遅延フィードバック制御による安定化が可能な周期軌道の特性乗数について

静岡大学総合科学技術研究科　宮崎 倫子

Rinko Miyazaki

Graduate School of Integrated Sciences and Technology,
Shizuoka University

概要

不安定周期軌道の安定化法として Pyragas [3] によって提案された遅延フィードバック制御（以下 DFC と呼ぶ）がよく知られている．制御ゲインが単位行列の実数倍という条件下においては，目標周期軌道の特性乗数について，制御前と制御後の関係式（以下 C-map 定理と呼ぶ）が得られている [2, Cor. 5.3]．さらに，制御前の不安定な特性乗数 μ とすると，μ が実数で $-e^2 < \mu < -1$ をみたすとき，DFC により周期解が安定化できることを証明している [2, Th. 7.6]．本稿では，この結果を複素数の場合について拡張した結果について報告するとともに，その適用例を紹介する．

1　序論

周期 $\omega > 0$ の不安定周期軌道 $x^*(t)$ をもつ微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{1}$$

を考えよう．ここで，$f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$ とする．Pyragas によって提案された DFC は，制御項 $u(t)$ を加えた次式で与えられる．

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + u(t) \\ u(t) = K(x(t-\omega) - x(t)) \end{cases} \tag{2}$$

ここで，K は $n \times n$ 実数値行列でゲイン行列と呼ぶ．このとき，明らかに $x^*(t)$ は (2) 式の解である．本稿では，$x^*(t)$ が (2) 式の解として軌道漸近安定となるときに DFC が成功したと呼ぶこととする．

周期軌道 $x^*(t)$ の安定性を判別するために，(1) 式および (2) 式の $x^*(t)$ まわりでの線形化方程式を考える：

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) \tag{3}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(t)y(t) + K(y(t-\omega) - y(t)), \tag{4}$$

ここで，$A(t) = Df(x^*(t))$ は f の $x^*(t)$ まわりでのヤコビ行列である．

線形化方程式 (3) に対して，$T(t,s)$ $(t \geq s)$ を解作用素とする．$A(t)$ は周期 ω の周期関数値行列であるから，周期作用素として $T(\omega, 0)$ を考える．一般に，作用素 T のスペクトルを $\sigma(T)$ で表すことにすると，非線形方程式 (1) の周期軌道 $x^*(t)$ の特性乗数は，$T(\omega, 0)$ の固有値，すなわち，$\sigma(T(\omega, 0))$ の要素として与えられる．

線形化方程式 (4) に対して，$U(t,s)$ $(t \geq s)$ を解作用素とする．周期作用素 $U(\omega,0)$ はコンパクト作用素であり，その点スペクトルを $P_\sigma(U(\omega,0))$ と表すと，その要素が，非線形方程式 (2) の周期軌道 $x^*(t)$ の特性乗数である．

以下では，DFC におけるゲイン行列が，n 次単位行列 E と $k \in \mathbb{R}$ に対して，$K = kE$ で与えられる場合について考える．このとき，制御前の特性乗数と制御後の特性乗数の関係を与える次の定理が得られている．

定理 A (Corollary 5.3 in [2])．$K = kE$ を仮定する．このとき，$\nu \in P_\sigma(U(\omega,0))$ であることと，$g_k(\nu) \in \sigma(T(\omega,0))$ は同値である．ここで，

$$g_k(z) := ze^{\omega k(1-z^{-1})}, \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

この定理 A のことを本稿では C-map 定理と呼ぶ．C-map 定理を用いることで，DFC の成否について考えることができる．結果を述べる前に，いくつかの準備が必要である．まず，制御前の周期解の不安定特性乗数の集合を σ_U，すなわち，以下の通り定義する．

$$\sigma_U := \{\mu \in \sigma(T(\omega,0)) : |\mu| > 1\}.$$

任意の $r \in (0,\pi)$ に対して，関数 $\alpha_r \colon [0,r] \to \mathbb{R}$ を次のように定義する：

$$\alpha_r(\theta) = \frac{(r-\theta)\sin\theta}{1+\cos\theta}. \tag{5}$$

$\alpha_r(\theta)$ は，区間 $[0,r]$ で連続，区間 $(0,r)$ で微分可能で，

$$\alpha_r'(\theta) = \frac{r-\theta-\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

が成り立つ．ここで，$r-\theta = \sin\theta$ をみたす $\theta \in (0,r]$ を考えよう．このような θ はただ一つ存在しこれを θ_r^* とおく．このとき，α_r は $[0,\theta_r^*]$ で（狭義の）単調増加関数である．したがって，$[0,\theta_r^*]$ 上で逆関数を考えることができる：

$$\theta(\alpha;r) \colon [0,\alpha_r(\theta_r^*)] \to [0,\theta_r^*],$$

ここで，$r-\theta_r^* = \sin\theta_r^*$ が成り立つことから，$\alpha_r(\theta_r^*) = 1-\cos\theta_r^*$ をみたしていることに注意しよう．

$r = \pi$ に対しても，(5) で定義した関数 α_r を考えよう．このとき，α_π は明らかに区間 $[0,\pi)$ で連続，区間 $(0,\pi)$ で微分可能である．ここで，$\theta \neq 0,\pi$ のとき，(5) の右辺は，

$$\alpha_r(\theta) = \frac{(r-\theta)\sin\theta(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = \frac{(r-\theta)(1-\cos\theta)}{\sin\theta} \tag{6}$$

が成り立つことに注意すると，

$$\lim_{\theta\to\pi} \alpha_\pi(\theta) = \lim_{\theta\to\pi} \frac{(\pi-\theta)(1-\cos\theta)}{\sin(\pi-\theta)} = 2,$$

である．したがって，$\alpha_\pi(\pi) = 2$ と定義することで，α_π は明らかに区間 $[0,\pi]$ で連続，区間 $(0,\pi)$ で微分可能であり，$r \in (0,\pi)$ のときと同様に，逆関数 $\theta(\alpha;\pi)$ を考えることができる．なお，$\theta_r^* = \pi$ であり $\alpha_r(\theta_r^*) = 2$ となることに注意しよう．

定理 B (Theorem 7.6 in [2])．$K = kE$ を仮定する．

(i) $\mu > 1$ をみたす $\mu \in \sigma_U$ が存在するなら，$\nu > 1$ をみたす $\nu \in P_\sigma(U(\omega,0))$ が存在する．

(ii) $\sigma_U \subset (-e^2, -1)$ が成り立つとする．このとき，

$$\frac{\alpha_0}{2\omega} < k < \frac{\alpha_0}{\omega(1-\cos\theta(\alpha_0;\pi))}$$

が成り立てば，任意の $\nu \in P_\sigma(U(\omega,0))$ に対して $|\nu| < 1$ あるいは $\nu = 1$ となる．ただし，$\alpha_0 = \max\{\log|\mu| : \mu \in \sigma_U\}$ である．

注意 1.1. 定理 B(ii) の不等式をみたす k は常に存在する．実際，$k = 1/\omega$ とすればよい．なぜなら，$0 < \alpha_0 < 2$ であるから，$\alpha_0/2 < 1$ をみたす．また，$\theta(\alpha_0;\pi) = \theta$ と略記すると，(6) より，

$$\alpha_0 = \frac{(\pi-\theta)(1-\cos\theta)}{\sin\theta}$$

が成り立っているので，

$$\frac{\alpha_0}{1-\cos\theta} = \frac{\pi-\theta}{\sin\theta} = \frac{\pi-\theta}{\sin(\pi-\theta)} > 1$$

が成り立つからである．

2 主結果

定理 B は，(i) の主張から 1 より大きな特性乗数をもつ周期軌道はゲイン $K = kE$ の DFC によって，安定化できないことがわかる．(ii) の主張からは，不安定特性乗数が $-e^2$ より大きければ DFC が成功することを示唆している．これらの結果は，いずれも特性乗数が実数の場合についてしか適用できない．本節では，一般に複素数の場合について DFC が成功する条件を与えよう．そのために，いくつかの準備が必要である．

補題 2.1. θ をパラメータとして，複素関数

$$B^*(\theta) := e^{i\theta}e^{1-e^{-i\theta}} \qquad \theta \in (-\pi, \pi].$$

が複素平面に描く曲線を ∂D^* とすると，∂D^* は，単純閉曲線（ジョルダン曲線）である．

証明. ∂D^* が閉曲線であることは，$B^*(\pi) = B^*(-\pi) = -e^2$ となることから明らか．∂D^* が単純閉曲線でないと仮定すると，$B^*(\theta_1) = B^*(\theta_2)$ かつ $\theta_1 \neq \theta_2$ となる $\theta_1, \theta_2 \in (-\pi, \pi]$ が存在する．すなわち，

$$\exp(i\theta_1 + 1 - e^{-i\theta_1}) = \exp(i\theta_2 + 1 - e^{-i\theta_2}).$$

したがって，

$$\begin{cases} 1-\cos\theta_1 = 1-\cos\theta_2 & \cdots(\mathrm{a}) \\ \theta_1 + \sin\theta_1 = \theta_2 + \sin\theta_2 + 2m\pi (m \in \mathbb{Z}) & \cdots(\mathrm{b}) \end{cases}$$

が成り立つ．(a) と $\theta_1 \neq \theta_2$ より，$\theta_1 = -\theta_2$ である．これを (b) に代入することで，

$$\theta_1 + \sin\theta_1 = m\pi$$

を得る．これより，$\theta_1 = 0, \pi$ を得るが，それに対応して $\theta_2 = 0, -\pi$ となるため不適である．ゆえに，$B^*(\theta_1) = B^*(\theta_2)$ かつ $\theta_1 \neq \theta_2$ となる $\theta_1, \theta_2 \in (-\pi, \pi]$ が存在しない．すなわち，∂D^* が単純閉曲線であることがわかる． □

この曲線で囲まれる領域を D^* とする．また，D^* の内部あるいは外部をそれぞれ $int\ D^*$ あるいは $ext\ D^*$ と表すこととする．

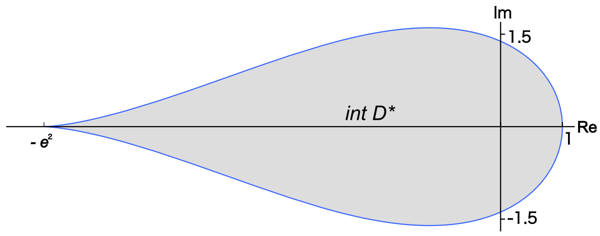

図 1. 複素平面における $int\ D^*$（グレー部分）．

定理 1． $K = kE$ を仮定する．このとき，$k = 1/\omega$ とすることで，任意の $\nu \in P_\sigma(U_k(\omega, 0))$ に対して $|\nu| < 1$ が成り立つ．

証明． $\nu \in P_\sigma(U_k(\omega, 0))$ が存在して，$|\nu| \geq 1$ が成り立つと仮定する．$|\nu| = 1$ のとき，C-map 定理より，$\mu = g_{1/\omega}(e^{i\theta}) = B^*(\theta)$ $(\theta \in (-\pi, \pi])$ と表すことができる．すなわち，$\mu \in \partial D^*$ を意味しており，$\sigma_U \subset int\ D^*$ に矛盾する．$|\nu| > 1$ のときを考えよう．$\nu \in \mathbb{R}$ については，定理 B より除外できる．$\nu = re^{i\theta}$ $(\theta \in (0, \pi), r > 1)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}\mu = g_{1/\omega}(\nu) &= \nu \exp\{1 - \nu^{-1}\} \\ &= r \exp\{i\theta + 1 - r^{-1} e^{-i\theta}\} \\ &= r \exp\{1 - r^{-1} \cos\theta + i(\theta + r^{-1} \sin\theta)\}\end{aligned}$$

ここで，

$$\tilde{\theta} + \sin\tilde{\theta} = \theta + r^{-1} \sin\theta, \qquad \tilde{\theta} \in (0, \pi) \tag{7}$$

をみたす $\tilde{\theta}$ を考えよう．$r > 1$ であるから，$\tilde{\theta} \in (0, \theta)$ である．$\tilde{\nu} = e^{i\tilde{\theta}}$，$\tilde{\mu} = g_{1/\omega}(\tilde{\nu})$ とおくと，μ は，$intD^*$ 内の点なので，複素平面上の原点と $\tilde{\mu}$ を結ぶ線分内（端点を除く）にある．すなわち，$|\mu| < |\tilde{\mu}|$ を満たす．

$$|\mu| = r \exp\{1 - r^{-1} \cos\theta\}, \qquad |\tilde{\mu}| = \exp\{1 - \cos\tilde{\theta}\}$$

であるから，

$$r \exp\{\cos\tilde{\theta} - r^{-1} \cos\theta\} < 1 \tag{8}$$

が成り立つ．一方，$\tilde{\theta}$ を (7) で定義される r の関数と考えて，

$$h(r) = r \exp\{\cos\tilde{\theta} - r^{-1} \cos\theta\}$$

とおく．

$$\begin{aligned}h'(r) &= \exp\{\cos\tilde{\theta} - r^{-1} \cos\theta\} + r \exp\{\cos\tilde{\theta} - r^{-1} \cos\theta\} \left(-\sin\tilde{\theta} \frac{d\tilde{\theta}}{dr} + r^{-2} \cos\theta \right) \\ &= \exp\{\cos\tilde{\theta} - r^{-1} \cos\theta\} \left(1 - r \sin\tilde{\theta} \frac{d\tilde{\theta}}{dr} + r^{-1} \cos\theta \right)\end{aligned}$$

ここで，(7) の両辺を r で微分すると，

$$(1 + \cos\tilde{\theta}) \frac{d\tilde{\theta}}{dr} = -r^{-2} \sin\theta$$

ゆえに，

$$h'(r) = \exp\{\cos\tilde{\theta} - r^{-1} \cos\theta\} \left(1 - r \sin\tilde{\theta} (-r^{-2}) \frac{\sin\theta}{1 + \cos\tilde{\theta}} + r^{-1} \cos\theta \right)$$

$$= r^{-1}\exp\{\cos\tilde{\theta} - r^{-1}\cos\theta\}\left(r + \frac{\sin\tilde{\theta}\sin\theta}{1+\cos\tilde{\theta}} + \cos\theta\right) > 0$$

$r = 1$ のときは，$\tilde{\theta} = \theta$ とみなして，(7) を $r \geq 1$ の範囲に拡張して考える．このとき，$h(1) = 1$ である．したがって，$h(r) > 1$ が成り立つ．これは，(8) に矛盾する． □

3 応用例

定理 1 の応用例として，次の微分方程式を考える．

$$\begin{cases} x'(t) = (\lambda - b)x(t) - cy(t) + x(t)\left[z(t) + d\{1 - z(t)^2\}\right], \\ y'(t) = cx(t) + (\lambda - b)y(t) + y(t)\left[z(t) + d\{1 - z(t)^2\}\right], \\ z'(t) = \lambda z(t) - \{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2\}, \end{cases} \tag{9}$$

ここで，b, c, d は

$$d < b < d + \frac{1}{d} \tag{10}$$

をみたす正定数とし，$\lambda \in \mathbb{R}$ を分岐パラメータと考える．この方程式は，$\mathbb{R}^3$ における不変トーラスをアトラクタとしてもつシステムとして知られている (cf. Hale & Koçak [1]).

分岐パラメータ λ が次の不等式

$$\frac{1 - \sqrt{d^2 - bd + 1}}{d} < \lambda < b - d, \tag{11}$$

をみたすとき，(9) 式は周期解

$$\phi(t) = (r^* \cos(ct), r^* \sin(ct), z^*)^t,$$

をもつ．ここで，$z^* = \{1 - \sqrt{1 + 4d(\lambda - b + d)}\}/(2d)$ and $r^* = \sqrt{z^*(\lambda - z^*)}$ である．

実際，(9) 式において，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ に変数変換すると，

$$\begin{cases} r'(t) = \{\lambda - b + z + d(1 - z^2)\}r \\ \theta'(t) = c \\ z'(t) = \lambda z - (r^2 + z^2) \end{cases}$$

を得る．これは，r と z の微分方程式として考えることができる．

$$\begin{cases} r'(t) = \{\lambda - b + z + d(1 - z^2)\}r \\ z'(t) = \lambda z - (r^2 + z^2) \end{cases} \tag{12}$$

(12) 式の $r \neq 0$ なる平衡点は，

$$\begin{cases} \lambda - b + z + d(1 - z^2) = 0 \\ \lambda z - (r^2 + z^2) = 0 \end{cases}$$

第 1 式より，$D = 1 + 4d(\lambda - b + d)$ とおくと，$z = (1 \pm \sqrt{D})/(2d)$ が得られる．なお，$D > 0$ であることは，条件 (11) の左側の不等式からわかる．第 2 式より，

$$r^2 = z(\lambda - z)$$

であるが，これより $0 < z < \lambda$ を満たさなければならない．しかし，条件 (10) と (11) から，$z = (1 + \sqrt{D})/(2d)$ のときは満たさないことがわかる．一方，$z = z^* = (1 - \sqrt{D})/(2d)$ のときは満たされており，平衡点 (z^*, r^*) が得られる．

(12) 式の平衡点 (z^*, r^*) のまわりでのヤコビ行列は,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & (1-2dz^*)r^* \\ -2r^* & \lambda - 2z^* \end{pmatrix}$$

となることから，固有方程式を求めると

$$\det(sE - J) = s^2 - (\lambda - 2z^*)s + 2r^*(1-2dz^*)r^* = 0 \tag{13}$$

となる．これより，(12) 式の平衡点 (z^*, r^*) の安定条件，すなわち，(9) 式の周期解 $\phi(t)$ の安定条件が次のように求まる．

1) $\frac{1-\sqrt{d^2-bd+1}}{d} < \lambda < \frac{3-\sqrt{4d^2-4bd+9}}{d}$ のとき，周期解 $\phi(t)$ は軌道漸近安定である．
2) $\frac{3-\sqrt{4d^2-4bd+9}}{d} < \lambda < b-d$ のとき，周期解 $\phi(t)$ は不安定である．

固有方程式 (13) の解 s_1, s_2 とおくと，これらは (9) 式の周期解 $\phi(t)$ の特性指数を表すことに注意しよう．そして，(9) 式の周期解 $\phi(t)$ の周期は $\omega = 2\pi/c$ であることから，特性乗数は，$e^{2\pi s_1/c}, e^{2\pi s_2/c}$ で与えられる．

以下では，パラメータを $b = 3.0$, $c = 0.25$, $d = 0.2$ と固定すると，このとき，(9) 式の周期解 $\phi(t)$ の安定性は以下で与えられる：

1) $1.68339 < \lambda < 2$ のとき，周期解 $\phi(t)$ は軌道漸近安定である．
2) $2 < \lambda < 2.8$ のとき，周期解 $\phi(t)$ は不安定である．

λ	特性乗数	
2.005	1	$-1.08 \pm 0.742i$
2.02	1	$-2.88 \pm 0.613i$

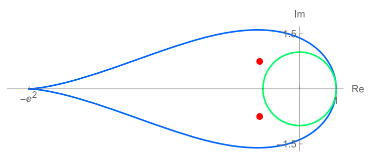

図 2.　$\lambda = 2.005$ のときの特性乗数.

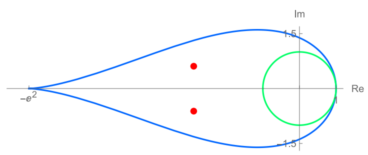

図 3.　$\lambda = 2.02$ のときの特性乗数.

(9) の周期 $\omega = 2\pi/c$ をもつ周期解 $\phi(t)$ を安定化するために，DFC 項を加える．

$$\begin{cases} x'(t) = (\lambda - b)x(t) - cy(t) + x(t)\left[z(t) + d\{1 - z(t)^2\}\right] + k[x(t-\omega) - x(t)], \\ y'(t) = cx(t) + (\lambda - b)y(t) + y(t)\left[z(t) + d\{1 - z(t)^2\}\right] + k[y(t-\omega) - y(t)], \\ z'(t) = \lambda z(t) - \{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2\} + k[z(t-\omega) - z(t)] \end{cases} \tag{14}$$

定理 1 を適用するために，$k = 1/\omega$ とおく．$\lambda = 2.005$ のときの数値計算結果は以下の通り．

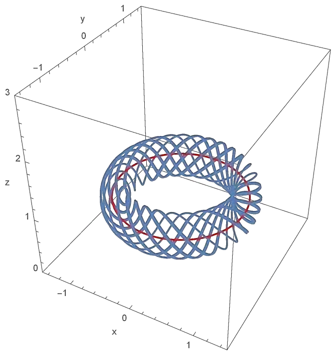

図 4.　制御前.

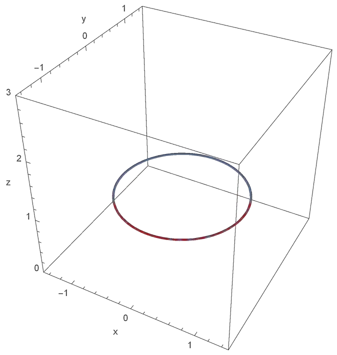

図 5.　制御後.

$\lambda = 2.02$ のときの数値計算結果は以下の通り.

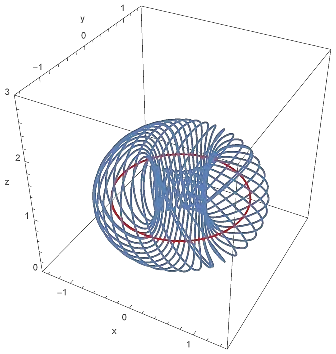

図 6.　制御前.

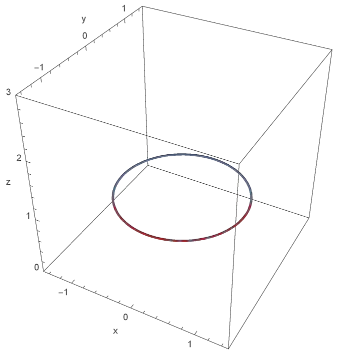

図 7.　制御後.

参考文献

[1] J. K. Hale and H. Koçak, *Dynamics and Bifurcations*, Springer–Verlag, New York, 1991.

[2] Miyazaki, R., Naito, T. and Shin, J. S., 2011. Delayed feedback control by commutative gain matrices. *SIAM J. Math. Anal.*, **43**, 1122–1144.

[3] Pyragas, K., 1992. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Phys. Lett. A*, **170**, 421–428.

Department of Mathematical ans Systems Engineering
Shizuoka University
Shizuoka 432-8561
JAPAN
E-mail address: miyazaki.rinko@shizuoka.ac.jp