遅れのフィドバック制御を伴った離散線形周期系の安定領域
(Stability Regions of Discrete Linear Periodic Systems with Delayed Feedback Controls)

静岡大学　工学部, 客員教授 **申 正善**
静岡大学　工学部　数理システム工学科, **宮崎 倫子**
ソウル大学、名誉教授, **金 道漢**
Jong Son Shin
Graduate School of Enjineering Shizuoka University
shinjongson@jcom.home.ne.jp
Rinko Miyazaki
Graduate School of Enjineering Shizuoka University
miyazaki.rinko@shizuoka.ac.jp
Dohan Kim
Department of Mathematics, Seoul National University, Korea
dhkim@snu.ac.kr

1　序文

本講演の内容は主に [13] に基づかれている。1992 年 Pyragas [12] は微分方程式

$$x'(t) = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \tag{E}$$

の周期 $\omega > 0$ をもった不安定周期軌道 $\phi(t)$ を安定化させるための方法を提唱した。それは方程式 (E) に delayed feedback control（DFC) と呼ばれる摂動項 $u(t) = K(x(t-\omega) - x(t))$ を付け加えた方程式

$$x'(t) = f(x(t)) + K(x(t-\omega) - x(t)), \tag{DF}$$

の (同一の) 周期解の安定性を示すことである。彼は周期解の安定化が可能であることを数値シュミレイションにより示した。ここで $d \times d$ 実定数行列 K は feedback gain と呼ばれ実用的にはより簡単な行列であることが望ましい。この方法は周期 $\omega > 0$ を決めることができれば (DFC)$u(t)$ だけを付け加えた方程式 (DF) を考えればよいことを示している。またこのことは遅れの微分方程式が安定化において重要であることを示している。この方程式の単純性により広範囲の応用に適用された。しかし残念ながらその理論的な研究は稀である。一般論の観点からの理論的研究として宮崎、内藤、申による線形化方程式

$$y'(t) = A(t)y(t) + K(y(t-\omega) - y(t)), \tag{LDF}$$

を用いた仕事 [8] がある。ここで $A(t) = Df(\phi(t))$ は $f(x)$ のヤコービ行列である。この論文によりレスラー方程式に対しては安定化が可能であることが示された。しかし論文において方程式

$$y'(t) = A(t)y(t), \tag{LDE}$$

の周期 (ポアンカレー, モノドロミー) 作用素の固有値 (方程式 (LDE) の特性乗数) は実数であることを仮定している。したがってこの条件を落としさらに理論をもう少しスマートにしたいと言うのが当面の我々の研究目標である。そのために具体的な方法論を見出すため連続系を離散系に直して考察するのが妥当と考えた (でも実際はそうともかぎらなかった)。方程式 (DF) の離散バージョンとして次の Pyragas 型の摂動項 $u(n)$,

$$u(n) = K(x(n-\omega) - x(n)),\ n \in \mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\},$$

が考えられる。ここで $\omega \in \mathbb{Z}_2^\infty := \{2, 3, \cdots\}$. 他方 Buchner と Zebrowski [1] は エコー型の摂動項 $u(n)$:

$$u(n) = K(x(n-\omega+1) - A(n)x(n))$$

を考察し logistic map 対して安定性と分岐を研究した。他の様々な形の摂動項 $u(n)$ に対しては [9,17–19] を参照してください。また 1 次元の場合エコー型と Pyragas 型を比較した場合優越はつかないがエコー型のほうがましなようである ([10] 参照)。それよりも Pyragas 型の離散系よりもエコー型の離散系のほうが簡単な計算により、より整合性がとれることが分かる (方程式 CE と命題 3.1 を参照)。故に本講演ではエコー型の離散系を扱う。

研究の第一段階として線形周期差分方程式

$$x(n+1) = A(n)x(n),\ n \in \mathbb{Z}, \tag{L}$$

の不安定なゼロ解を安定化する問題を考える。ここで $A(n)$ は周期 ω をもつ $d \times d$ 複素行列で $x(n)$ は d 次元複素 ユークリッド空間 $\mathbb{C}^d$ に属する。

第二段階として不安定な周期解を安定化する問題を考える。

第三段階として連続系の方程式 (E) の不安定な周期解を安定化する問題を考える。

本講演においては第一段階として次の DFC を考える：

$$y(n+1) = A(n)y(n) + K(y(n-\omega+1) - A(n)y(n)). \tag{LF}$$

ここで $\omega \geq 3$ を主に考える ($\omega = 2$ の場合は文献 [7] を参照)。

一般に ゼロ解の安定性は方程式の特性乗数の値によって決まることが知られている ([2])。したがって方程式 (L) のゼロ解が (漸近) 安定化できるとは方程式 (L) の特性乗数が何であれ方程式 (LF) のすべての特性乗数が 1 以下であることが必要かつ十分条件である。すべての特性乗数が 1 以下であることを判定する方法として 代数的方法、すなわち、Schur-Cohn または Jury の方法が定着している。しかし静岡大の宮崎研の研究によれば、次元 d 及び周期が小さい場合はこの方法でうまくいくが大きくなるにつれて非常に複雑になるので扱いづらいという報告がある ([10] 参照)。よって我々は他の方法を模索した。その結果一般論として可換性 $A(n)K = KA(n)$ の条件の下ではあるが幾何学的方法を提唱するに至った。すなわち、C-map 定理に基づいて原点を内点とする最小の領域を囲む閉曲線の存在を示し、その閉曲線の幾何学的性質によってゼロ解の安定性を示す。

この方法は周期が大きくなっても代数的方法より直観的で分かり易いという利点がある。幾何学的方法を少し詳しく述べる。

初めに, この方法はC-map が存在するとき、C-map 定理 (方程式 (L) の特性乗数と方程式 (LF) の特性乗数の関係を示す定理) を確立する (定理 2 と系 4.2 参照)。C-map は具体的に $\mu = C_{\omega,k}(\nu) = \nu\left(\frac{\nu-k}{(1-k)\nu}\right)^{\omega}$ によって与えられる。これに基づいて C-map 定理を確立する。

次に、単位円の C-map による像 $B_{\omega,k}(\theta) := C_{\omega,k}(e^{i\theta}),\ \theta \in (-\pi,\pi]$ の幾何学的性質、すなわち、原点を内点とする最小の領域を囲む閉曲線の存在、さらにその閉曲線が m-starlike 性質 (定理 5) もつ、すなわち、原点を始点とする半直線はその閉曲線と一点で交わることを示す。

最後に, その領域が実は安定領域であることを示す。

本講演は次のように構成される：

1. 序文
2. 準備
3. 方程式 (LF) の特性乗数
4. C ー写像定理
5. 関数 $B_{\omega,k}(\theta)$ の性質
6. 方程式 $\Im B_{\omega,k}(\theta) = 0$ の解の存在とその解法
7. 関数 $B_{\omega,k}(\theta)$ から導かれる閉曲線の幾何学的性質
8. ゼロ解の安定領域
9. 今後の展望

2　準備

講演では echo 型、すなわち、方程式

$$y(n+1) = A(n)y(n) + K(y(n-\omega+1) - A(n)y(n)) \qquad \text{(LF)}$$

を考える。任意の $m, n \in \mathbb{Z}, n \geq m$ に対して

$$\mathbb{Z}_m^n = \{m, m+1, \cdots, n\},\ \mathbb{Z}_m^\infty = \{m, m+1, \cdots\}$$

とする。X は Banach 空間で $\dim X < \infty$ とし $L : X \to X$ は有界線形作用とする。集合 $\sigma(L)$ は L のすべての固有値の集合とする。$\mathcal{N}(L)$ は L の null 空間, $W_\eta(L)$ と $G_\eta(L)$ は各々固有値 $\eta \in \sigma(L)$ に対する固有空間、一般固有空間を表す。このとき

$$G_\eta(L) = \mathcal{N}((L - \eta E)^{h_\eta(L)}).$$

ここで $h_\eta(L)$ は η のインデックスである。

1. まず方程式 (L) の特性乗数の性質を述べる.

解の一意的な存在を保証するため次の仮定を置く。

(A) ：すべての $n \in \mathbb{Z}_0^{\omega-1}$ に対して $A(n)$ は正則である。

初期点 $(m, x^0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^d$ を通る方程式 (L) の 一意的な解を $x(n; m, x^0)$ と表す。方程式 (L) の解 $x(n; m, x_0)$ を作用素 $T(n, m),\ n, m \in \mathbb{Z}$ を用いて

$$x(n; m, x_0) = T(n, m)x_0$$

と表記するならば、作用素 $T(n, m) : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ を解作用素という。$T(n) = T(n + \omega, n),\ n \in \mathbb{Z}$ と置く。このとき $T(0)$ は方程式 (L) の周期作用素、モノドロミー作用素、ポアンカレ写像と言う。このとき $T(n, m)$ と $T(0)$ は各々

$$T(n, m) = \prod_{i=m}^{n-1} A(i)\ (n \geq m),\quad T(0) = \prod_{i=0}^{\omega-1} A(i),$$

によって表される。ここで

$$\prod_{i=m}^{n-1} A(i) = \begin{cases} A(n-1)A(n-2)\cdots A(m) & (n > m) \\ E & (n = m). \end{cases}$$

$A(n)$ の ω–周期性により

$$T(1) = A(0)T(0)A(0)^{-1} \tag{1}$$

を得る。方程式 (L) における重要な定理は Floquet 定理として知られている。条件 (A) により $\sigma(T(n)) = \sigma(T(0))$ 及び $T(0)$ は正則行列である。故に $0 \notin \sigma(T(0))$ が成り立つ。これより $\mu \in \sigma(T(0))$ を方程式 (L) の Floquet 乗数または特性乗数という。この特性乗数により方程式 (L) のゼロ解の安定性が判定される。

2. 次に方程式 (LF) の特性乗数の性質を述べる。

$\mathcal{C}_{\omega-1}$ は $\mathbb{Z}^0_{-\omega+1}$ から $\mathbb{C}^d$ への写像の集合でノルム $|\varphi|_{\mathcal{C}_{\omega-1}} = \sup_{s \in \mathbb{Z}^0_{-\omega+1}} |\varphi(s)|$ を付加することにより Banach 空間となる。明らかに、$\dim \mathcal{C}_{\omega-1} = \omega d$ である。$m \in \mathbb{Z}$ 対して任意の関数 $y : \mathbb{Z}^\infty_{m-\omega+1} \to \mathbb{C}^d$ と任意の $n \in \mathbb{Z}^\infty_m$ に対して関数 $y_n : \mathbb{Z}^0_{-\omega+1} \to \mathbb{C}^d$ を

$$y_n(s) = y(n + s), s \in \mathbb{Z}^0_{-\omega+1}$$

によって定義する。任意の $n \in \mathbb{Z}^\infty_m$ に対して初期点 $(m, \varphi) \in \mathbb{Z} \times \mathcal{C}_{\omega-1}$ を通る方程式 (LF) の 一意的な解 $y_n(m, \varphi) \in \mathcal{C}_{\omega-1}$ を $y_n(m, \varphi) = U_K(n, m)\varphi$ によって表す。ここで $U_K(n, m) : \mathcal{C}_{\omega-1} \to \mathcal{C}_{\omega-1}$ は解作用素である。$U_K(n) = U_K(n + \omega, n),\ n \in \mathbb{Z}$ と置く。$U_K(0)$ は方程式 (LF) の 周期作用素という。$K = kE$ のとき、それらを $U_k(n, m)$ および $U_k(0)$ と表す。

補題 2.1. $\nu \in \sigma(U_K(0))$ とする。$\det K \neq 0$ ならば、$\nu \neq 0$ である。

証明 ν は $U_K(0)$ の固有値であるから, 明らかに、$U_K(0)\varphi = \nu\varphi$ を満たす非自明な $\varphi \in \mathcal{C}_{-\omega+1}$ が存在する。$y_n(0, \varphi) = U_K(n, 0)\varphi\ (n \in \mathbb{Z}^\infty_0)$ は方程式 (LF) の解であるから、$y_\omega(0, \varphi) = U_K(0)\varphi = \nu\varphi$ を得る。今、$\nu = 0$ を仮定する。このとき $y_\omega(0, \varphi) = 0,$ すなわち、$y(\omega + s; 0, \varphi) = 0\ (s \in \mathbb{Z}^0_{-\omega+1})$ であ

る。したがって $y(m;0,\varphi)=0$ $(m\in\mathbb{Z}_1^\omega)$ である。$y(n;0,\varphi), n\in\mathbb{Z}_1^\omega$ は方程式 (LF) を満たす、すなわち、$Ky(n+1-\omega)=(K-E)A(n)y(n)+y(n+1)$ であるから、各 $n\in\mathbb{Z}_1^\omega$ に対して $Ky(n+1-\omega)=0$. よって各 $p\in\mathbb{Z}_{2-\omega}^1$ に対して $Ky(p)=0$. $\det K\neq 0$ であるから各 $p\in\mathbb{Z}_{2-\omega}^1$ に対して $y(p)=0$. 他方、$Ky(0+1-\omega)=(K-E)A(0)y(0)+y(1)=0$ であるから $y(1-\omega)=0$. よって各 $n\in\mathbb{Z}_{1-\omega}^0$ に対して $y(n)=0$ となる。これは $\varphi=0\in\mathcal{C}_{\omega-1}$ を意味する。故に矛盾が生じる。 □

(K) feedback gain K に対して次の条件が満たされる:

(K-1) $\sigma(K)\subset\mathbb{R}$,
(K-2) $0<|\kappa|<1$ for all $\kappa\in\sigma(K)$,
(K-3) $\sigma(U_K(0))\cap\sigma(K)=\emptyset$.

$K=kE$ で条件 (A) が満たされているとする。条件 (K-1) と (K-2) が満たされるならば、条件 (K-3) が成り立つ (以下の補題 2.4 を参照)。

次に可換条件 (C) を導入する:

(C) $KA(n)=A(n)K$, $(n\in\mathbb{Z}_0^{\omega-1})$.

今後, 条件 (A), (C), (K) は常に満たすものとする。

次の補題の証明は容易である。

補題 2.2. 方程式 (L) において次の命題は同値である:
1) $A(n)K=KA(n),\ n\in\mathbb{Z}$。
2) $T(n,m)K=KT(n,m),\ n,m\in\mathbb{Z}$。
3) $T(n,0)K=KT(n,0),\ n\in\mathbb{Z}$。

次の事実は [3, p.237, Lemma 1.1] と同様な議論によって示される。

命題 2.3. ν が方程式 (LF) の特性乗数であることと

$$y(n+\omega)=\nu y(n),\ n\in\mathbb{Z}_{-\omega+1}^\infty. \tag{2}$$

を満たす方程式 (LF) の非自明解 $y_n, n\in\mathbb{Z}_0^\infty$ が存在することは同値である。

$K=kE$ ならば、次の結果が成り立つ。

補題 2.4. $K=kE, 0<|k|<1$ および $k\in\mathbb{R}$ とする。条件 (A) が満たされるならば、条件 (C) と (K) が満たされる。

証明 $K=kE$ であるから条件 (C) は明らかに満たされ、しかも $\sigma(K)=\{k\}$ と $W_k(K)=\mathbb{C}^d$ も成り立つ。条件 (K-3) が満たされることを示す。矛盾を導くために $k\in\sigma(U_k(0))$ であると仮定する。よって命題 2.3 により $y(n+\omega)=ky(n),\ n\in\mathbb{Z}_{-\omega+1}$ を満たす方程式 (LF) の非自明な解 $y(n)$ が存在する。したがって $y(n+1-\omega)=k^{-1}y(n+1),\ n\in\mathbb{Z}$. この関係式を方程式 (LF) に代入して $y(n+1)=A(n)y(n)+k[k^{-1}y(n+1)-A(n)y(n)]$ を得る。これは $(1-k)A(n)y(n)=0$ を意味する。$k\neq 1$ でかつ $A(n)$ が正則ゆえに $y(n)=0$ を得る。これは $y(n)$ が非自明な解であるということと矛盾する。故に $k\notin\sigma(U_k(0))$ である。したがって条件 (K-3) が満たされる。 □

3　方程式 (LF) の特性乗数

この節では方程式 (LF) の特性乗数を示す。

任意の $\nu \in \sigma(U_K(0))$ に対して $y(n+1) = \nu y(n-\omega+1)$ を満たす方程式 (LF) の非自明解 $y(n)$ が存在する。これを方程式 (LF) に代入すると方程式

$$y(n+1) = A(n)y(n) + K(\nu^{-1}y(n+1) - A(n)y(n)).$$

を得る。今

$$K(\nu) = \nu^{-1}(\nu E - K)(E-K)^{-1}$$

と置く。このとき

1) $\nu \in \sigma(K)$ ならば、

$$K(\nu)y(n+1) = A(n)y(n). \tag{RE}$$

2) $\nu \notin \sigma(K)$ ならば、

$$y(n+1) = K^{-1}(\nu)A(n)y(n). \tag{CE}$$

3) $\nu = 1$ ならば $K(1) = E$. したがって $y(n+1) = A(n)y(n)$.

条件（K-3）が満たされるならば、すなわち、$\nu \notin \sigma(K)$ ならば、方程式 (CE) となる。方程式 (CE) の解作用素および周期作用素を各々$T_C(n,m;\nu)$ と $T_C(0;\nu)$ と表す。特に、上述において $\nu = 1$ ならば、方程式 (CE) は方程式 (L) となる。明らかに、

$$\begin{aligned} T_C(n,m;\nu) &= \prod_{i=m}^{n-1} K^{-1}(\nu)A(i) \\ &= K(\nu)^{m-n}T(n,m), \end{aligned}$$

及び

$$T_C(0;\nu) = K(\nu)^{-\omega}T(0). \tag{3}$$

よって次の命題が成り立つ。

命題 3.1. 次の命題は同値である:
1) $\nu \in \sigma(U_K(0))$.
2) $\nu \in \sigma(K(\nu)^{-\omega}T(0))$.
3) $0 \in \sigma(\nu K(\nu)^{\omega} - T(0))$.

最後に方程式 (LF) を拡張された線形周期差分方程式に変換する。方程式 (LF) に対して置換

$$y(n-(\omega-1)) = z(1;n),\ y(n-(\omega-2)) = z(2;n),\ \ldots,\ y(n) = z(\omega;n)$$

を施し $z(n) = {}^t({}^tz(1;n), {}^tz(2;n), \ldots, {}^tz(\omega;n))$ と置けば、方程式 (LF) は

$$z(n+1) = B_K(n)z(n) \tag{BE}$$

となる。ここで

$$
B_K(n) = \begin{pmatrix}
0 & E & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & E & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & E \\
K & 0 & 0 & \cdots & 0 & (E-K)A(n)
\end{pmatrix}. \tag{4}
$$

この方程式を方程式 (LF) の拡張された feedback 方程式という。このとき次の結果を得る。

補題 3.2. すべての $n \in \mathbb{Z}_0^\infty$ に対して $\det B_K(n) = (-1)^{(\omega-1)d} \det K$ が成り立つ。

証明 簡単な計算により

$$
\begin{aligned}
\det B_K(n) &= (-1)^{(\omega-1)d} \det \begin{pmatrix}
E & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & E & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & E & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & E & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & (E-K)A(n) & K
\end{pmatrix} \\
&= (-1)^{(\omega-1)d} \det \begin{pmatrix} E & 0 \\ (E-K)A(n) & K \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{(\omega-1)d} \det K.
\end{aligned}
$$

これは証明を完了している。 □

補題 3.2 より方程式 (BE) の解の一意的存在が保障される。方程式 (BE) の解作用素および周期作用素を $T_B(n,m)$ および $T_B(0)$ と表す。

今、作用素 $U_K(0)$ 及び $T_B(0)$ の関係を示す。

写像 $S_{\omega-1}\colon \mathcal{C}_{\omega-1} \to \mathbb{C}^{\omega d} := \overbrace{\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \times \cdots \times \mathbb{C}^d}^{\omega}$ を

$$
\varphi \in \mathcal{C}_{\omega-1} \mapsto {}^t({}^t\varphi(-\omega+1), {}^t\varphi(-\omega+2), \ldots, {}^t\varphi(-1), {}^t\varphi(0)) \in \mathbb{C}^{\omega d}
$$

によって定義する。このとき $S_{\omega-1}$ は単射である。よって

$$
S_{\omega-1} U_K(n,m)\varphi = T_B(n,m) S_{\omega-1}\varphi.
$$

実際、

$$
\begin{aligned}
&S_{\omega-1}U_K(n,m)\varphi = S_{\omega-1}y_n(m,\varphi) \\
&= \begin{pmatrix} y(n-(\omega-1);m,\varphi) \\ y(n-(\omega-2);m,\varphi) \\ \vdots \\ y(n-1;m,\varphi) \\ y(n;m,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(1;n) \\ z(2;n) \\ \vdots \\ z(\omega-1;n) \\ z(\omega;n) \end{pmatrix} \\
&= T_B(n,m) \begin{pmatrix} \varphi(-\omega+1) \\ \varphi(-\omega+2) \\ \vdots \\ \varphi(-1) \\ \varphi(0) \end{pmatrix} \\
&= T_B(n,m)S_{\omega-1}\varphi.
\end{aligned}
$$

したがって $U_K(n,m)$ は以下のように $n<m$ に拡張される:

$$
U_K(n,m) = S_{\omega-1}^{-1}T_B(n,m)S_{\omega-1}, \quad n<m.
$$

これより

$$
S_{\omega-1}U_K(n,m) = T_B(n,m)S_{\omega-1} \ (m,n\in\mathbb{Z}), \quad S_{\omega-1}U_K(0) = T_B(0)S_{\omega-1}.
$$

$U_K(0)$ と $T_B(0)$ は相似であるから次の関係式が成り立つ。

$$
U_K(0)\varphi = \nu\varphi \Longleftrightarrow S_{\omega-1}U_K(0)\varphi = \nu S_{\omega-1}\varphi \Longleftrightarrow T_B(0)S_{\omega-1}\varphi = \nu S_{\omega-1}\varphi.
$$

これより次の結果を得る。

定理 1. 次の命題が成り立つ。
1) $\sigma(U_K(0)) = \sigma(T_B(0))$.
2) 特性方程式 $\det(T_B(0)-\nu E)=0$ は ωd 個の解を持つ。

定理 1 と補題 3.2 を合わせて、次の結果を得る。

命題 3.3. 方程式 (LF) のすべての特性乗数を重複度込みで $\nu_1,\dots,\nu_{\omega d}$ と表す。このとき $\nu_1\cdots\nu_{\omega d} = (\det K)^\omega$.

証明 定理 1 と補題 3.2 を合わせて、

$$
\begin{aligned}
\nu_1\cdots\nu_{\omega d} = \det T_B(0) &= \prod_{n=0}^{\omega-1}\det B_K(n) \\
&= \left((-1)^{(\omega-1)d}\det K\right)^\omega \\
&= (-1)^{\omega(\omega-1)d}(\det K)^\omega
\end{aligned}
$$

を得る。$\omega(\omega-1)d$ は偶数であるから証明は明らかである。 □

命題 3.3 より次の事実が分かる。
1) $K = kE$ ならば、

$$\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_{\omega d} = (k)^{\omega d};$$

2) $k_1, k_2, \cdots, k_d$ は行列 K の多重度込みの固有値であるならば、$\det K = k_1 k_2 \cdots k_d$ かつ

$$\nu_1 \cdots \nu_{\omega d} = (\det K)^{\omega} = (k_1 k_2 \cdots k_d)^{\omega}.$$

これは $\det K > 1$ ならば、$|\nu_i| > 1$ となる $\nu_i \in \sigma(U_K(0))$ が存在することを示している。すなわち、$\det K > 1$ ならば、方程式 (L) のゼロ解は安定化できない。$K = kE$ かつ $|k| > 1$ ならば、$\det K > 1$ であることを注意しておく。条件 (K-2) より $\det K < 1$ が成立する。

4 C-map 定理

この節では C-map 定理を述べる。すなわち、方程式 (L) と方程式 (LF) の特性乗数の関係を示している。これはこの講演において鍵となる.。そのために可換な行列の積と差に関するスペクトルの性質を述べる。可換な行列 A と B の積と差のスペクトルは

$$\sigma(AB) = \{\alpha\beta \mid \alpha \in \sigma(A), \beta \in \sigma(B),\ W_\alpha(A) \cap W_\beta(B) \neq \emptyset\},$$

$$\sigma(A - B) = \{\alpha - \beta \mid \alpha \in \sigma(A), \beta \in \sigma(B),\ W_\alpha(A) \cap W_\beta(B) \neq \emptyset\}$$

で与えられる。

補題 4.1. [8, Lemma A.2], [6, Lemma 2.11] 可換な行列 A と B に対して $\alpha \in \sigma(A)$, $\beta \in \sigma(B)$ とするならば、次の同値命題が成立する:
1) $\alpha\beta \in \sigma(AB)$.
2) $\alpha - \beta \in \sigma(A - B)$.
3) $W_\alpha(A) \cap W_\beta(B) \neq \{0\}$.
4) $G_\alpha(A) \cap G_\beta(B) \neq \{0\}$.

可換な行列 A と B に対して

$$\sigma[AB] = \{(\alpha, \beta) \in \sigma(A) \times \sigma(B) \mid \alpha\beta \in \sigma(AB)\}$$

と置く。$\nu \in \sigma(U_K(0))$ そして $K = kE$ とする。このとき (3) より

$$T(0) = K(\nu)^{\omega} T_C(0; \nu)$$

の右辺は可換な行列 $K(\nu)^{\omega}$ と $T_C(0; \nu)$ の積である。今 $\nu \in \sigma((T_C(0; \nu))$, $\mu \in \sigma(T(0))$ とする。$K(\nu)^{\omega} = (\nu^{-1}(\nu E - K)(E - K)^{-1})^{\omega}$ であるからスペクトル写像定理により

$$\left(\frac{\nu - k}{\nu(1 - k)}\right)^{\omega} \in \sigma\left(K(\nu)^{\omega}\right)$$

となる。したがって

$$\mu=\nu\left(\frac{\nu-k}{\nu(1-k)}\right)^{\omega}.$$

この関係式を鑑みて C-map を

$$C_{\omega,k}(z)=zg(k,z)$$

と定める。ここで

$$g(k,z)=\left(\frac{z-k}{(1-k)z}\right)^{\omega}:I\times D\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

で $I=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $D=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ である。関数 $C_{\omega,k}(z)$ は方程式 (LF) の特性乗数関数 (今後、簡単に *C-map*) という。$g(K,z)$ は well defined され、$g(k,z)$ はすべての $z\in D$ に対して k に関して正則関数であるから $zg(K,z)$ はすべての $z\in D$ に関して正則である。

方程式 (LF) 対して C-map 定理を述べる。

定理 2. [13, Theorem 2.5]**(C-map 定理)** $\nu\in\sigma(U_K(0))$ であることと $\mu=C_{\omega,k}(\nu)$ 満たす $(k,\mu)\in\sigma[KT(0)]$ が存在することは同値である。

証明命題 3.1 より $\nu\in\sigma(U_K(0))$ であることと $\det(\nu K(\nu)^{\omega}-T(0))=0$, すなわち、$0\in\sigma(\nu g(K,\nu)-T(0))$ であることは同値である。スペクトル写像定理によって $\sigma(\nu g(K,\nu))=\{\nu g(k,\nu)\mid k\in\sigma(K)\}$ を得る。さらに条件 (C) と補題 2.2 から $\nu g(K,\nu)$ と $T(0)$ は可換である。よって補題 3.1 より $0\in\sigma(\nu g(K,\nu)-T(0))$ と $\nu\in\sigma(U_K(0))$ は同値である。故に補題 4.1 より $\nu\in\sigma(U_K(0))$ と

$$\mu=\nu g(k_0,\nu),\quad G_{\nu g(K,\nu)}(\nu g(k_0,\nu))\cap G_{T(0)}(\mu)\neq\{0\}. \tag{5}$$

を満たす $(k_0,\mu)\in\sigma[KT(0)]$ が存在することは同値である。このような $k_0\in\sigma(K)$ に対して $\nu g(k,\nu)=\nu g(k_0,\nu)$ を満たす $k\in\sigma(K)$ の集合を $\{k_0,k_1,\cdots,k_p\}$, $p\leq d-1$ と表す。再度スペクトル写像定理を用いて

$$G_{\nu g(K,\nu)}(\nu g(k_0,\nu))=\bigoplus_{i=0}^{p}G_K(k_i)$$

を得る。したがって $G_{\nu g(K,\nu)}(\nu g(k_0,\nu))\cap G_{T(0)}(\mu)\neq\{0\}$ は

$$G_{T(0)}(\mu)\cap\bigoplus_{i=0}^{p}G_K(k_i)\neq\{0\}$$

と同値である。このとき $x\in G_{T(0)}(\mu)\cap\bigoplus_{i=1}^{p}G_K(k_i)$, $x\neq 0$ は

$$x=\sum_{i=0}^{p}P_ix,\ \ P_ix\in G_K(k_i)$$

と表現される。ここで $P_i : \mathbb{C}^d \to G_K(k_i)$ は射影である。$T(0)$ と K は可換であるから $T(0)P_i x = P_i T(0)x = P_i \mu x = \mu P_i x,\ i = 0, \cdots, p.$ $P_i x \neq 0$ となる少なくとも一つの i が存在するから

$$G_K(k_i) \cap G_{T(0)}(\mu) \neq \{0\}. \tag{6}$$

[8, Lemma A.2] より条件 (6) は条件 $W_K(k_i) \cap W_{T(0)}(\mu) \neq \{0\}$ と同値であるから条件 (5) は条件

$$\mu = C_{\omega,k_i}(\nu), \quad W_K(k_i) \cap W_{T(0)}(\mu) \neq \{0\}$$

に置き換えられる。したがって $(k_i, \mu) \in \sigma[KT(0)]$. □

系 4.2. [13, 系 2.6] $K = kE$ とする。このとき

$$\nu \in \sigma(U_k(0)) \Longleftrightarrow C_{\omega,k}(\nu) \in \sigma(T(0)).$$

C-map $\mu = C_{\omega,k}(z)$ は次のように書き換えられる:

$$P_{\omega,k}(z;\mu) = (z-k)^\omega - \mu(1-k)^\omega z^{\omega-1} = 0. \tag{7}$$

次の結果は [13, Corollary 2.7] の拡張である。

命題 4.3. 各 $(k, \mu) \in \sigma[KT(0)]$ に対して $\mu = C_{\omega,k}(\nu)$ のすべての解は $\sigma_{(k,\mu)}(U_K(0))$ に属する。

証明 $(k_0, \mu_0) \in \sigma[KT(0)]$ とする。このとき補題4.1 より $G_{k_0}(K) \cap G_{\mu_0}(T(0)) \neq \{0\}$ である。(7) より方程式 $P_{\omega,k_0}(z;\mu_0) = 0$ のすべての解が $\sigma_{(k_0,\mu_0)}(U_K(0))$ に属する、すなわち、命題 3.1 より方程式 $P_{\omega,k_0}(z;\mu_0) = 0$ の各解 $z = \nu$ は $0 \in \sigma(\nu g(K,\nu) - T(0))$ 満たすことを示す。関数 $zg(k,z)$ は $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ 上で k に関して正則であるから スペクトル写像定理を用いて

$$\sigma(\nu g(K,\nu)) = \{\nu g(k,\nu) \mid k \in \sigma(K)\}$$

を得る。

初めに、方程式 $P_{\omega,k_0}(z;\mu_0) = 0$ の任意の解 ν は明らかに $\nu g(k_0,\nu) - \mu_0 = 0$ を満たしているに注意しておく。

次に、

$$G_{\nu g(k_0,\nu)}(\nu g(K,\nu)) \cap G_{\mu_0}(T(0)) \neq \{0\},$$

であることを示す。$\nu g(k,\nu) = \nu g(k_0,\nu)$ を満たす $k \in \sigma(K)$ の集合を $\{k_0, k_1, \cdots, k_p\}$, $p \leq d-1$ で表す。再度スペクトル写像定理を用いて

$$G_{\nu g(k_0,\nu)}(\nu g(K,\nu)) = \bigoplus_{i=0}^{p} G_{k_i}(K)$$

を得る。故に

$$G_{\nu g(k_0,\nu)}(\nu g(K,\nu)) \cap G_{\mu_0}(T(0)) = [\bigoplus_{i=0}^{p} G_{k_i}(K)] \cap G_{\mu_0}(T(0))$$

となる。もし $[\bigoplus_{i=0}^{p} G_{k_i}(K)] \cap G_{\mu_0}(T(0)) = \{0\}$ ならば $G_{k_0}(K) \cap G_{\mu_0}(T(0)) = \{0\}$ となる。これは矛盾である。よって $[\bigoplus_{i=0}^{p} G_{k_i}(K)] \cap G_{\mu_0}(T(0)) \neq \{0\}$、すなわち、

$$G_{\nu g(k_0,\nu)}(\nu g(K,\nu)) \cap G_{\mu_0}(T(0)) \neq \{0\}$$

である。条件 (C) は $\nu g(K,\nu)$ と $T(0)$ が可換であることから補題 4.1 より $0 \in \sigma(\nu g(K,\nu) - T(0))$ となる 。したがって $\nu \in \sigma_{(k_0,\mu_0)}(U_K(0))$ である。 □

次の結果は命題 4.3 から直接出てくる。

命題 4.4. $\sigma_{(k,\mu)}(U_K(0)) \neq \emptyset$ で

$$\sigma(U_K(0)) = \cup_{(k,\mu)\in\sigma[KT(0)]}\sigma_{(k,\mu)}(U_K(0)).$$

証明 命題 4.3 より $\sigma_{(k,\mu)}(U_K(0)) \neq \emptyset$ は明らかである。任意の $\nu \in \sigma(U_K(0))$ に対して定理 2 より $\mu = C_{\omega,k}(\nu)$ を満たす $(k,\mu) \in \sigma[KT(0)]$ が存在する。 したがって $\nu \in \sigma_{(k,\mu)}(U_K(0))$ を得る。逆は明らかである。 □

5 関数 $B_{\omega,k}(\theta)$ の性質

この節では関数 $B_{\omega,k}(\theta) := C_{\omega,k}(e^{i\theta})$ の性質及びその表現を述べる。今後、特に断らない限り $\omega \in \mathbb{Z}_2^\infty$ とする。

初めに、関数 $B_{\omega,k}(\theta)$ の性質を述べる。C-map $C_{\omega,k}(z)$ の単位円の像は次の関数

$$B_{\omega,k}(\theta) := C_{\omega,k}(e^{i\theta}) = \left(\frac{1-ke^{-i\theta}}{1-k}\right)^{\omega} e^{i\theta},\ -\pi < \theta \leq \pi \tag{8}$$

で与えられる。容易に次のことが分かる。

1) $B_{\omega,k}(0) = 1 \in \mathbb{R}$.

2) $B_{\omega,k}(\pi) = -\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{\omega} \in \mathbb{R}$.

3) $B_{\omega,k}(\theta)$ は $[0,\pi]$ 上で微分可能 。

4) $\lim_{k\to 1} |B_{\omega,k}(\pi)| = \infty$.

$C = \{z \mid |z| \leq 1\}$ と置き、$C_{\omega,k}(\nu)$ の winding number を $n(\partial C, C_{\omega,k})$ によって表す。

補題 5.1. 次の命題が成立する。

1) すべての $\theta \in (-\pi,\pi]$ に対して $B_{\omega,k}(\theta) \neq 0$.

2) $B_{\omega,k}(\theta+2n\pi) = B_{\omega,k}(\theta)$ 及び $B_{\omega,k}(\theta) = \overline{B_{\omega,k}(-\theta)}$, $(n \in \mathbb{Z},\ -\pi < \theta \leq \pi)$.

3) $B_{\omega,k}(-\pi) := \lim_{\theta\to-\pi} B_{\omega,k}(\theta) = -\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{\omega} \in \mathbb{R}$.

4) $C_{\omega,k}(1) = 1$ 及び $C_{\omega,k}(\nu) = \overline{C_{\omega,k}(\overline{\nu})}$.

5) $n(\partial C, C_{\omega,k}) = 1$.

証明 1), 2), 3) と 4) は明らかである。5) は argument principle により

$$n(\partial C, C_{\omega,k}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial C}\frac{C'_{\omega,k}(\nu)}{C_{\omega,k}(\nu)}d\nu = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\partial C}\frac{\omega}{\nu-k}d\nu + \int_{\partial C}\frac{1-\omega}{\nu}d\nu\right] = 1$$

が得られる。 □ $B_{\omega,k}(\theta)$ の表現を得るため、任意の $k,\ 0<|k|<1$ と任意の $\theta\in(-\pi,\pi]$ に対して以下のように $\beta(k,\theta)$ を定める。

$$\tan\beta(k,\theta) = \frac{k\sin\theta}{1-k\cos\theta},\ |\beta(k,\theta)| < \frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

$\beta(k,\theta)$ の初等的性質を述べる。

補題 5.2. 次の命題が成立する。

1) $0<k<1 \Longleftrightarrow$ すべての $\theta\in(0,\pi)$ に対して $0<\beta(k,\theta)<\frac{\pi}{2}$ が成り立つ。

2) $-1<k<0 \Longleftrightarrow$ すべての $\theta\in(0,\pi)$ に対して $-\frac{\pi}{2}<\beta(k,\theta)<0$ が成り立つ。

3) 任意の $\theta\in(0,\pi)$ に対して $\beta(k,\theta)$ は $k,\ 0<|k|<1$ に関して増加である。

補題 5.2 の 1) と 2) はすべての $\theta\in(0,\pi)$ と $k, 0<|k|<1$ に対して $\beta(k,\theta)\neq 0$ が成り立つことを示している。

(9) は

$$\frac{\sin\beta(k,\theta)}{\cos\beta(k,\theta)} = \frac{k\sin\theta}{1-k\cos\theta}$$

であるから

$$k\sin(\beta(k,\theta)+\theta) = \sin\beta(k,\theta). \tag{10}$$

と表すことができる。

次に関数 $B_{\omega,k}(\theta)$ の表現を述べる。次の関係式はしばしば用いられる。

$$1-ke^{-i\theta} = \sqrt{1-2k\cos\theta+k^2}\,e^{i\beta(k,\theta)}. \tag{11}$$

$B_{\omega,k}(\theta)$ の表現は (11) を用いて以下のように表される。

命題 5.3. $B_{\omega,k}(\theta)$ の表現は以下のように表される。

$$B_{\omega,k}(\theta) = \frac{(1-2k\cos\theta+k^2)^{\frac{\omega}{2}}}{(1-k)^{\omega}}e^{i\varphi_k(\theta)},\ \theta\in(-\pi,\pi],$$

ここで

$$\varphi_k(\theta) = \omega\beta(k,\theta)+\theta,\ -\pi<\theta\le\pi. \tag{12}$$

系 5.4. 次の結果が成り立つ。

1) すべての k $(0<|k|<1)$ に対して $\beta(k,0)=0$ 及び $\varphi_k(0)=0$ が成り立つ。

2) すべての k $(0<|k|<1)$ に対して $\beta(k,\pi)=0$ 及び $\varphi_k(\pi)=\pi$ が成り立つ。

3) すべての θ $(0<|\theta|<\pi)$ と k $(0<|k|<1)$ に対して $\beta(k,\theta)\neq 0$ である。

命題 5.3 より

$$|B_{\omega,k}(\theta)|=\frac{(1-2k\cos\theta+k^2)^{\frac{\omega}{2}}}{(1-k)^{\omega}},\ |\varphi_k(\theta)|<\left(\frac{\omega}{2}+1\right)\pi \tag{13}$$

を得る。したがって次の結果が得られる。 .

補題 5.5. $\theta\in[0,\pi]$ とする。このとき次の命題が成立する。

1) $0<k<1$ ならば、$|B_{\omega,k}(\theta)|\geq 1$ 及び $|B_{\omega,k}(\theta)|$ は θ に関して増加である。

2) $-1<k<0$ ならば $|B_{\omega,k}(\theta)|\leq 1$ 及び $|B_{\omega,k}(\theta)|$ は θ に関して減少である。

系 5.6. 次の命題が成り立つ。

1) $0<k<1$ ならば、$\min_{0\leq\theta\leq\pi}|B_{\omega,k}(\theta)|=B_{\omega,k}(0)=1$ 及び

$$\max_{0\leq\theta\leq\pi}|B_{\omega,k}(\theta)|=|B_{\omega,k}(\pi)|=\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{\omega}.$$

2) $-1<k<0$ ならば、$\min_{0\leq\theta\leq\pi}|B_{\omega,k}(\theta)|=|B_{\omega,k}(\pi)|=\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{\omega}$ 及び $\max_{0\leq\theta\leq\pi}|B_{\omega,k}(\theta)|=B_{\omega,k}(0)=1.$

さらに、

$$|B_{\omega,k}(\theta)|^{\frac{2}{\omega}}=1+\frac{2k}{(1-k)^2}(1-\cos\theta), \tag{14}$$

であるから次の補題が成り立つ。

補題 5.7. $0<|k|<1$ かつ $\theta\in(0,\pi]$ とする。このとき $|B_{\omega,\theta}(k)|$ は k に関して増加である。

証明 $b(k):=|B_{\omega,\theta}(k)|^{\frac{2}{\omega}}$ と置く。(14) に注意すれば、

$$b'(k)=\frac{2(1+k)}{(1-k)^3}(1-\cos\theta)>0$$

を得る。よって $b(k)$ は k に関して増加である。 □

6 方程式 $\Im B_{\omega,k}(\theta)=0$ の解の存在とその解法

この節では方程式 $\Im B_{\omega,k}(\theta)=0$ の解の存在は証明なしに述べ解法について主に述べる。明らかに

$$\Im B_{\omega,k}(\theta)=0 \Longleftrightarrow \sin\varphi_k(\theta)=0 \Longleftrightarrow m\pi=\omega\beta(k,\theta)+\theta,\ m\in\mathbb{Z}$$

が成立する。

6.1　方程式 $\Im B_{\omega,k}(\theta)=0$ の解の存在

初めに、$0<|k|\le\frac{1}{\omega-1}$ の場合 $[0,\pi]$ 上で方程式 $\Im B_{\omega,k}(\theta)=0$ の解の存在を示す。

定理 3. $\theta\in[0,\pi]$ とする。$0<|k|\le\frac{1}{\omega-1}$ ならば、方程式 $\Im B_{\omega,k}(\theta)=0$ の解は $\theta=0,\ \pi$ のみである。

次に、$\frac{1}{\omega-1}<|k|<1$ の場合 $(0,\pi)$ 上で方程式 $\Im B_{\omega,k}(\theta)=0$ の解の存在を示す。

定理 4. $\omega\in\mathbb{Z}_3^{\infty}$ とする。$\frac{1}{\omega-1}<|k|<1$ ならば、方程式 $\Im B_{\omega,k}(\theta)=0$ は $(0,\pi)$ の中に少なくとも一つの解をもつ。

6.2　方程式 $\Im B_{\omega,k}(\theta)=0$ の解法

ここでは $\frac{1}{\omega-1}<|k|<1$ の場合方程式 $\Im B_{\omega,k}(\theta)=0$ を解き、また $(0,\pi)$ 上での解の個数を調べる。まずこの方程式を $\omega-2,\ \omega\in\mathbb{Z}_3^{\infty}$ 次の代数方程式に変換する。$a\in\mathbb{R}$ に対して記号 $[a]$ は a を超えない最大の整数を表す。一般的に

$$\sin n\theta=\sin\theta\sum_{p=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^p\binom{n-1-p}{p}(2\cos\theta)^{n-1-2p}, \tag{15}$$

であるから次の結果を得る。

命題 6.1. $\theta\in(0,\pi)$ 及び $\frac{1}{\omega-1}<|k|<1$ とする。このとき方程式 $\Im B_{\omega,k}(\theta)=0$ は $\omega-2$ 次の代数方程式

$$1+k\sum_{j=1}^{\omega-1}\binom{\omega}{j+1}(-k)^j\sum_{p=0}^{[(j-1)/2]}(-1)^p\binom{j-1-p}{p}X^{j-1-2p}=0 \tag{16}$$

と同値である。ここで $X=2\cos\theta$.

証明 $\frac{1}{\omega-1}<|k|<1$ であるから方程式 $\Im B_{\omega,k}(\theta)=0$ は定理 4 により $(0,\pi)$ の中に解を持つ。 $B_{\omega,k}(\theta)$ の定義と二項定理を用いて

$$\begin{aligned}(1-k)^\omega B_{\omega,k}(\theta)&=(e^{i\theta}-k)^\omega e^{-i(\omega-1)\theta}\\&=\sum_{j=0}^{\omega}\binom{\omega}{j}(-k)^j e^{i(1-j)\theta}\\&=-\omega k+e^{i\theta}-k\sum_{j=1}^{\omega-1}\binom{\omega}{j+1}(-k)^j e^{-ij\theta}.\end{aligned}$$

オイラーの公式により以下の同値性が成立する。

$$\Im B_{\omega,k}(\theta)=0\iff\sin\theta+k\sum_{j=1}^{\omega-1}\binom{\omega}{j+1}(-k)^j\sin j\theta=0.$$

したがって, (15) より証明が完了する。 □

次の結果は命題 6.1 の直接的な結果である。

系 6.2. 方程式 $\Im B_{\omega,k}(\theta) = 0$ の解の個数は $(0,\pi)$ の中で高々 $\omega - 2$ 個存在する。

$[0,\pi]$ 上での方程式 $\Im B_{\omega,k}(\theta) = 0$ の解の存在は $\sin\varphi_k(\theta) = 0$ である。よって

$$m\pi = \omega\beta(k,\theta) + \theta,\ m \in \mathbb{Z}. \tag{17}$$

したがって

$$\beta_m(\theta) = \frac{m\pi - \theta}{\omega},\ 0 \le \theta \le \pi$$

と置けば (17) から $\beta(k,\theta) = \beta_m(\theta)$ を得る。明らかに、$|\beta_m(\theta)| < \frac{\pi}{2}$.

$$\omega_0 = \left[\frac{\omega}{2}\right],\ \mathbb{O} = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\},\ \mathbb{E} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

と定める。このとき $\omega \in \mathbb{O}$ ならば、$\omega_0 = \frac{\omega}{2} - \frac{1}{2}$; $\omega \in \mathbb{E}$ ならば、$\omega_0 = \frac{\omega}{2}$. さらに $|\beta_m(\theta)| < \frac{\pi}{2}$ であるから $-\frac{\omega}{2} + \frac{\theta}{\pi} < m < \frac{\omega}{2} + \frac{\theta}{\pi}$ である。$\theta \in (0,\pi)$ と $\omega \in \mathbb{Z}_3^\infty$ に対して

$$\mathbb{Z}(\theta) = \mathbb{Z}_+(\theta) \cup \mathbb{Z}_-(\theta)$$

と定める。ここで

$$\mathbb{Z}_+(\theta) = \left\{m \in \mathbb{Z} \mid 1 \le m < \frac{\omega}{2} + \frac{\theta}{\pi}\right\},$$

$$\mathbb{Z}_-(\theta) = \left\{m \in \mathbb{Z} \mid -\frac{\omega}{2} + \frac{\theta}{\pi} < m \le 0\right\}.$$

特に。$\theta = 0, \pi$ ならば

$$\mathbb{Z}(0) = \mathbb{Z}_-(0) = \{0\},\ \mathbb{Z}(\pi) = \mathbb{Z}_+(\pi) = \{1\}. \tag{18}$$

次に (10) を考慮して

$$g_m(\theta) := g_{m,k}(\theta) = \sin\beta_m(\theta) - k\sin(\beta_m(\theta) + \theta),\ \theta \in (0,\pi), \tag{19}$$

と定める。ここで $m \in \mathbb{Z}(\theta)$. 方程式 $g_{m,k}(\theta) = 0$ を用いて方程式 $\Im B_{\omega,k}(\theta) = 0$ を解くことができる。

補題 6.3. $\theta \in (0,\pi)$ に対して次の命題が成り立つ。

1) *If* $m \in \mathbb{O} \cap \mathbb{Z}(\theta)$ ならば、方程式 $g_{m,k}(\theta) = 0$ は次の方程式と同値である。

$$\sin\beta_m(\theta) = k\sin((\omega - 1)\beta_m(\theta)).$$

2) *If* $m \in \mathbb{E} \cap \mathbb{Z}(\theta)$ ならば、方程式 $g_{m,k}(\theta) = 0$ は次の方程式と同値である。

$$\sin\beta_m(\theta) = -k\sin((\omega - 1)\beta_m(\theta)).$$

証明 等式

$$(\omega-1)\beta_m(\theta)=m\pi-\frac{m\pi+(\omega-1)\theta}{\omega}$$

より $\beta_m(\theta)+\theta=m\pi-(\omega-1)\beta_m(\theta)$ が得られる。これより補題が容易に得られる。 □

この事実に基づき次の結果を得る。

命題 6.4. $\frac{1}{\omega-1}<|k|<1$, $\theta\in(0,\pi)$ として $X=2\cos\beta_m(\theta)$ とおく。

1) $m\in\mathbb{O}\cap\mathbb{Z}(\theta)$ とする。このとき $g_{m,k}(\theta)=0$ は

$$1-k\sum_{p=0}^{\omega_0-1}(-1)^p\binom{\omega-2-p}{p}X^{\omega-2-2p}=0 \tag{20}$$

と同値である。

2) $m\in\mathbb{E}\cap\mathbb{Z}(\theta)$ とする。このとき $g_{m,k}(\theta)=0$ は

$$1+k\sum_{p=0}^{\omega_0-1}(-1)^p\binom{\omega-2-p}{p}X^{\omega-2-2p}=0 \tag{21}$$

と同値である。

証明 1) $m\in\mathbb{O}$ とする。このとき補題 6.3 より $g_{m,k}(\theta)=0$ は $\sin\beta_m(\theta)=k\sin[(\omega-1)\beta_m(\theta)]$ と同値である。(15) により

$$\sin((\omega-1)\beta_m(\theta))=\sin\beta_m(\theta)\sum_{p=0}^{\omega_0-1}(-1)^p\binom{\omega-2-p}{p}(2\cos\beta_m(\theta))^{\omega-2-2p}$$

を得る。$\sin\beta_m(\theta)\neq0$ であるから (20) を得る。

2) $m\in\mathbb{E}$ とする。このとき上記と同様にして (21) を得る。 □

$\omega=4$ の場合、方程式 $\Im B_{4,k}(\theta)=0$ の解を命題 6.1 と命題 6.4 による二通りの方法で求める。

例 6.5. 方程式 $\Im B_{4,k}(\theta)=0$ の解 $\gamma_\pm\in(0,\pi)$ 以下のように与えられる:

1) $\frac{1}{3}<k<1$ ならば、このとき

$$\gamma_+=\arccos\left(\frac{k^2+2k-1}{2k^2}\right). \tag{22}$$

2) $-1<k<-\frac{1}{3}$ ならば、このとき

$$\gamma_-=\arccos\left(\frac{-k^2+2k+1}{2k^2}\right). \tag{23}$$

証明 初めに、命題 6.1 を用いる。(16) より $1-6k^2+k^4+4k^3X-k^4X^2=0$ を得る。よって方程式 (16) の解は

$$X = 2\cos\gamma = \frac{2k \mp (1-k^2)}{k^2}$$

によって与えられる。$\frac{1}{3} < |k| < 1$ ならば、このとき $2|\cos\gamma| < 2$, すなわち、$|\cos\gamma| = \left|\frac{2k\mp(1-k^2)}{2k^2}\right| < 1$ である。このとき方程式 $\Im B_{4,k}(\theta) = 0$ の解 $\gamma \in (0,\pi)$ は (22) と (23) で与えられる。

次に、命題6.4を用いる。$\omega = 4$, $\omega_0 = 2$であるから $\cup_{0<\theta<\pi}\mathbb{Z}^4_+(\theta) = \{1,2\}$ 及び $\cup_{0<\theta<\pi}\mathbb{Z}^4_-(\theta) = \{-1,0\}$ となる。

1) $\frac{1}{3} < k < 1$ 及び $m=1$ するならば (20) は $1-k(X^2-1)=0$, すなわち、$\cos\beta_1(\theta) = \sqrt{\frac{k+1}{4k}}$ となる。$\cos\frac{\pi-\theta}{4} = \sqrt{\frac{k+1}{4k}}$ であるから $\cos\theta = \frac{k^2+2k-1}{2k^2}$ を得る。

$m = 2 \in \mathbb{E}$ ならば、(20) は $1+k(X^2-1)=0$ 及び $2\cos\beta_2(\theta) = X$ となる。よって $X^2 = \frac{k-1}{k} < 0$ である。これは解が存在しないことを意味する。

2) $-1 < k < -\frac{1}{3}$ 及び $m=0$ とするならば、(21) は $1+k(X^2-1)=0$, すなわち、$\cos\beta_0(\theta) = \sqrt{\frac{k-1}{4k}}$ となる。$\cos\frac{-\theta}{4} = \sqrt{\frac{k-1}{4k}}$ であるから $\cos\theta = \frac{-k^2+2k+1}{2k^2}$ を得る。

$m = -1 \in \mathbb{O}$ ならば (20) は $1-k(X^2-1)=0$ 及び $2\cos\beta_{-1}(\theta) = X$ となる。よって $X^2 = \frac{k+1}{k} < 0$ である。これは解が存在しないことを意味する。□

上記と同様の議論を用いて $\omega = 3$ の場合の結果は次の通りである。

例 6.6. $\omega = 3$ 及び $\frac{1}{\omega-1} = \frac{1}{2} < |k| < 1$ とする。このとき方程式 $\Im B_{3,k}(\theta) = 0$ の解 $\gamma \in (0,\pi)$ は一意的で

$$\gamma = \arccos\left(\frac{3k^2-1}{2k^3}\right)$$

で与えられる。特に、

1) $\frac{1}{\sqrt{3}} < k < 1$ ならば $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$.
2) $\frac{1}{2} < k \le \frac{1}{\sqrt{3}}$ ならば $\frac{\pi}{2} \le \gamma < \pi$.
3) $-\frac{1}{\sqrt{3}} \le k < -\frac{1}{2}$ ならば $0 < \gamma \le \frac{\pi}{2}$.
4) $-1 < k < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ならば $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$.

7 関数 $B_{\omega,k}(\theta)$ から導かれる或る閉曲線の幾何学的性質

この節では関数 $B_{\omega,k}(\theta)$, $\theta \in (-\pi,\pi]$ から導かれる或る閉曲線の幾何学的性質を扱う。有界領域 Ω の境界を $\partial\Omega$ によって表す。それが 単純閉曲線ならば、Ω は $\partial\Omega$ によって囲まれた領域という。このとき Ω の内部及び外部を各々$int\ \Omega$ 及び $ext\Omega$ で表す。正の数 $\gamma \in (0,\pi]$ と区間 $I(\gamma)$ を以下のように定める。

$$\gamma = \begin{cases} \pi, & 0 < |k| \le \frac{1}{\omega-1}, \\ \min\{\theta \in (0,\pi) \mid \Im B_{\omega,k}(\theta) = 0\}, & \frac{1}{\omega-1} < k < 1, \\ \max\{\theta \in (0,\pi) \mid \Im B_{\omega,k}(\theta) = 0\}, & -1 < k < -\frac{1}{\omega-1}. \end{cases}$$

と

$$
I(\gamma)=\begin{cases}[0,\pi],\ \gamma=\pi, & 0<|k|\le\frac{1}{\omega-1},\\ [0,\gamma],\ \gamma\neq\pi, & \frac{1}{\omega-1}<k<1,\\ [\gamma,\pi],\ \gamma\neq\pi, & -1<k<-\frac{1}{\omega-1}.\end{cases} \tag{24}
$$

明らかに、$B_{\omega,k}(\gamma)\in\mathbb{R}$ かつ $B_{\omega,k}(-\gamma)\in\mathbb{R}$ である。$B^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ を直線 $\mathbb{R}$ と曲線 $B_{\omega,k}(\theta)$ の $I(\gamma)$ への制限によって囲まれた領域とする。さらに領域 $B^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ とその $\mathbb{R}$ に関する対称領域の和を $D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ によって表す。このとき閉曲線 $\partial D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ を原点の周りの最小閉曲線 (簡単に、m-閉曲線) と呼び、その定義域を $I_D(\gamma)$ と表す。明らかに $I(\gamma)\subset I_D(\gamma)$ である。それは次の性質を持つ:

1) $0\in int\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$.
2) $int\ I(\gamma)$ 上で $\partial D^{\gamma}_{\omega,k}(0)\not\subset\mathbb{R}$.
3) $D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ は単純領域である。.

$0<|k|\le\frac{1}{\omega-1}$ ならば、$\partial D^{\gamma}_{\omega,k}(0)=\partial D^{\pi}_{\omega,k}(0)$. $\mathbb{C}_+=\{z\in\mathbb{C}\mid\Im z\ge 0\}$ と $\mathbb{C}_-=\{z\in\mathbb{C}\mid\Im z\le 0\}$ と置く。このとき $\partial B^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ は $\mathbb{C}_+$ か $\mathbb{C}_-$ に横たわっている。以下の図 1 は $\omega=3$ に対して $D^{\gamma}_{3,k}(0)$ を示してる。

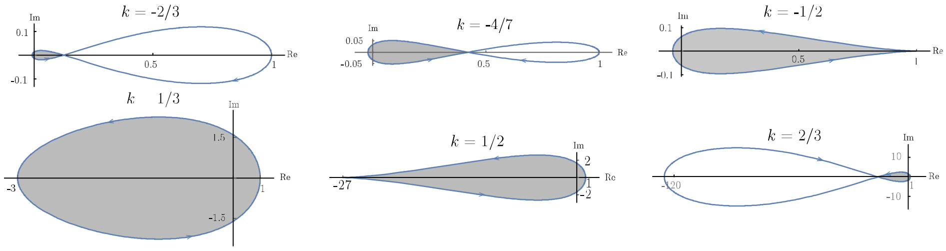

図 1: 複素平面における $B_{3,k}(\theta)$ のグラフと領域 $D^{\gamma}_{3,k}(0)$.

補題 7.1. $|B_{\omega,k}(\theta)|$ は $I(\gamma)$ 上で単射、連続 かつ単調である。

証明 Set $\mu_\theta=|B_{\omega,k}(\theta)|$ と置く。$|B_{\omega,k}(\theta)|$ は補題 5.5 により $I(\gamma)$ にて単調であるから $0<k<1$ ならば、関数 $|B_{\omega,k}(\theta)|:[0,\gamma]\to[\mu_0,\mu_\gamma]$ は単射である。同様に、$-1<k<0$ ならば、関数 $|B_{\omega,k}(\theta)|:[\gamma,\pi]\to[\mu_\pi,\mu_\gamma]$ はやはり単射である。したがって $|B_{\omega,k}(\theta)|$ は $I(\gamma)$ 上で単射である. □

補題 7.2. $\partial B^{\gamma}_{\omega,k}(0)\subset\mathbb{C}_+$ かつ $\varphi'_k(\gamma)\ge 0$. さらに $-\frac{1}{\omega-1}\le k<1$ $(k\neq 0)$ ならば、$\varphi_k(\gamma)=\pi$; $-1<k<-\frac{1}{\omega-1}$ ならば、$\varphi_k(\gamma)=0$.

証明 i) $\frac{1}{\omega-1}<k<1$ とする。 このとき $I(\gamma)=[0,\gamma]$. $-\frac{1}{\omega-1}<k<1$ ならば、$\varphi'_k(0)>0$ は容易に示される。系 5.4 は $\varphi_k(0)=0$ を意味する。さらに $\varphi_k(\gamma)=\pi$ である。実際、$\varphi_k(\gamma)=0$ または π である。 $\varphi_k(\gamma)=0$ ならば、$\beta(k,\gamma)=-\frac{\gamma}{\omega}<0$ である。これは補題 5.2 の主張と矛盾である。したがって $\partial B^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ は $\mathbb{C}_+$ 上に横たわれる

次に、$\varphi'_k(\gamma)\ge 0$ を示す。実際、矛盾を示すため $\varphi'_k(\gamma)<0$ と仮定する。$\varphi'_k(\theta)$ は $[0,\gamma]$ 上で連続であるから、$[\gamma-\delta,\gamma]$ 上で $\varphi'_k(\theta)<0$ かつ $\varphi_k(\gamma-\delta)<2\pi$

となる正の数 $\delta > 0$ が存在する。したがって $\varphi_k(\gamma) - \varphi_k(\gamma-\delta) = \varphi_k'(\eta)\delta < 0$ を満たす $\eta \in (\gamma-\delta, \gamma)$ が存在する。よって $\varphi_k(\gamma) = \pi < \varphi_k(\gamma-\delta) < 2\pi$ となる。これは $B_{\omega,k}(\gamma-\delta) \notin \mathbb{C}_+$ を示している。よって矛盾である。

ii) $-1 < k < -\frac{1}{\omega-1}$ とする。このとき $I(\gamma) = [\gamma, \pi]$. $\varphi_k'(\pi) > 0$ は容易に示される。さらに $\varphi_k(\gamma) = 0$ である。実際、$\varphi_k(\gamma) = \pi$ ならば、$\beta(k,\gamma) = \frac{\pi-\gamma}{\omega} > 0$ である。これは補題 5.2 の主張と矛盾する。よって $\partial B^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ は $\mathbb{C}_+$ 上に横たわる。このとき $\varphi_k'(\gamma) \geq 0$ は上記と同様にして得られる。

iii) $0 < |k| \leq \frac{1}{\omega-1}$ とする。このとき $I(\gamma) = [0,\pi]$. 系 5.4 は $\varphi_k(0) = 0$ および $\varphi_k(\pi) = \pi$ を意味する。さらに定理 3 により $(0,\pi)$ 上で $\varphi_k(\theta) > 0$ かつ $\varphi_k'(\gamma) \geq 0$ $(\gamma = 0, \pi)$. □

補題 7.1 と補題 7.2 は $|B_{\omega,k}(\theta)|$ と $\varphi_k(\theta)$ が $I(\gamma)$ 上で強単調であることを示している。原点から点 $\mu = |\mu|e^{i\varphi} \in \mathbb{C},\ \mu \neq 0$ を結ぶ半直線を L_μ または ℓ_φ と表す。

定義 7.3. $\partial\Omega$ は原点の周りの閉曲線とする。各 $\mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対して $\partial\Omega$ と L_μ が一点で交わるとき $\partial\Omega$ は単調 *starlike* 曲線 (単に、*m-starlike* 曲線) という。

例えば、原点を内点とする円、楕円 などは m-starlike 曲線である。また原点を内点にする凸領域の境界も m-starlike 曲線である。

定理 5. *m-閉曲線 $\partial D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ は m-starlike 曲線である。*

証明 $\omega \in \mathbb{Z}_3^\infty$ とする。$0 \leq \mathrm{Arg}\ \mu \leq \pi$ となる各 $\mu \in \mathbb{C}$ に対して $\partial B^{\gamma}_{\omega,k}(0) \cap L_\mu$ の要素が一つであることを示せば十分である。補題 7.2 より $\partial B^{\gamma}_{\omega,k}(0) \cap L_\mu$ は $\mathbb{C}_+$ の中に含まれる。矛盾を導くため $\partial B^{\gamma}_{\omega,k}(0) \cap L_\mu = \{\delta_1, \delta_2\}$ 満たす $\mu := |\mu|e^{i\varphi}$ と δ_1, δ_2 $(|\delta_1| < |\delta_2|)$ が存在する。このとき補題 7.1 と命題 5.3 を用いれば $\delta_i = B_{\omega,k}(\theta_i)$ 及び $\varphi = \varphi_k(\theta_i),\ i = 1,2$ となる $\theta_1,\ \theta_2 \in I(\gamma)$ が存在する。 $|\delta_1| < |\delta_2|$ であるから補題 5.5 より $0 < k < 1$ ならば、$\theta_1 < \theta_2$; $-1 < k < 0$ ならば、$\theta_2 < \theta_1$ である。

$$\psi = \sup\{\phi > \varphi \mid \partial D^{\gamma}_{\omega,k}(0) \cap \ell_\phi \text{ は一意的でない }\}$$

を定める。$\psi \leq \pi$ であるから、$\psi = \varphi_k(\theta_0)$ が成り立つような $\theta_0 \in I(\gamma)$ が一意的に存在する。

θ_0 において $B_{\omega,k}(\theta)$ 接線は $L_{\delta_0},\ \delta_0 = B_{\omega,k}(\theta_0)$ と一致する。$\frac{d}{d\theta}B_{\omega,k}(\theta) = \frac{i(1-ke^{-i\theta})^{\omega-1}}{(1-k)^\omega}[k\omega - k + e^{i\theta}]$ かつ半直線 L_{δ_0} の傾きは $B_{\omega,k}(\theta_0)$ と表されるから

$$B_{\omega,k}(\theta_0)i[e^{i\theta_0} + k(\omega-1)] = B_{\omega,k}(\theta_0)(e^{i\theta_0} - k)$$

を得る。すなわち、$i[e^{i\theta_0} + k(\omega-1)] = (e^{i\theta_0} - k)$. これは

$$\begin{cases} k\omega - k + \cos\theta_0 - \sin\theta_0 = 0 \\ k - \cos\theta_0 + \sin\theta_0 = 0 \end{cases}$$

を意味する。したがって $\sin\theta_0 = \frac{k\omega}{2},\ \cos\theta_0 = -\frac{k(\omega-2)}{2}$. その結果 $\tan\theta_0 = -\frac{\omega}{\omega-2} < 0$. ゆえに $-\frac{\pi}{2} < \theta_0 < 0$. これは矛盾である。したがって $\partial B^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ と L_μ は一点で交わる。 $\omega = 2$ の場合は容易に示される。 □

8　ゼロ解の安定領域

この節では方程式 (L) のゼロ解の DFC による安定化の判定を与える。

次の結果は [13] の定理 8.1 の拡張である。

定理 6. $(k,\mu)\in\sigma[KT(0)]$ とする。このとき次の命題が成立する:

1) $\mu\in int\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ ならば、すべての $\nu\in\sigma_{(k,\mu)}(U_K(0))$ に対して $|\nu|<1$ が成り立つ。

2) $\mu\in ext\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ ならば、$|\nu|\geq 1$ となる $\nu\in\sigma_{(k,\mu)}(U_K(0))$ が存在する。

証明 $(k,\mu)\in\sigma[KT(0)]$ とする。このとき $k\in\sigma(K)$ で $\mu:=|\mu|e^{i\varphi}\in\sigma(T(0))$ である。命題 4.3 により $\mu=C_{\omega,k}(\nu)$ のすべての解は $\sigma_{(k,\mu)}(U_K(0))$ に属する。

1) $\mu\in int\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ とする。このときすべての $\nu\in\sigma_{(k,\mu)}(U_K(0))$ に対して不等式 $|\nu|<1$ が成り立つことを示す。そのために矛盾法を用いる。今、或る $\nu\in\sigma_{(k,\mu)}(U_K(0))$ に対して $|\nu|\geq 1$ だとする。

$|\nu|=1$ の場合を考える。このとき $\mu\in\partial D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ または $\mu\in ext\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ となる。これは矛盾である。

次に、$|\nu|>1$ の場合を考える。原点を中心とした単位閉円盤を C と表す。このとき $\nu_0\in int\ C\cap\mathbb{R}$ および $\mu_0:=C_{\omega,k}(\nu_0)\in int\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ を満たす $\nu_0\in\mathbb{R}$ を選ぶ。

さらに、ν_0 と ν を結んだ線分を L とする。このとき $\partial C\cap L$ の要素は一つでそれを η と表す。すなわち、η は線分 L と単位円 ∂C の交点である。したがって $|\eta|=1$. 写像 $C_{\omega,k}(\cdot)$ は点 η の近傍で正則であるから

$$\frac{d}{d\nu}C_{\omega,k}(\nu)\bigg|_{\nu=\eta}=\left(\frac{\nu-k}{(1-k)\nu}\right)^{\omega-1}\frac{\nu+(\omega-1)k}{(1-k)\nu}\bigg|_{\nu=\eta}$$

を得る。仮定 (K-3) により $\eta\neq k$ であるから $\frac{d}{d\nu}C_{\omega,k}(\eta)=0$ と $\eta=-(\omega-1)k$ は同値である。したがって $|\eta|=1=(\omega-1)|k|$.

(1) $\frac{d}{d\nu}C_{\omega,k}(\eta)\neq 0$, すなわち、$|k|\neq\frac{1}{\omega-1}$ の場合。 このとき η において等角写像、すなわち、二つの曲線 L と ∂C の間の角は二つの曲線 $C_{\omega,k}(L)$ と $\partial D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ の間の角と一致する。 したがって $C_{\omega,k}(L)$ に属する $ext\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ の点が存在する。他方、μ と μ_0 は曲線 $C_{\omega,k}(L)$ によって結ばれてさらに μ と μ_0 は $int\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ に属するから, $C_{\omega,k}(\xi)\in\partial D^{\gamma}_{\omega,k}(0)\cap C_{\omega,k}(L)$ となるもう一つの点 $\xi\in L$ が存在する。$\xi\in\partial C$ であるから η の一意性に矛盾する。

(2) $\frac{d}{d\nu}C_{\omega,k}(\eta)=0$、すなわち、$|k|=\frac{1}{\omega-1}$ の場合。このとき定理 3 より $D^{\gamma}_{\omega,k}(0)=D^{\pi}_{\omega,k}(0)$ である。故に、$\eta=\pm1$. さらに $\mu\in\mathbb{R}$ であるから $\nu\in\mathbb{R}$ ならば、$L\subset\mathbb{R}$. 特に、$C_{\omega,k}(1)=1$ 及び $C_{\omega,k}(-1)=-\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{\omega}$ である。

(2-a) $k=-\frac{1}{\omega-1}$, すなわち、$\eta=1$ とする。このとき $\nu>1$ 及び $C_{\omega,-\frac{1}{\omega-1}}(L)\subset\mathbb{R}$ となる。$C_{\omega,-\frac{1}{\omega-1}}(x)=x\left(\frac{x(\omega-1)+1}{\omega x}\right)^{\omega}$ であるから $\frac{d}{dx}C_{\omega,-\frac{1}{\omega-1}}(1)=0$ 及び $\frac{d^2}{dx^2}C_{\omega,-\frac{1}{\omega-1}}(1)>0$. その結果 $C_{\omega,-\frac{1}{\omega-1}}(1)=1$ は L 上で最小値である。こ

れは

$$C_{\omega,-\frac{1}{\omega-1}}(1)=1<C_{\omega,-\frac{1}{\omega-1}}(\nu)=\mu,$$

すなわち、$\mu\in ext\ D^{\pi}_{\omega,-\frac{1}{\omega-1}}(0)$ を示している。これは矛盾である。

(2-b) $k=\frac{1}{\omega-1}$ とする。このときは上記と同様にして矛盾が導かれる。

2) $\mu\in ext\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ とする。矛盾を導くため、$|\nu|<1$ 及び $\mu=C_{\omega,k}(\nu)$ を満たす $\nu\in\sigma_{(k,\mu)}(U_K(0))$ が存在すると仮定する。L は ν と k $(k\neq\nu)$ を結んだ線分とする。 このとき $L\subset int\ C$ である。 $C_{\omega,k}(k)=0$ であるから $\eta\in C_{\omega,k}(L)\cap\partial D^{\gamma}_{\omega,k}(0)\neq\emptyset$ が存在する。故に $\eta=C_{\omega,k}(\xi)$ となる $\xi\in L$ が存在する。これは矛盾である。 □

系 8.1. $K=kE$ および $\mu\in\sigma(T(0))$ とする。

1) $\mu\in int\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ ならば、すべての $\nu\in\sigma_{\mu}(U_k(0))$ に対して $|\nu|<1$ が成り立つ。

2) $\mu\in ext\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ ならば、$|\nu|\geq 1$ となる $\nu\in\sigma_{\mu}(U_k(0))$ が存在する。

定理 7. $(k,\mu)\in\sigma[KT(0)]$ とする。このとき次の命題が成り立つ:

1) $\sigma(T(0))\subset int\ \cap_{k\in\sigma(K)}D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ ならば、すべての $\nu\in\sigma(U_K(0))$ に対して $|\nu|<1$ が成り立つ。

2) $\mu\in ext\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ ならば、$|\nu|\geq 1$ となる $\nu\in\sigma_{(k,\mu)}(U_K(0))$ が存在する。

次の結果は定理 7 と系 8.1 より容易にわかる。

定理 8. $K=kE$ とする。

1) $\sigma(T(0))\subset int\ \cap_{k\in\sigma(K)}D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ ならば、すべての $\nu\in\sigma(U_k(0))$ に対して $|\nu|<1$ が成り立つ。

2) $\mu\in ext\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ 満たす $\mu\in\sigma(T(0))$ が存在するならば、このとき $|\nu|\geq 1$ を満たす $\nu\in\sigma_{\mu}(U_k(0))$ が存在する。

次に、$\mu\in int\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0), k\in\sigma(K)$ であるための必要十分条件を与える。(13) との関係の中で $k\in(-1,1)$ の関数 $f_{\omega}(k;\theta,|\mu|)$ を以下のように定める。

$$\begin{aligned} f_{\omega}(k;\theta,|\mu|)&=|\mu|^{\frac{2}{\omega}}(1-k)^2-1+2k\cos\theta-k^2\\ &=(|\mu|^{\frac{2}{\omega}}-1)k^2-2(|\mu|^{\frac{2}{\omega}}-\cos\theta)k+(|\mu|^{\frac{2}{\omega}}-1). \end{aligned} \tag{25}$$

ここで $-\pi<\theta\leq\pi$ である。 このとき $f_{\omega}(k;\theta,|\mu|)<0$ は $|\mu|<|B_{\omega,k}(\theta)|$ と同値である。定理 5 により各 $\mu\in\mathbb{C}$ に対して $\partial D^{\gamma}_{\omega,k}(0)\cap L_{\mu}=\{\delta_{\mu}\}$ 一意的であるから補題 7.1 により $\delta_{\mu}=B_{\omega,k}(\theta_{\mu})$ を満たす $\theta_{\mu}:=\theta_{\mu}(\omega,k)$ は $I_D(\gamma)$ 上で一意的に存在する。今後、そのような θ_{μ} を $(\mu,\partial D^{\gamma}_{\omega,k}(0))$ に対応する偏角という。

$\mu\in int\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0), k\in\sigma(K)$ であるための必要十分条件以下で与えられるが、証明は定理 5 より容易である。

定理 9. $k \in \sigma(K)$ かつ $\mu \in \sigma(T(0))$ とする。θ_μ が $(\mu, \partial D^{\gamma}_{\omega,k}(0))$ に対応する偏角ならば、次の命題が成り立つ:

1) $\mu \in int\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$.
2) $|\mu| < |B_{\omega,k}(\theta_\mu)|$.
3) $f_\omega(k;\theta_\mu,|\mu|) < 0$.

系 8.2. $k \in \sigma(K)$ かつ $\mu \in \sigma(T(0))$ とする。θ_μ が $(\mu, \partial D^{\gamma}_{\omega,k}(0))$ に対応する偏角ならば、次の命題が成り立つ:

1) $\mu \in ext\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$.
2) $|\mu| \geq |B_{\omega,k}(\theta_\mu)|$.
3) $f_\omega(k;\theta_\mu,|\mu|) \geq 0$.

最後に、$\omega = 4$ かつ $\sigma(T(0)) \subset \mathbb{R}$ の場合に対して定理 8 を適用する。

命題 8.3. $\omega = 4$ 及び $\mu \in \sigma(T(0)) \cap \mathbb{R}$ とする。 μ と k が以下の条件を満たすならば、すべての $\nu \in \sigma_\mu(U_k(0))$ に対して $|\nu| < 1$ が成り立つ。

(1-1) $0 < \mu < \frac{(1+k)^4}{k^2(1-k)^2}$ 及び $-1 < k < -\frac{1}{3}$.
(1-2) $0 < \mu < 1$ 及び $-\frac{1}{3} \leq k < 1,\ k \neq 0$.
(1-3) $-\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^4 < \mu < 0$ 及び $-1 < k \leq \frac{1}{3},\ k \neq 0$.
(1-4) $-\frac{(1+k)^2}{k^2} < \mu < 0$ 及び $\frac{1}{3} < k < 1$.
(1-5) $\mu = -1$ 及び $0 < k < 1$.

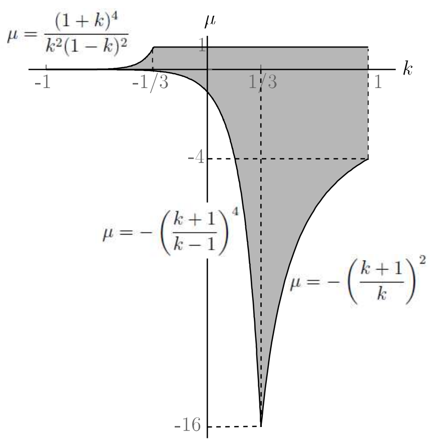

Figure 2: $\omega = 4$ の場合の安定領域。

$\omega = 3$ 及び $\sigma(T(0)) = \sigma_{\mathbb{R}}(T(0))$ の場合は以下の結果が成り立つ。

命題 8.4. $\omega = 3$ 及び $\mu \in \sigma_{\mathbb{R}}(T(0))$. μ と k が以下の条件を満たすならば、すべての $\nu \in \sigma_\mu(U_k(0))$ に対して $|\nu| < 1$ が成り立つ。

(1-1) $0 < \mu < -\left(\frac{1+k}{k}\right)^3$ 及び $-1 < k < -\frac{1}{2}$.
(1-2) $0 < \mu < 1$ 及び $-\frac{1}{2} \leq k < 1,\ k \neq 0$.

(1-3) $-\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^3 < \mu < 0$ 及び $-1 < k \leq \frac{1}{2},\ k \neq 0.$
(1-4) $-\left(\frac{1+k}{k}\right)^3 < \mu < 0$ 及び $\frac{1}{2} < k < 1.$
(1-5) $\mu = -1$ 及び $0 < k < 1.$

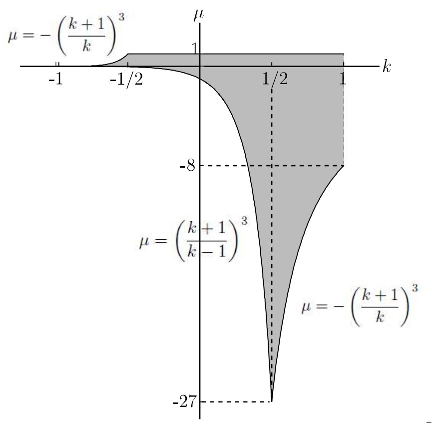

Figure 3: $\omega = 3$ の場合の安定領域。

これらの安定領域に関する結果は Jury の方法によるものと一致する。

9　今後の展望

本講演においては方程式 (L) のゼロ解を安定化するため摂動項を含んだ方程式 (LF) を考察した。実はそのことだけならば、方程式 (LF) より

$$x(n+1) = A(n)x(n) + Kx(n-\omega) \tag{26}$$

を考察すれば良いはずである。しかし敢えて方程式 (LF) を扱ったのは序文でも述べたように周期解の安定化を扱う研究の二段階、三段階に進むための準備のためである。すなわち、今後は
(1) 周期解の安定化問題、(この問題は文献 [5] を参照)
(2) 連続系における通常の Pyragas の問題、特に、方程式 (LDE) の特性乗数が複素数場合の安定化問題、
を扱う。そのとき本講演で用いた幾何学的方法が有効になる。

References

[1] T. Buchner and J.J. Zebrowski, Logistic map with a delayed feedback: Stability of a discrete time-delay control of chaos. Phys. Rev. E **63** 06210, (2000)

[2] S.N. Elaydi, An Introduction to Difference equations, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York. (1996). doi:10.1007/978-1-4757-9168-6

[3] J.K. Hale and S.M. Verduyn Lunel, Introduction to Functional-Differential equations, Applied Mathematical Sciences, **99**, Springer, New York, (1993). doi:10.1007/978-1-4612-4342-7

[4] E.I. Jury, Theory and Application of the z-transform method, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, (1964).

[5] D. Kim, R. Miyazaki and J.S. Shin, Stability regions of periodic solutions to discrete linear periodic systems with delayed feedback controls, submitted.

[6] D. Kim, R. Miyazaki and J.S. Shin, Boundedness of solutions of periodic linear differential equations under commuting conditions for coefficient matrices, to appear in Hiroshima Math. J.

[7] D. Kim and J.S. Shin, Stability region of discrete linear periodic systems with periodic 2 via delayed feedback control, in preparation.

[8] R. Miyazaki, T. Naito and J.S. Shin, Delayed feedback control by commutative gain matrices, SIAM J. Math. Anal. **43** , no. 3, 1122–1144, (2011) doi:10.1137/090779450

[9] Ö. Morgül, On the stabilization of periodic orbits for discrete time chaotic systems, Phys. Lett. A **335** , 127–138,(2005)

[10] T. Ohta, K. Takahash and R. Miyazaki, On the stabilization method of periodic orbits in difference equations, RIMS-Kokyuroku **1445** , 129–136,(2005) (in Japanese)

[11] C. Pötzsche, Geometric theory of discrete nonautonomous dynamical systems: Lecture Notes in Mathematics, 2002, Springer, Berlin, (2010). doi:10.1007/978-3-642-14258-1

[12] K. Pyragas, Continuous control of chaos by self-controlling feedback, Phys. Lett. A **170** (1992), 421–428.

[13] J.S. Shin, R. Miyazaki and D. Kim, Stability region of discrete linear periodic systems with delayed feedback controls, *Advances in Continuous and Discreate Models*, (2023) 2023-35, https:doi.org/10.1186/s13662-023-03781-5

[14] T. Ushio, Limitation of delayed feedback control in nonlinear discrete-time systems, IEEE Trans. Circuits Syst. I **43** , 815–816, (1996)

[15] T. Ushio and S. Yamamoto, Prediction-based control of chaos: Phys. Lett. A **264** , no. 1, 30–35,(1999), doi:10.1016/S0375-9601(99)00782-3

[16] M.S. Vieira and A.J. Lichtenberg, Controlling chaos using nonlinear feedback with delay, Phys. Rev. E **54** , 1200,(1996)

[17] J. Zhu and Y.P. Tian, Necessary and sufficient conditions for stabilizability of discrete-time systems via delayed feedback control, Phys. Lett. A **343**, 95–107,(2005)

[18] J. Zhu and Y.P. Tian, Stabilizability of uncontrollable systems via generalized delayed feedback control, Phys. D **237** , no. 19, 2436–2443, (2008) doi:10.1016/j.physd.2008.03.029

[19] D. Yang and J. Zhou, Connections among several chaos feedback control approaches and chaotic vibration control of mechanical systems, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **19** , no. 11, 3954–3968,(2014) doi:10.1016/j.cnsns.2014.04.001