Y(\chi) - X(\chi)\} \geq 0$ となり矛盾を得るので，$F(E) = 0$ である．これは，$F(D_i) \neq 0$ となる $D_1, ..., D_t \subseteq E$ があって，

$$T = \oplus_{i=1}^t F(D_i)$$

となることを意味する． $d_i = \dim F(D_i)$ と置く．$D_i \subseteq \mathrm{Ker}\chi$ なら，常に $D_j \subseteq \mathrm{Ker}\chi$ となるとき，$D_j \leq D_i$ と表す。以下，D_1 を極大なものとし，$D = D_1, d = d_1$ で表す．この時，$\chi \in \mathrm{Irr}(E)$ に対して， $T_\chi = \oplus_{D_i \subseteq \chi} F(D_i)$ である．別の言い方をすると，

補題 10 $v \in T$ に対し，$v = \sum v_i$ で $v_i \in F(D_i)$ と分解すると，$v_i \neq 0$ で，$D_i \not\subseteq \chi$ なら，$v_i \notin F_\chi$ である．特に，$D \subseteq \chi \neq 1_{ch}$ に対しては，$g_D(\chi) = p^{n_\chi - d}$ である．

構造が確定し，これにより，$g_D(\chi)$ や $X_D(\chi)$ が計算できるようになったので，後は計算によって矛盾を出す．

まず，m の最小性より，G/D を考えることで，$\sum_{D \subseteq \chi}\{(m - d_1 - \frac{n}{2} + \frac{n_\chi}{2})p^{n_\chi} - X_D(\chi)\} \geq 0$ である．更に，変形の時に述べたように，$X(\chi) \leq X_D(\chi) + p^{n_\chi - d}$ となるので，$\sum_{D \subseteq \chi}(Y(\chi) - X(\chi) \geq \sum_{D \subseteq \chi}(dp^{n_\chi} - p^{n_\chi - d})$ である．これらと命題9を合わせると，$(p-1)(\mathrm{Asset}(G) - \mathrm{Debt}(G)) = (p-1)\{\sum_\chi Y(\chi) - X(\chi))\} \geq 0$ を得る．これは G が反例であることに矛盾する．　これで定理の証明が完了している．

コメント 1 上記の証明は m に依存した証明ではないので，研究集会で述べたように，原田予想を強くした千吉良予想 $\mathrm{Asset}(G) - \mathrm{Debt}(G) \geq m$ の証明を与えてはいない．

参考文献

[1] T. Abe, N. Chigira, *Toward to the solution of Harada's conjecture II (in Japanese)* , RIMS Kokyuroku 2189 (2021), 77-86.

[2] K. Harada, *Revisiting character theory of finite groups*, Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.) 13 (2018), no. 4, 383-395.

[3] A. Hida, *Harada's conjecture on character degrees and class sizes, symmetric and alternating groups*, RIMS Kokyuroku 2086 (2018), 144-153.

[4] M. Sugimoto, *Harada's conjecture II for the finite general linear groups*, arXiv:2304.10708