遅延微分方程式への operator splitting method の適用に関する考察 — autonomous 常微分方程式の場合—

名古屋大学大学院多元数理科学研究科博士後期課程　河原一幾
Hideki KAWAHARA
Doctoral Student, Graduate School of Mathematics
Nagoya University

Abstract

本講究録では時間に依存しない係数を持つ一階の Delay Differential Equation (本稿では DDE あるいは L^p-context で捉えたとき DDEp と略す．) の解の well-posedness を示すとともに解の構成を operator splitting という手法を用いて近似解を数値的に求めることを目的とする．

ヨーロッパでは，1980 年代から，特にオランダ，ドイツ，ハンガリーで，population dynamics の分野を中心に，delay differential equation の semigroup theory が盛んに研究されてきた．また，無限次元の制御理論の観点からも研究されてきた．注目すべきアプローチの 1 つは，オランダの Centrum voor Wiskunde en Informatica に所属する Ph.Clément，O.Diekmann，M.Gyllenberg，H.J.A.M.Heijmans，H.R.Thieme などの研究者が追求した dual semigroup である．この研究は境界条件を求めようとする解空間の second dual space（sun star と呼ばれる関数空間である）に定義し，この空間の中で弱解を構成し，それが実はもとの空間の強連続解であることを示すという手法である．制御理論でも似たような観点から second dual space 上で semigroup を構成する手法が研究されてきた．

DDE におけるもう一つの方向性が，Klaus-Jochen Engel，Rainer Nagel，およびその共同研究者による semigroup theory である．この研究は彼らのグループにより引き継がれ，well-posedness の研究とともに数値計算手法の研究として operator splitting method の delay semigroup に対する研究がもたらされた．

数値積分によって DDE の数値解を求める方法として，Runge-Kutta 法や Euler 法が広く適用されているが，ハンガリーグループは operator splitting method による構成方法をとった．これはオペレーターの perturbation により C_0-semigroup を構成する理論をそのまま数値計算するもので理論から自然の流れで導出される．

operator splitting method は偏微分方程式の研究においては非常に有用であり，例えば porous medium 方程式，Burgers 方程式，KdV 方程式などにおいて exact solution を求めることが困難な場合においてもその rough solution を求める場合，operator splitting が非常に有効であることが示されている [19, 20]．しかし，DDE に対して operator splitting method を適用した文献は少なく，ハンガリーグループおよびその周辺の研究者によるものが大勢を占めている．そこで本講究録では過去 20 年にわたって彼らハンガリーグループを中心に培われてきた autonomous delay differential equation に対する operator splitting method をサーベイし，若干の考察を提供する．

1　イントロダクション

本稿では Delay Differential Equation（省略して DDE あるいは DDEs と表記する）を L^p-context で考える．すなわち X をバナッハ空間，f を L^p クラスの関数とし，次の Abstract Delay Differential Equation を L^p 空間上の初期値問題として考える．この L^p 空間上の初期値問題をあたえる次の方程式を以降 DDEp と呼ぶ.

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = -u(t) + \Phi u_t, & \text{for } t \geq 0, \\ u(0) = x \in X, \\ u_0(s) = f(s), \ a.e. & \text{for } \tau \leq s \leq 0 \end{cases} \tag{DDEp}$$

本稿第 2 節では (DDEp) を考察する．$\tau \leq 0, \tau \leq \sigma \leq 0$ とし，$u_t(\sigma) := u(t+\sigma)$ とする．$h \in W^{1,p}([\tau, 0], X)$ に対して Φ は $\Phi h := h(s)$ for $\tau \leq s \leq 0$ という関数 h の強有界変動関数 η に対する Stieltjes 積分 $\Phi(h) := \int_\tau^0 d\eta(\sigma)h(\sigma)$ を表し，この operator Φ を Delay operator と呼ぶ．具体例として第 3 節において distributed delay の他に point delays を扱う．この場合は Φ は h に delay point s を代入するという意味で用いる．2 節では (DDEp) に対する well-posedness について，(DDEp) を同値な Abstract Cauchy Problem に置き換えて議論する．

第 3 節においては perturbation theorem を考える．(DDEp) は一見簡単そうであるが，L^p-context で考える場合 $\Phi h := h(\tau)$ という代入関数を考えるとき $D(\Phi)$ は $L^p([\tau, 0], X)$ より狭い $W^{1,p}([\tau, 0], X)$ に取らざるを得ない[1]．正確にいえば $D(\Phi)$ を $L^p([\tau, 0], X)$ にすると Φ は $L^p([\tau, 0], X)$ 非有界作用素となり，有界作用素の perturbation 理論が使えなくなる．このような場合使える perturbation 理論として二種類ある．一つは Desch-Schappacher の perturbation 理論 [10], もう一つが Miyadera の perturbation 理論である．本稿では Miyadera perturbation 理論 [24, 25, 31] の適用を考える．delay operator Φ が Miyadera (Miyadera-Voigt) perturbation theorem の適用条件を満足することが示される．

本稿後半では operator splitting の理論展開を行う．第 4 節では，operator splitting method を定義し，その解が Trotter product で表現できることを示す．operator splitting method は数値解析としては finite difference method の一分野であり，その偏微分方程式に対する有用性は [20] に詳述されている．しかし DDE に適用した例は少ない．operator splitting method とは微分方程式 $\frac{du}{dt} = (A+B)u$ を 2 つの微分方程式，$\frac{du_1}{dt} = Au_1$ と $\frac{du_2}{dt} = Bu_2$ に分解し，交互に微小区間において微分方程式を解き，お互いの初期値を交換しながら全時間について逐次解いていく [2, 3, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 19] 手法であり，perturbation を含む微分方程式への適用は自然の発想である．この理論の裏付けは Lee-Trotter-Kato[21, 30] の理論に従うものである．この分野に対する文献としてハンガリーグループの論文および [19] がある．

第 5 節では operator splitting を DDE に適用したときの具体的な delay semigroup を決定し，splitting scheme の詳細を記述する．第 6 節では splitting scheme を [9, 19] に従い数値解析を行う．また splitting solution の exact solution に対する誤差評価も行う．第 7 節および第 8 節で展望およびまとめを行う．

本稿は基本的に [1, 3, 6, 7, 9, 11, 13, 18, 26, 27] 等，ハンガリーグループのアプローチに従って記述したが部分的に他の論文も引用する．証明は基本的に引用論文およびその中の reference に詳細が書か

[1] この関数空間は絶対連続関数の空間と同一視できるため τ という特定の定数の代入が許される．また Φ を別の形で書き表すならば Dirac Delta measure を用いて $\Phi h = \delta_\tau h$ とも書くことができる.

れているので省略する.

2 Abstract Cauchy Problem と Abstract Delay Differential Equation

2.1 Abstract Cauchy Problem

Definition 2.1 (Abstract Cauchy Problem)**.** *[6, Definition 1.17]* X をバナッハ空間とし，$A : D(A) \subset X \to X$ を線形作用素とする.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t) \qquad \text{for} \quad t \geq 0, \\ u(0) = x \end{cases} \tag{ACP}$$

u が $D(A)$ 上の連続微分可能な関数で (ACP) を満たすとき $u\colon \mathbb{R}_+ \to X$ を *(ACP)* の *classical solution* という．ここで $\mathbb{R}_+$ は *0* 以上の実数を意味する.

Definition 2.2 (well-posedness)**.** *[6, Def.1.21] (ACP)* において $A : D(A) \subset X \to X$ が *well-posed* であるとは $D(A) \subset X$ が X において *dense* であり，$D(A)$ におけるすべての x に対して，*(ACP)* の一意的な *classical solution* $u_x(t)$ が存在し，さらに $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ を満たすすべての $(x_n)_{n\geq 0} \subset D(A)$ に対して，コンパクト区間 $[0,T]$ のすべての t に対して一様に $\lim_{n\to\infty} u_{x_n}(t) = 0$ が成り立つときをいう.

Theorem 2.3 (Abstract Cauchy Problem が well-posed であるための必要十分条件)**.** *[6, Theorem 1.22]* 閉作用素 $A : D(A) \subset X \to X$ に対し *Abstract Cauchy Problem* が *well-posed* であるための必要十分条件は $(A, D(A))$ が X 上に C_0*-semigroup* を生成することである.

2.2 Delay Semigroup

Definition 2.4 (history function)**.** *[6]* X をバナッハ空間とする．$\tau \leq 0$ とし，関数 $u : [\tau, \infty) \to X$ を考える．すべての $t \geq 0$ に対し，関数

$$u_t : [\tau, 0] \ni \sigma \mapsto u(t+\sigma) \in X \tag{1}$$

を $t \geq 0$ に関する *history segment* という．また

$$h_u : t \mapsto u_t \quad \text{on} \quad \mathbb{R}_+ \tag{2}$$

で定まる関数を u の *history function* という.

Hypothesis 2.5. 本稿の以下において次の仮定をおく.

(H0) 簡単のため $\tau = -1$ とする.

(H1) X は バナッハ空間.

(H2) $A_0 : D(A_0) \subset X \to X$ は X において *dense* に定義された閉作用素で X に連続に埋め込まれている*:* $D(A_0) \overset{d}{\hookrightarrow} X$.

(H3) $1 \le p < \infty$, $f \in L^p([-1,0],X)$.

(H4) $\Phi : W^{1,p}([-1,0],X) \to X$ は *delay operator* とする.

(H5) *state space* $\mathcal{E}_p$ を $\mathcal{E}_p := X \times L^p([-1,0],X)$ で定義する.

(H6) $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ は $\mathcal{E}_p$ 上の線形作用素であり,

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A_0 & \Phi \\ 0 & \dfrac{d}{d\sigma} \end{pmatrix}$$

その *domain* は $D(\mathcal{A}) := \{(x,f)^T \in D(A_0) \times W^{1,p}([-1,0],X) : f(0) = x\}$.

これらの仮定のもとで次の初期値問題を Abstract Delay Differential Equation (DDEp) という.

Definition 2.6 (Abstract Delay Differential Equation (DDEp))**.**

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = A_0 u(t) + \Phi u_t, & \text{for } t \ge 0, \\ u(0) = x, & \\ u(\sigma) = f(\sigma),\ a.e., & \text{for } \sigma \le 0. \end{cases} \tag{DDEp}$$

(DDEp) の classical solution は次のように定義される.

Definition 2.7 (classical solution to (DDEp))**.** *$u : [-1,\infty) \to X$ が (DDEp) の classical solution であるとは次の 3 条件を満たすときをいう.*

(1) $u(t) \in C([-1,\infty),X) \cap C^1([0,\infty),X)$.

(2) すべての $t \ge 0$ に対し $u(t) \in D(A_0)$, $u_t \in W^{1,p}([-1,0],X)$.

(3) すべての $t \ge 0$ に対し $u(t)$ は *(DDEp)* を満たす.

Theorem 2.8 (mapping from (DDEp) to (ACPp), and vice versa)**.** *[6, Corollary 3.5] $u : [-1,\infty) \to X$ を (DDEp) の classical solution とする. このとき $\mathbb{R}_+$ から $\mathcal{E}_p$ への関数*

$$\mathcal{U} : t \mapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ u_t \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_p \tag{3}$$

は連続微分可能であり, その微分は

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U}(t) = \mathcal{A}\mathcal{U}(t), \qquad t \ge 0$$

で与えられる．ここで

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A_0 & \Phi \\ 0 & \dfrac{d}{d\sigma} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ (x, f)^T \in X \times W^{1,p}([-1,0], X) : f(0) = x \right\}. \tag{5}$$

したがってすべての *(DDEp)* の *classical solution* は以下で定義される *Abstract Cauchy Problem (ACPp)* の *classical solution* である．

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\mathcal{U}(t) = \mathcal{A}\mathcal{U}(t), & t \geq 0 \\ \mathcal{U}(0) = (x, f)^T \in \mathcal{E}_p \end{cases} \tag{ACPp}$$

この定理 2.8 により，(DDEp) の classical solution はすべて (ACPp) の classical solution であることがわかる．逆に，(ACPp) の classical solution は $\mathcal{U}(t)$ はすべて (DDEp) の classical solution であることがわかる．(ACPp) のすべての classical solution $\mathcal{U}(t)$ に対して

$$t \mapsto u(t) := \begin{cases} (\pi_1 \circ \mathcal{U})(t), & \text{if } t \geq 0, \\ f(t), & \text{if } t \in [-1, 0). \end{cases} \tag{6}$$

を対応させることにより $u(t)$ は (DDEp) の classical solution となることがわかる．ここで π_1 は $\mathcal{E}_p$ から X への正射影作用素を表す．$\pi_2 : \mathcal{E}_p \to L^p([-1,0], X)$ を $(\pi_2 \circ \mathcal{U})(t) = u_t, \quad (t \geq 0)$ と定義することにより $\mathcal{E}_p$ の X と $L^p([-1,0], X)$ への直和分解を得る．

Lemma 2.9 ($(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ は $\mathcal{E}_p$ において closed dense)**.** *[6, Lemma 3.6] Hypotheses(H1)–(H6)* の条件のもとでは*,* 作用素 $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ は $\mathcal{E}_p$ において *closed* で *dense* である*.*

この Lemma から次の定理を得る．

Theorem 2.10 (well-posedness)**.** *[6, Corollary 3.7]* $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ による $\mathcal{E}_p$ 上の *(DDEp)* が *well-posed* であることは $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ が $\mathcal{E}_p$ 上の C_0*-semigroup* $(\mathcal{T}(t))_{t\geq 0}$ の *generator* であることと必要十分である*.*

Lemma 2.9 と Theorem 2.10 から (DDEp) と (ACPp) が一対一対応することがわかり (DDEp) の well-posedness が (ACPp) の well-posedness から示される．また (ACPp) の well-posedness は (ACPp) が C_0-semigroup を生成することと同値であり，したがって (DDEp) が well-posed であることは対応する (ACPp) が C_0-semigroup を生成することと同値であることが示された．Bátkai, András and Piazzera, Susanna[6], Petra Csomósa and Gregor Nickel [9], Petra Csomósa and Gregor Nickel[9], Lahcen Maniar and Jürgen Voigt[24], Morten Bjørhus[8], Klaus-Jochen Engel and Rainer Nagel[11] 等を参照．さらなる参照には Bátkai, András and Piazzera, Susanna[6] の中でのレファレンスを参照.

3 Perturbation of Semigroups

3.1 $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ が $\mathcal{E}_p$ 上の C_0-semigroup の generator になるための十分条件

Abstract Delay Differential Equation (DDEp)$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{B}$ を次のように分解する.

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & \dfrac{d}{d\sigma} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & \Phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problem 3.1. ここで次のような疑問が発生する．$\mathcal{A}_0 : D(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{E}_p \to \mathcal{E}_p$ は C_0-*semigroup* $(\mathcal{T}_0(t))_{t\geq 0}$ の *generator* とし，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \subsetneq \mathcal{E}_p \to \mathcal{E}_p$ という作用素とする．このとき $(\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{B}, D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{A}_0) \cap D(\mathcal{B}))$ が $\mathcal{E}_p$ 上の C_0-*semigroup* $(\mathcal{U}(t))_{t\geq 0}$ の *generator* になるのか，またそのための十分条件としてどのようなものが考えられるかという疑問が生じる.

Remark 3.2. 仮に $D(\mathcal{B}) = D(\mathcal{E}_p)$ とする．すなわち $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_p)$ ならば有界作用素としての *perturbation theorem* を用いることができる.
しかし，$D(\mathcal{B}) = X \times W^{1,p}([-1, 0], X) \subsetneq X \times L^p([-1, 0], X) = \mathcal{E}_p$ の場合，$\mathcal{B}$ は $\mathcal{E}_p$ 上で非有界となるため，有界作用素としての *perturbation theorem* を用いることはできない.

3.2 非有界線形作用素の perturbation 理論

有界線形作用素の perturbation 理論は

Theorem 3.3 (Regular Bounded Perturbation[29])**.** $(\mathcal{A}_0, D(\mathcal{A}_0))$ を $\mathcal{E}_p$ 上の次の不等式を満たす C_0-*semigroup* $(\mathcal{T}_0(t))_{t\geq 0}$ の *generator* とする．*(*$\omega \in \mathbb{R}$*,* $M \geq 1$*)*

$$\|\mathcal{T}_0(t)\| \leq M e^{\omega t} \quad \text{for all } t \geq 0$$

$\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_p)$ であるならば

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_0 + \mathcal{B} \quad \text{with } D(\mathcal{A}) := D(\mathcal{A}_0)$$

は C_0-*semigroup* $(\mathcal{T}(t))_{t\geq 0}$ を生成し，次の不等式を満たす.

$$\|\mathcal{T}(t)\| \leq M e^{\omega + M\|\mathcal{B}\| t} \quad \text{for all } t \geq 0.$$

という定理が示す通りであるが，本稿のように $\mathcal{B}$ が $\mathcal{E}_p$ 上の非有界線形作用素の場合にはこの定理は適用できない．そこで非有界線形作用素 $\mathcal{B}$ に対して perturbation を行うためには二種類の方法がある．一つは $D(\mathcal{B})$ は $\mathcal{E}_p$ としたままで，$\mathcal{B}$ が有界線形作用素となるような $\mathcal{E}_p$ より大きな空間 $\mathcal{E}_{-1,p}$ という空間を定義し，$\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_p, \mathcal{E}_{-1,p})$ とし，$\mathcal{A}_0$ を $\tilde{\mathcal{A}}_0$ と拡張し $D(\tilde{\mathcal{A}}_0) = \mathcal{E}_p$ として $\mathcal{E}_p$ 上で $\tilde{\mathcal{A}}_0$ に $\mathcal{B}$ を perturb するという方法であり，もう一つは $\mathcal{A}_0$ はそのままにしておいて $\mathcal{B}$ の定義域を制限し $D(\mathcal{B})$ 上で $\mathcal{B}$ が有界線形作用素になるようにしてから $\mathcal{A}_0$ に $\mathcal{B}$ を perturb するという方法である。前者の方法による perturbation を一般的に Desch-Schappacher perturbation [10] と呼び、後者の方法による perturbation を Miyadera, Miyadera-Voigt perturbation [25, 31] と呼ぶ．このような方法を一般的に

extrapolation と言い，互いに dual な関係にあることが知られている [11, Chapter II Section V][2]．一般的に Desch-Schappacher はベースとなる空間 X を拡張する必要があるので難しい局面があり，本稿ではベースとなる空間 X を制限する Miyadera perturbation を採用した．

3.3 Miyadera-Voigt Perturbation Theorem

Miyadera perturbation theorem の仮定を満たしているか否か調べてみる．仮定を満たしていればMiyadera, Miyadera-Voigt[25, 31] が使える[3]．この定理の前に準備が必要である．

Preparation 3.4. A_0 を C_0-*semigroup* $(V(t))_{t\geq 0}$ の *generator* とする．$V_t : X \to L^p([-1,0], X))$ を

$$(V_t x)(\sigma) := \begin{cases} V(t+\sigma)x & \text{if } -t < \sigma \leq 0, \\ 0 & \text{if } -1 \leq \sigma \leq -1. \end{cases} \tag{7}$$

で定義された作用素とする．また，$(T_0(t))_{t\geq 0}$ は $L^p([-1,0], X)$ 上に定義された *nilpotent left shift semigroup* とし，

$$T_0(t)f := f(\cdot + t). \tag{8}$$

とする．このとき $\mathcal{A}_0$ は $\mathcal{E}_p$ 上の C_0-*semigroup* $\mathcal{T}_0(t)$ を生成し，

$$\mathcal{T}_0(t) = \begin{pmatrix} V(t) & 0 \\ V_t & T_0(t) \end{pmatrix}$$

となる *[9, Theorem 3.25]*.

Definition 3.5 ($\mathcal{A}_0$-bounded operator[25, 31])**.** $\mathcal{A}_0 : D(\mathcal{A}_0) \to \mathcal{E}_p$ そして $\mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \to \mathcal{E}_p$ は線形作用素とする．$\mathcal{B}$ が $\mathcal{A}_0$-*bounded* とは，$\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ が存在し，

$$\left\| \mathcal{B}\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \right\| \leq \alpha \left\| \mathcal{A}_0 \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \right\| + \beta \left\| \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \right\|$$

をすべての $(x, f)^T \in D(\mathcal{A}_0) \cap D(\mathcal{B})$ に対して成立する．

[2][28] は $(A_0,\ D(A_0))$ を $(A_0^{\odot *},\ D(A_0^{\odot *}))$ という作用素に拡張し，境界条件を B を用いて発展方程式組み込む．B は X 上の非有界線形作用素であるが、X から $X^{\odot *}$ への有界線形作用素 $\mathcal{L}(X, X^{\odot *})$ となる．このようにしてから $A_0^{\odot *}$ と B との Desch-Schappacher タイプの perturbation を行った後、$A_0^{\odot *}+B$ の X への制限をとる．ことにより X 上の A_0 の perturbation A_0+B が可能となる．$X^{\odot *}$ は X の second dual の部分空間であり sun star と呼ばれる空間である．彼らのアイディアは偏微分方程式の境界条件を Abstract Cauchy Problem の中に取り入れることにあったが境界条件を作用素 B を使って Abstract Cauchy Problem の中にそのまま取り入れようとすると B は非有界作用素となり bounded perturbation ができない．そこで作用素 A_0 を拡張し $X^{\odot *}$ 上で B を perturb し、variation of constants formula を用いて X に戻すという手法を取った．[28] は Desch-Schappacher の perturbation 理論を具体的な空間を用いて実装した良い例である．このような考え方は今では control theory で頻繁に使われ、Desch-Schappacher タイプか Miyadera タイプかの perturbation を行っている [14, 15, 16, 17, 18, 32, 33, 34, 35, 36] etc..

[3]Miyadera-Voigt とは，共著の論文があるわけではないが，Voigt が [31] により Miyadera の定理の適用条件を緩め使いやすくした．導かれる perturbation theorem に違いはないため，Miyadera-Voigt と一般的にいわれている．

Theorem 3.6 (Miyadera-Voigt Perturbation Theorem[25, 31])**.** $\mathcal{B}$ を $\mathcal{A}_0$*-bounded* とし，$(\mathcal{A}_0, D(\mathcal{A}_0))$ をバナッハ空間 $\mathcal{E}_p$ 上の C_0*-semigroup* $(\mathcal{T}_0(t))_{t\geq 0}$ とし，$\mathcal{B} \in \mathcal{L}((D(\mathcal{A}_0), \|\cdot\|_{\mathcal{A}_0}), \mathcal{E}_p)$ とする．$\mathcal{B}$ を，ある t_0，$0 \leq q < 1$ が存在し

$$\int_0^{t_0} \left\| \mathcal{B}\mathcal{T}_0(s) \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \right\| ds \leq q \left\| \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \right\| \tag{M-condition}$$

がすべての $(x, f)^T$ に対して成り立つとする．このとき $(\mathcal{A}_0 + \mathcal{B}, D(\mathcal{A}_0))$ は $\mathcal{E}_p$ 上で C_0*-semigroup* $(\mathcal{T}(t))_{t\geq 0}$ を生成する．そしてすべての $(x, f)^T \in \mathcal{E}_p$ に対して，*Variation of Constants Formula*：

$$\mathcal{T}(t) \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} = \mathcal{T}_0(t) \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} + \int_0^t \mathcal{T}_0(t-s)\mathcal{B}\mathcal{T}(s) \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} ds$$

を満たす.

この定理の仮定を delay semigroup に対して言い換えると,

Theorem 3.7 (Miyadera-Voigt Perturbation Theorem for delay semigroups[6])**.** $(A_0, D(A_0))$ を X 上の C_0*-semigroup* $(V(t))_{t\geq 0}$ の *generator* とする．また，$\Phi : W^{1,p}([-1,0], X) \to X$ $(1 \leq p < \infty)$ を *delay operator* とする．$t_0 > 0$，$0 < q < 1$ が存在し

$$\int_0^{t_0} \|\Phi(V_s x + T_0(t) f)\| ds \leq q \left\| \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \right\| \tag{M-V}$$

がすべての $(x, f)^T \in D(\mathcal{A})$ に対して成り立つとする． このとき $\mathcal{A} := \mathcal{A}_0 + \mathcal{B}$ は $\mathcal{E}_p$ 上に C_0*-semigroup* を生成する.

この定理の同値性は簡単に示すことができる．(M-condition) が (M-V) と同値になることを示せば良い.

$$\int_0^{t_0} \left\| \mathcal{B}\mathcal{T}_0(s) \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \right\| ds = \int_0^{t_0} \left\| \begin{pmatrix} 0 & \Phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V(s) & 0 \\ S_s & T_0(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \right\| ds \tag{9}$$

$$= \int_0^{t_0} \|\Phi(S_s x + T_0(s) f)\| ds \tag{10}$$

であることからわかる.

3.4 Delay operator Φ

Assumption 3.8. 具体例として *delay operator* Φ を *point delays* と *distributed delay* の場合で考える *[19]*.

1. *: Point delays*
   $f \in W^{1,p}([-1,0], \mathbb{R})$ とすると $W^{1,p}([-1,0], \mathbb{R}) \overset{dense, conti.}{\hookrightarrow} C([-1,0], \mathbb{R})$ であるから $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \leq \|f\|_{1,p}$．このことから $\Phi(f) = f(-1)$ は意味を持つ．このようにして $\Phi(f) = \sum_{i=1}^k B_i f(h_i)$,（$h_i \in [-1,0]$，$B_i \in \mathcal{L}(X)$）は意味を持つ.

2. : *Distributed delays*

$\eta : [-1,0] \to \mathcal{L}(X)$ を $[-1,0]$ 上の有界変動関数とする．また $\Phi : W^{1,p}([-1,0],\mathbb{R}) \to X$ を $\Phi(f) := \int_{-1}^{0} d\eta(\sigma) f(\sigma)$ のように定義する．

Remark 3.9. *point delays* は $\eta := \sum_{i=1}^{k} B_i \chi_{[h_i,0]}$ と定義することにより，$\Phi(f) = \int_{-1}^{0} d\eta(\sigma) f(\sigma)$ として書くことができる．このことから本質的には *point delays* は *distributed delay* のケースに帰着される．

このとき

Proposition 3.10. すべての $(x,f)^T \in D(\mathcal{A}_0) \cap D(\mathcal{B})$ に対して $\mathcal{B}$ は $\mathcal{A}_0$ *bounded* である．すなわち $\alpha > 0$, $\beta > 0$ が存在し

$$\left\| \mathcal{B} \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \right\| = \|\Phi(f)\| \leq \alpha \left\| \mathcal{A}_0 \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \right\| + \beta \left\| \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \right\| \tag{11}$$

が成り立つ．

***Proof*.** 簡単に概略を示す．$\|\Phi(f)\|_X = |f(-1)|$ の場合，K を正の数として

$$\left\| \mathcal{B} \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & \Phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \Phi(f) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \|\Phi(f)\|_X = |f(-1)| \leq K(\|x\|_X + \|f\|_{1,p}) \tag{12}$$

は明らか．すなわち $\alpha = 0, \beta = K$ として $\mathcal{B}$ は $\mathcal{A}_0$ bounded であることがわかる．

$\Phi(f) = \int_{-1}^{0} d\eta(\tau) f(\tau)$ の場合

$$\|\Phi(f)\|_X = \left\| \int_{-1}^{0} d\eta(\tau) f(\tau) \right\| \tag{13}$$

$$\leq \|f\|_{C([-1,0],X)} \int_{-1}^{0} d|\eta| = \|f\|_{C([-1,0],X)} \|\eta\|_{TBV[-1,0]} \leq K' \|f\|_{1,p} \tag{14}$$

$$\leq K(\|x\|_X + \|f\|_{1,p}) \tag{15}$$

が成り立つ．こちらも $\alpha = 0, \beta = K$ としてなりたつことがわかる．□

これで $\mathcal{B}$ は $\mathcal{A}_0$-bounded であることがわかった．あとは（M-V）条件がみたされることを示せば良い．この証明は [6, 24] を参照のこと．結果として Theorem 3.7 が成り立ち，まとめると次の定理を得る．

Theorem 3.11. *[9, Theorem 3.29]* Φ は *Assumption 3.8* の仮定を満たすものとする．このとき *Miyadera-Voigt perturbation theorem* が成り立つ．そしてこのとき $(\mathcal{A}_0 + \mathcal{B}, D(\mathcal{A}_0))$ は $\mathcal{E}_p$ 上で C_0*-semigroup* $(\mathcal{T}(t))_{t\geq 0}$ を生成し，すべての $(x,f)^T \in \mathcal{E}_p$ に対し次の *Variation of Constants Formula* を満たす．

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(t) \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} &= \mathcal{T}_0(t) \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} + \int_0^t \mathcal{T}_0(t-s) \mathcal{B} \mathcal{T}(s) \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} ds \\ &= \mathcal{T}_0(t) \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} + \int_0^t \mathcal{T}(t-s) \mathcal{B} \mathcal{T}_0(s) \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} ds \end{aligned}$$

4 Operator splitting

偏微分方程式において広く応用されてきた Operator splitting の手法を DDE に適用するという試みがハンガリーグループ中心に進められてきた [2, 3, 9].

4.1 有限差分法と収束

Definition 4.1 (classical solution)**.** *[9] X を バナッハ空間とし，$G : D(G) \subset X \to X$ を X 上の dense な空間で定義された線形閉作用素とする．Abstract Cauchy Problem*

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Gu(t), \qquad t \geq 0, \\ u(0) = x \in X. \end{cases} \tag{16}$$

を考える．関数 $u : \mathbb{R}_+ \to X$ が方程式 (16) の *classical solution* であるとは次の条件を満たすときをいう．

1. $u \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$
2. $u(t) \in D(G)$ は
$$\lim_{h \downarrow 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - Gu(t) \right\| = 0, \tag{17}$$
を満たす.
3. $u(0) = x$

Definition 4.2 (Convergence)**.** *[9] 有限差分法が $t \in [0, t_0]$ において convergent であるとは任意の t と任意の $x \in X$ に対し，*

$$\lim_{h_i \to 0} \|F(h_i)^{m_i} x - u(t)\| = 0. \tag{18}$$

が満たされることをいう．ここで $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ は正数列であり $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ は $m_i h_i = t$ を満たしながら 0 に収束する数列とする．

Remark 4.3. *Definition.4.2 では任意に止めた時刻 t に対する収束性であるが，実は compact intervals における一様収束性をもっていることが知られている [5] [23, 34.3].*

Definition 4.4 (Consistency)**.** *[9] 有限差分法が consistent であるとはすべての $x \in D(G)$ とそれに対応する Abstract Cauchy Problem (16) の解 u について次が成り立つことを言う:*

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{F(h)u(t) - u(t+h)}{h} \right\| = 0.$$

Definition 4.5 (Stability)**.** *[9] 有限差分法が stable であるとは*

$$\{F(h)^m : h \in (0, t_0], mh \leq t_0, m \in \mathbb{N}\}$$

が一様有界，すなわち $M > 0$ に対して

$$\|F(h)^m\| \leq M, \qquad \text{for } mh \leq t_0,\ h \in (0, t_0].$$

が成り立つことを言う．

Theorem 4.6 (Lax Equivalence Theorem)**.** *Abstract Cauchy Problem* (16) が *well-posed* とする．このとき有限差分スキームが *convergent* であることは *stable* であることと同値である．*[23, 34.3 Theorem 8].*

4.2 Splitting procedures

Assumption 4.7. *X:* を バナッハ空間とし，A，B を *closed dense* な *linear operator* とし，それぞれ *C_0-semigroups* $T = (T(t))_{t\geq 0}$, $S = (S(t))_{t\geq 0}$ の生成作用素とする．さらに $A+B$ の *closure* $\overline{A+B}$ は $D(A)\cap D(B) \subset D(\overline{A+B})$ の関係を満たし *C_0-semigroup* $U = (U(t))_{t\geq 0}$ の生成するとする．

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} &= (A+B)u(t), \qquad t \geq 0, \\ u(t) &= x \in X \end{cases} \tag{ACP0}$$

Abstract Cauchy Problem (ACP0) の sequential splitting procedure は次のように定義される．τ は splitting time step とよばれる．

$$\begin{cases} \dfrac{du_1^{(k)}(t)}{dt} = Au_1^{(k)}(t), \qquad t \in ((k-1)\tau, k\tau], \\ u_1^{(k)}((k-1)\tau) = u^{\mathrm{sq}}((k-1)\tau), \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} \dfrac{u_2^{(k)}(t)}{dt} = Bu_2^{(k)}(t), \qquad t \in ((k-1)\tau, k\tau], \\ u_2^{(k)}((k-1)\tau) = u_1^{(k)}(k\tau), \\ u^{\mathrm{sq}}(k\tau) = u_2^{(k)}(k\tau). \end{cases} \tag{20}$$

ここで $k \in \mathbb{N}$ とし，$u(0) = x$ とする．$u_1^{(k)}(k\tau) = T(\tau)u^{\mathrm{sq}}((k-1)\tau)$ であり $u_2^{(k)}(k\tau) = S(\tau)u_1^{(k)}(k\tau) = S(\tau)T(\tau)u^{\mathrm{sq}}((k-1)\tau)$ である．このとき sequential splitting solution $u^{\mathrm{sq}}(k\tau)$ は

$$u^{\mathrm{sq}}(k\tau) = [S(\tau)T(\tau)]^k x \qquad \text{for} \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in X. \tag{21}$$

と書かれる．t を固定し，$\tau := t/n$ と定義すると，解は次のように書くことができる．すべての $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$，$x \in X$ に対し，

$$u_n^{\mathrm{sq}}(t) := \left[S\left(\frac{t}{n}\right)T\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n x \tag{22}$$

となる．したがって sequential splitting は finite difference method であり，$h \in (0, h_0]$ に対し

$$F^{\mathrm{sq}}(h) = S(h)T(h) \tag{23}$$

となる．

Definition 4.8 (splitting convergence)**.** *[9] split solution* $u^{\mathrm{sq}}(k\tau)$ が *convergent* であるとは，すべての $x \in X$ に対し $k\tau \to t$ を満たしながら $k \to \infty$，$\tau \to 0$ としたとき

$$\lim_{k\tau \to t} u^{\mathrm{sq}}(k\tau) = u(t) \tag{24}$$

compact 区間上 t に関して一様収束することである．

sequential splitting の収束は Chernoff の定理による．

Theorem 4.9 (Chernoff)**.** *[9, Theorem 2.2]* $F : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$*(*ここで $\mathcal{L}(X)$ は X 上の有界線形作用素である．*)* は $M \geq 1$，$\omega \in \mathbb{R}$ に対して

$$F(0) = I \tag{25}$$

$$\left\| \left[F\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n \right\| \leq Me^{\omega t}, \qquad \text{for } t \geq 0,\ n \in \mathbb{N} \tag{26}$$

を満たす．さらに ’

$$Gx := \lim_{t \downarrow 0} \frac{F(t)x - x}{t} \tag{27}$$

はすべての $x \in D \subset X$ について成り立つとする．ここで D と $(\lambda_0 - G)D$ は，ある $\lambda_0 > \omega$ に対して X で *dense* とする．このとき，$(G, D(G))$ の *closure* $\overline{G}$ は C_0*-semigroup* $(U(t))_{t\geq 0}$ を生成する．その C_0*-semigroup* は

$$U(t)x = \lim_{n \to \infty} \left[F\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n x \tag{28}$$

と書くことができ，すべての $x \in X$ に対し $t \in [0, t_0]$ に対し一様に収束する．さらに $(U(t))_{t\geq 0}$ は

$$\|U(t)\| \leq Me^{\omega t}, \qquad \text{for all } t \geq 0. \tag{29}$$

を満たす.

Remark 4.10. *Strang splitting*，*weighted splitting* など他の *splitting* もあるが本稿では割愛する．

Lemma 4.11. *[9, Lemma 2.3]* 正の数 M が存在し，すべての $t \geq 0$，$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|[S(t/n)T(t/n)]^n\| \leq Me^{\omega t} \tag{30}$$

が成り立つ．このとき次が成り立つ．

(i) $\omega_1 \in \mathbb{R}$ が存在し

$$\|[S(t/n)T(t/n)]^{n-1}\| \leq Me^{\omega_1 t} \tag{31}$$

がすべての $t \geq 0$，$n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ．

(ii) 正数 $M_2 \geq 1$，$\omega_2 \in \mathbb{R}$ が存在し

$$\|[T(t/n)S(t/n)]^n\| \leq M_2 e^{\omega_2 t} \tag{32}$$

がすべての $t \geq 0$，$n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ．

Theorem 4.12 (Trotter Product Formula)**.** *[9, Theorem 2.4],[29, Theorem 4.4]* $(T(t))_{t\geq 0}$ と $(S(t))_{t\geq 0}$ をバナッハ空間 X 上の C_0-*semigroups* とし，その *generator* をそれぞれ $(A, D(A))$，$(B, D(B))$ とし，*stability* 条件 (30) を満たすものとする．$D := D(A) \cap D(B)$ 上で $A + B$ を考え，ある $\lambda_0 > \omega$ に対して D と $(\lambda_0 - (A+B))D$ は X で *dense* とする．このとき $G := \overline{A + B}$ は C_0-*semigroup* $(U(t))_{t\geq 0}$ を生成し，*Trotter product formula:*

$$U(t)x = \lim_{n\to\infty} \left[S\left(\frac{t}{n}\right)T\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n x, \quad (x \in X). \tag{33}$$

と書くことができる．このとき収束は t に関して一様である．

5 Operator splitting の DDE への応用

5.1 DDE から Abstract Cauchy Problem へ

Operator splitting の手法は計算しやすいように作用素を分解し数値計算で近似するのであるが，本稿では [2, 9] において用いられている手法を取り上げる．作用素の行列を分解しその作用素行列を generator とする semigroup 行列を Taylor 級数で作り，Variation of Constants Formula を用いて逐次近似していく考え方である．もう一つの手法は [3, 19] において用いられている手法であり，これは作用素行列から resolvent を計算しそのまま Trotter 積を利用し数値計算するもので，semigroup の計算を避けて直接数値計算できるため使いやすい．したがって非線形偏微分方程式に幅広く適用できる．紙数の関係上本稿では割愛する．

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = -u(t) + \Phi u_t, \quad \text{for } t \geq 0, \\ u(0) = x, \\ u_0 = f \in L^p([-1, 0], X). \end{cases} \tag{34}$$

Φ は前に定義したように２つのケースで考える．

(CASE 1): point delay operator $\Phi h = h(-1)$
(CASE 2): distributed delay $\Phi u_t = \int_{-1}^{-\epsilon} h(\sigma)u_t d\sigma$ 　ここで $\epsilon > 0$ は十分小さい正数とし，
$h \in L^\infty([-1, 0], \mathbb{R})$ とする．

$$
[CASE\ 1]\begin{cases}\dfrac{d}{dt}u(t) = -u(t) + u(t-1), & t \geq 0,\\ u(0) = 1, & \\ u(t) = 1 - t & t \in [-1,0],\end{cases} \tag{DDE1}
$$

$$
[CASE\ 2]\begin{cases}\dfrac{d}{dt}u(t) = -u(t) + \int_{-1}^{-\epsilon} h(\sigma)u(t+\sigma)d\sigma, & \epsilon > 0,\ t \geq 0,\\ u(0) = 1, & \\ u(t) = 1 - t & t \in [-1,0],\end{cases} \tag{DDE2}
$$

これらの (DDE1), (DDE2) を Abstract Cauchy Problem (35) として考える．

$$
\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix}u(t)\\ u_t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_0 & \Phi\\ 0 & \dfrac{d}{d\sigma}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(t)\\ u_t\end{pmatrix}, & t \geq 0,\\ \begin{pmatrix}u(0)\\ u_t(\sigma)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1-\sigma\end{pmatrix}, & t \leq 0,\end{cases} \tag{35}
$$

Assumption 5.1.

- $(A_0, D(A_0))$ は X 上に *C_0-semigroup* $(V(t))_{t\geq 0}$ を生成し，一般性を失うことなく $(V(t))_{t\geq 0}$ は *contraction semigroup* であるとする． *: i.e.,* $\|V(t)\| \leq 1$.
- *delay operator* $\Phi : W^{1,p}([-1,0], X) \to X$ は有界とする．($L^p([-1,0], X)$ 全体で有界であるわけではないが *Miyadera*，*Miyadera-Voigt* の *perturbation theorem* が適用できる.)

$\mathcal{A} = \begin{pmatrix}A_0 & \Phi\\ 0 & \dfrac{d}{d\sigma}\end{pmatrix}$ を $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{B}$ と分解する．ここで，

$$
\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix}A_0 & 0\\ 0 & \dfrac{d}{d\sigma}\end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix}0 & \Phi\\ 0 & 0\end{pmatrix}
$$

とする．また，$\mathcal{A}_0$ と $\mathcal{B}$ はそれぞれ C_0-semigroups $(\mathcal{T}_0(t))_{t\geq 0}$ と $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ を生成すると仮定する．$(\mathcal{T}_0(t))_{t\geq 0}$，$(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ は

$$
\mathcal{T}_0(t) = \begin{pmatrix}V(t) & 0\\ V_t & T_0(t)\end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}(t) = e^{t\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}I & t\Phi\\ 0 & \tilde{I}\end{pmatrix}
$$

で与えられる．ここで I，$\tilde{I}$ は，それぞれ $L^p([-1,0], X)$，X 上の identity operator を表すものとする．

ここで $T_0(t)$ は left translation semigroup であり，

$$
(T_0(t)f)(\sigma) := \begin{cases} f(t+\sigma) & \text{if } \sigma \in [-1,-t],\\ 0 & \text{if } \sigma \in [-t, 0),\end{cases}
$$

とする．また V_t は

$$
(V_t x)(\sigma) := \begin{cases} V(t+\sigma)x, & \text{if } \sigma \in [-t, 0),\\ 0, & \text{if } \sigma \in [-1,-t].\end{cases}
$$

とする．初期値 $(x, f)^T \in \mathcal{E}_p$ をもつ delay equation の sequential split solution は

$$\mathcal{U}_n^{sq}(t) = [\mathcal{S}(t/n)\mathcal{T}(t/n)]^n (x, f)^T$$

のように書くことができる [6, Proposition 3.32].

5.2 Abstract Cauchy Problem の split solution

[9, p.2240] sequential splitting(5.1) を適用すると，Abstract Cauchy Problem(ACP) の splitting solution は, time step $k\tau$, $k = 1, \ldots, K$ (ある $k \in \mathbb{N}$) において以下のように求まる：

$$\mathcal{U}^{\mathrm{sq}}(k\tau) = \mathcal{M}(\tau)^k (x, f)^T \tag{36}$$

ここで splitting time step τ は $1/\tau \in \mathbb{N}$ となるようにとる．

$$\mathcal{M}(\tau) := \mathcal{S}(\tau)\mathcal{T}(\tau) = \begin{pmatrix} V(\tau) + \tau\Phi V_\tau & \tau\Phi T_0(\tau) \\ V_\tau & T_0(\tau) \end{pmatrix} \tag{37}$$

初期値 $(x, f)^T \in \mathcal{E}_p$ に対し，最初の time step における split solution は

$$\mathcal{U}^{sq}(\tau) = \begin{pmatrix} V(\tau)x + \tau\Phi(V_\tau x + T_0(\tau) f) \\ V_\tau x + T_0(\tau) f \end{pmatrix}. \tag{38}$$

のように書くことができる．k-th time step 繰り返した後の split solution は

$$\mathcal{U}^{\mathrm{sq}}(k\tau) = \begin{pmatrix} x_k \\ f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V(\tau)x_{k-1} + \tau\Phi f_k \\ V_\tau x_{k-1} + T_0(\tau) f_{k-1} \end{pmatrix} \tag{39}$$

for $k = 1, \ldots, K$，ここで $x_0 := x$， $f_0 := f$．この繰り返しにより x_k and f_k は

$$f_k = V_\tau x_{k-1} + T_0(\tau) f_{k-1} = V_\tau x_{k-1} + T_0(\tau)(V_\tau x_{k-2} + T_0(\tau) f_{k-2}) \tag{40}$$

$$= V_\tau x_{k-1} + T_0(\tau)^k f + \sum_{n=0}^{k-2} T_0(\tau)^n (T_0(\tau) V_\tau x_{k-2-n}). \tag{41}$$

のように書ける．$\sigma \in [a, 0]$ に対し:

$$(T_0(\tau)^n f)(\sigma) = \begin{cases} f(n\tau + \sigma) & \text{if } \sigma \in [a, -n\tau] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \tag{42}$$

$$(T_0(t) V_s x)(\sigma) = \begin{cases} V(t + s + \sigma) & \text{if } \sigma \in [-(t + s), -t) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \tag{43}$$

If $k\tau < 1$ のとき

$$T_0(\tau)^n(T_0(\tau)V_\tau x_{k-2-n})(\sigma) = \begin{cases}(T_0(\tau)V_\tau x_{k-2-n})(n\tau+\sigma), & \text{if } \sigma \in [-1, -n\tau] \\ 0 & \text{else}\end{cases} \tag{44}$$

$$= \begin{cases}V(2\tau+n\tau+\sigma)x_{k-2-n}, & \text{if } \sigma \in [-1, -n\tau],\ n\tau+\sigma \in [-2\tau, -\tau) \\ 0 & \text{else}\end{cases} \tag{45}$$

$$= \begin{cases}V(2\tau+n\tau+\sigma)x_{k-2-n}, & \text{if } \sigma \in [-(n+2)\tau - (n+1)\tau) \\ 0, & \text{else}\end{cases} \tag{46}$$

したがって x_k は

$$x_k = V(\tau)x_{k-1} + \tau\Phi\left(V(\tau+\sigma)x_{k-1} + f(k\tau+\sigma) + \sum_{n=0}^{k^*-2} V((n+2)\tau+\sigma)x_{k-2-n}\right). \tag{47}$$

となる.

- (47) 右辺の第１項 σ は $[-\tau, 0]$ に属する.
- (47) 右辺第２項 σ は $[-1, \max(-1, -k\tau)]$ に属する.
- (47) 右辺第３項 σ は $[\max(-(n+2)\tau, -1), \max(-(n+1)\tau, -1))$ に属する.
- $k^* := \begin{cases}k, & \text{if } k \leq 1/\tau, \\ 1/\tau, & \text{if } k > 1/\tau,\end{cases} \qquad \text{for } k = 1, \ldots, K.$

6 数値解析

6.1 Exact Solution の数値解

DDE が exact solution を持つ場合であってもそれを explicit に表現することはできないが，exact solution を数値的近似として求めることは可能である．exact solution は Variation of Constants Formula を満たす mild solution であるから，Variation of Constants Formula を使って近似計算することになる．

6.1.1 手順

(CASE 1): Point Delay System

time step を $\tau = 0.01$ にとると 100 steps ごとに関数が変わる．A_0 が生成する semigroup を $(V(t))_{t\geq 0}$ とする．このとき $t \in [r, r+1],\ r = 0, 1, \ldots, N$ に対し

$$u^{(r+1)}(t) = V(t-r)u^{(r)}(r) + \int_r^t V(t-s)u^{(r)}(s-1)ds \tag{48}$$

$$u^{(0)}(t) = f(t-1) \tag{49}$$

積分を和分に置き換え $1 \le k \le \dfrac{1}{\tau}$ に対し

$$u^{(r+1)}(t_k) = V(t_k - r)u^{(r)}(r) + \sum_{j=1}^{k} V(t_k - t_j)u^{(r)}(t_j - 1)\tau, \qquad \text{for } j = 1, 2, \cdots, k, \tag{50}$$

$$u^{(0)}(t_j) = f(t_j - 1), \qquad \text{for } j = 1, 2, \ldots, 1/\tau. \tag{51}$$

計算回数は $[r, r+1]$ において

$$1 + 2 + \ldots + \frac{1}{\tau} = \frac{(1 + 1/\tau)(1/\tau)}{2} \tag{52}$$

steps 必要である．したがって $u(t)$ for $0 \le t \le r$ を求めるにはおよそ

$$\frac{(1 + \frac{1}{\tau})\frac{1}{\tau}}{2} \times \frac{1}{\tau} \times r \tag{53}$$

steps の計算が必要となる．

(CASE 2): Distributed Delay System

$\epsilon > 0$ を十分小さくとる．r を整数として区間を $[r\epsilon, (r+1)\epsilon]$, $r = 1, \ldots \frac{Kr}{\epsilon}$ のようにとる．

$$u^{(r+1)}(t) = V(t - r)u^{(r)}(r\epsilon) + \int_{r\epsilon}^{t} V(t - s) \int_{-1}^{-\epsilon} \mu(s)u^{(r)}(s + \sigma)d\sigma ds. \tag{54}$$

6.2 Splitting Solution の数値計算

6.2.1 Splitting Solution-手順と結果

(Case 1): Point Delay System

splitting time step を $\tau = 0.01$ にした場合は Figure1 の通りである．注意すべき点は実際に計算に使われる $V(\cdot)$，$f(\cdot)$ はほとんどなく非常に sparse であることが以下からわかる．

- (47) 右辺の第１項の括弧の中は $\Phi V(\tau + \sigma) = V(\tau - 1)$ であるから $\tau - 1 < 0$ の場合は $V(\cdot)$ はすべてゼロである．

- (47) 右辺の第２項は $\Phi f(k\tau + \sigma) = f(k\tau - 1)$ であり，$k\tau < 1$ の場合に限り値をもつ．その他のときはゼロである．$\tau = 0.01$ と与えれば $0 \le k \le 100$ まではゼロでない値を持つかもしれないが $k \ge 101$ のときはゼロである．

- (47) 右辺の第３項は $V((n+2)\tau - 1)$ は $(n+2)\tau \ge 1$ に対してのみゼロでない数値を取る可能性がある．しかし $\tau = 0.01$ と与えれば $V(2\tau - 1) = V(3\tau - 1) = \cdots = V((\frac{1}{\tau} - 1)\tau) = 0$ である．つまり $V(0)$ だけがゼロでない数値が入る可能性があるだけである．

Splitting Method による計算結果は time step $\tau = 0.01$ のとき Figure 1 のようになる．また time step $\tau = 0.1$ のとき Figure 2 のようになる．この結果は [9] の結果と一致する．

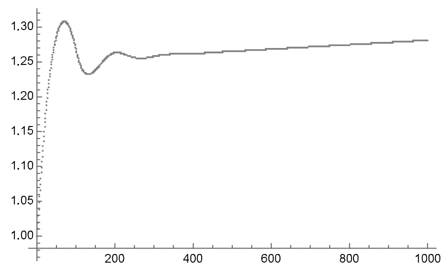

Figure 1: DDE Split Solution $\tau = 0.01$

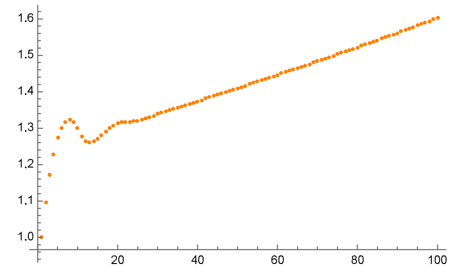

Figure 2: DDE Split Solution $\tau = 0.1$

(Case 2): Distibuted Delay System

$\tau = 0.01$ のときの計算結果は Figure3 の通りである．計算は $k = 100 = 1/\tau$ の前後で変わるがこれは（CASE 1）の場合と同様である．この結果は [9] の結果と一致する．

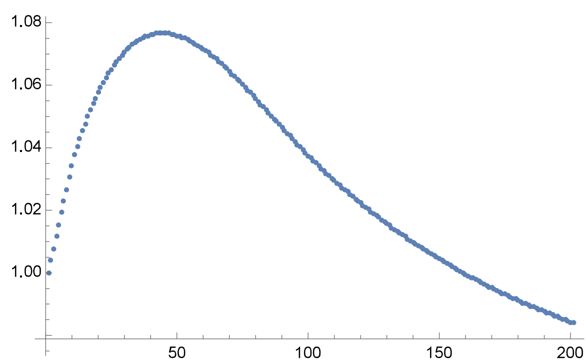

Figure 3: Case2 DDE Split Solution $\tau = 0.01$

6.3　相対誤差

Splitting scheme の exact solution に対する相対誤差を次のように定義する．

$$\mathrm{Error}(k) := \frac{\|u_{\mathrm{spl}}(k) - u_{\mathrm{ext}}(k)\|}{\|u_{\mathrm{ext}}(k)\|}. \tag{55}$$

(CASE 1) について，Figure 4 は $\tau = 0.01$ のときの exact solution との相対誤差 (55) は 0.0012．$\tau = 0.1$ にとると精度は落ち Figure 5 のようになる．

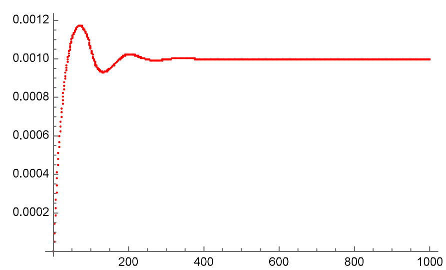

Figure 4: Relative Error DDE Split $\tau = 0.01$

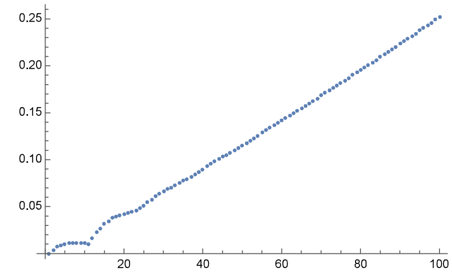

Figure 5: Relative Error DDE Split $\tau = 0.1$

7　今後の課題

7.1　Population dynamics model への Operator splitting の応用

autonomous な DDE を考えると必然的に偏微分方程式への適用が考えられる．[19] は以下の population dynamics model を例として挙げている．

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \nabla \cdot (D\nabla u(t,x)) + g(u(t-1,x)) \tag{56}$$

このモデル右辺の第 1 項は生息地全体における集団の分散を意味し，第 2 項は出生に起因する成長を包含する．delay の引数 $t-1$ は個体群の平均妊娠期間を表し，g は人口密度に対する人口成長を特徴づける．g は一般に非線形関数と考えられる．delay に依存した個体群ダイナミクスの詳細な研究は [22] にある．

delay を持つ Lotka-Sharpe equation(57) は (56) を単純化した一つのモデルである．本稿はこの偏微分方程式の特別の場合である．

$$\begin{cases} \partial_t u(t,a) + \partial_a u(t,a) = -\mu(a)u(t,a) + g(u(t-1,a)), & t \geq 0, \quad a \in \mathbb{R}_+, \\ u(t,0) = \int_0^\infty \beta(a)u(t,a)da, & t \geq 0, \\ u(t,a) = f(t,a) & (t,a) \in [-1,0] \times \mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{57}$$

本稿では空間微分は考慮せず，また非線形項も落として考えた．さらに $\mu(a) = 1$，$g(u(t-1,a)) = \Phi(u_t)$ とし，境界条件 $u_0 = f$，初期条件 $u(0) = x$ の Cauchy 問題として考えた．

7.2　Non-autonomous DDE の問題

本稿は A_0 が時間に依存しない autonomous の場合を扱ったが多くの興味ある問題は A_0 が時間に依存する non-autonomous な場合が多い．

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = A_0(t)u(t) + g(\Phi u_t), & \text{for } t \geq 0, \\ u(0) = x \in X, \\ u_0(s) = f(s), & a.e. \text{ for } \tau \leq s \leq 0;\ f \in L^p([\tau,0],X), \text{ for } 1 \leq p < \infty. \end{cases} \tag{NDDEp-0}$$

について，$A_0(t)$ が簡単な場合について解を構成しその漸近挙動を調べたい．

8 結論

本稿ではこの結果は linear, autonomous Delay Differential Equations (DDEs) の well-posedness と split solution の導出について [3, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 18, 26, 27] に基づきサーベイした．常微分方程式に絞り，あえて偏微分方程式への適用には触れなかったが autonomous な半線形方程式への適用は容易である [3, 19]．Φ 関数が複雑な場合，Variation of Constants Formula を用いての exact solution を計算することは簡単ではないが resolvent を用いて split solution を出すことは容易である．しかし，non-autonomous になると複雑さが急増し非常に単純な DDE についてもその split solution を出すのが容易ではない．これは evolution semigroup を具体的に計算することが容易ではないということを意味する．今後の課題としたい．

謝辞

この場をおかりして，本論文発表の機会を与えてくださり，また本論文および計算プログラムについて丁寧なレビューと有益なコメントをくださった名古屋大学大学院多元数理科学研究科 大平徹 教授に感謝申し上げるとともに，筆者の質問に丁寧にご指導くださった名古屋大学大学院多元数理科学研究科 菱田敏明 教授に感謝申し上げます．また本研究発表に際しお世話になりました，東北大学材料科学高等研究所 数学連携グループ 西口純矢 助教に感謝申し上げます．

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

References

[1] András Bátkai, *Hyperbolicity of linear partial differential equations with delay*, Integral Equations Operator Theory **44** (2002), 383–396.

[2] András Bátkai, Petra Csomós, and Bálint Farkas, *Operator splitting for nonautonomous delay equations*, Computers & Mathematics with Applications **65** (2013), no. 3, 315–324.

[3] ______, *Operator splitting for dissipative delay equations*, Semigroup Forum **95** (2017), 345–365.

[4] András Bátkai, Petra Csomós, Bálint Farkas, and Gregor Nickel, *Operator splitting for non-autonomous evolution equations*, Journal of Functional Analysis **260** (2011), no. 7, 2163–2190.

[5] András Bátkai, Petra Csomós, and Gregor Nickel, *Operator splittings and spatial approximations for evolution equations*, Journal of Evolution Equation (2009), 613–636.

[6] András Bátkai and Susanna Piazzera, *Semigroups for delay equations*, Research notes in mathematics (Boston Mass.) 10, A K Peters/CRC Press, 2005.

[7] Alfredo Bellen and Marino Zennaro, *Numerical methods for delay differential equations*, Numerical mathematics and scientific computation, Oxford science publications, Clarendon Press, 2003.

[8] Morten Bjørhus, *Operator splitting for abstract cauchy problems*, IMA Journal of Numerical Analysis **18** (1998), 419–443.

[9] Petra Csomósa and Gregor Nickel, *Operator splitting for delay equations*, Computers and Mathematics with Applications **55** (2008), no. 10, 2234–2246.

[10] W. Desch and W. Schappacher, *On relatively bounded perturbations of linear c_0-semigroups*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e **11** (1984), no. 2, 327–341.

[11] Klaus-Jochen Engel and Rainer Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, 1 ed., Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2000.

[12] Istvan Faragó and J Geiser, *Iterative operator-splitting methods for linear problems*, International Journal of Computational Science and Engineering **3** (2007), no. Issue 4, 255–263.

[13] Istvan Faragó and Agnes Havasi, *On the convergence and local splitting error of different splitting schemes*, Progress in Computational Fluid Dynamics An International Journal **5** (2005), no. 8, 495–.

[14] Said Hadd, *Exact controllability of infinite dimensional systems persists under small perturbations*, J. Evol. Equ. **5** (2005), 545–555.

[15] Said Hadd, A. Idrissi, and A. Rhandi, *The regular linear systems associated with the shift semigroups and application to control linear systems with delay*, Math. Control Signals Systems **18** (2006), 272—291.

[16] Said Hadd and Abdelali Idrissi, *Regular linear systems governed by systems with state, input and output delays*, IMA Journal of Mathematical Control and Information **22** (2005), 423–439.

[17] ______, *On the admissibility of observation for perturbed c_0-semigroups on banach spaces*, Systems & Control Letters **55** (2006), 1–7.

[18] Said Hadd and Abdelaziz Rhand, *Feedback theory for time-varying regular linear systems with input and state delays*, IMA Journal of Mathematical Control and Information **25** (2008), 85–110.

[19] Eskil Hansen and Tony Stillfjord, *Implicit euler and lie splitting discretizations of nonlinear parabolic equations with delay*, BIT Numerical Mathematics **54** (2014), no. 3, 673–689.

[20] Helge Holden, Kenneth H. Karlsen, Knut-Andreas Lie, and Nils Henrik Risebro, *Splitting methods for partial differential equations with rough solutions*, European Mathematical Society, 2010.

[21] Tosio Kato, *On the trotter-lie product formula*, Proc. Japan Acad. **50** (1974), 694–698.

[22] Yang Kuang, *Delay differential equations with applications in population dynamics*, Academic Press, Boston, 1993.

[23] Peter D. Lax, *Functional analysis*, Wiley, 2002.

[24] Lahcen Maniar and Jürgen Voigt, *Linear delay equations in the lp-context*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 234, pp. 319–330, Marcel Dekker, 2003.

[25] I. Miyadera, *On perturbation theory for semi-groups for linear evolution equations*, Tohoku Math. J. **18** (1966), 299–310.

[26] Rainer Nagel, *Towards a "matrix theory" for unbounded operator matrices*, Mathematische Zeitschrift **201** (1989), 57 – 68.

[27] Gregor Nickel, *Evolution semigroups and product formulas for nonautonomous cauchy problems*, Math. Nachr. **212** (2000), 101–116.

[28] Clément P., Diekmann O., Gyllenberg M., Heijmans H. J. A. M., and Thieme H. R., *Perturbation theory for dual semigroups - i. the sun reflexive case*, Mathematische Annalen **277** (1987), no. 4, 709–725.

[29] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 44, Springer, 1983.

[30] H. F. Trotter, *On the product of semi-groups of operators*, Proceedings of the American Mathematical Society **10** (1959), no. 4, 545–551.

[31] J. Voigt, *On the perturbation theory for strongly continuous semigroups*, Math. Ann. **229** (1977), 163–171.

[32] G. Weiss, *Transfer functions of regular linear systems. parti: Characterizationsof regular*, Transactions of the american mathematical society **342** (1994), no. 2, 827–854.

[33] George Weiss, *Admissibility of input elements for diagonal semigroups on* l^2, Systems & Control Letters **10** (1988), 79–82.

[34] ______, *Admissibility of unbounded control operators*, SIAM J. Control Optim. **27** (1989), 527–545.

[35] ______, *Admissible observation operators for linear semigroups*, Israel Journal of Mathematics **65** (1989), 17–43.

[36] ______, *Regular linear systems with feedback*, Mathematics of Control, Signals and Systems **7** (1994), 23–57.

Graduate School of Mathematics Nagoya University
Nagoya 464-8602
JAPAN
E-mail address: hideki.kawahara.c5@math.nagoya-u.ac.jp