creation timeを考慮した記憶型の項をもつ Timoshenko系について

神奈川大学情報学部　中村 憲史
Kenji Nakamura
Faculty of Informatics, Kanagawa University *

1　序論

本稿では, 次の粘弾性梁のモデルを考える:

$$\begin{cases} \rho_1\phi_{tt} - \kappa(\phi_x+\psi)_x + \kappa\kappa_0(g_1 \overset{\alpha}{*} (\phi_x+\psi)_x) = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + bb_0(g_2 \overset{\beta}{*} \psi_{xx}) + \kappa(\phi_x+\psi) - \kappa\kappa_0(g_1 \overset{\alpha}{*} (\phi_x+\psi)) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

ただし, 未知関数 $\phi = \phi(t,x), \psi = \psi(t,x)$ は $t > 0$ と $x \in \mathbb{R}$ を変数にもつ実数値関数, $\rho_1, \rho_2, \kappa, b > 0$, $\kappa_0, b_0 \geq 0$, 記憶核 $g_j = g_j(t)$ $(j = 1, 2)$ は $t \geq 0$ を変数にもつ実数値関数である. ここで, $\overset{\delta}{*}$ は時間変数 t に関する合成積

$$(g \overset{\delta}{*} f)(t) := \int_\delta^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

であり, $\delta = 0$ の場合は $*$ で表す. また, 記憶核 $g_1, g_2 \in C^1 \cap L^1$ は次の条件を満たすとする:

$$1 - \kappa_0\int_0^\infty g_1(\tau)d\tau > 0, \quad 1 - b_0\int_0^\infty g_2(\tau)d\tau > 0,$$

$$g_j(0) > 0, \quad g_j'(t) \leq -c_j(t)g_j(t) \quad (j = 1, 2).$$

なお, $c_j \in C^1$ は非増加な関数である. この条件を満たす g としては, 次がある:

$$g(t) = \mu(1+t)^{-\nu}, \quad \nu > 1, \qquad g(t) = \mu e^{-\eta(t+1)p}, \quad 0 < p \leq 1,$$
$$g(t) = \frac{\mu}{(1+t)[\log(2+t)]^\nu}, \quad \nu > 1.$$

ただし, μ, η は適当な正の実数である. すなわち, 合成積の項（記憶項ともいう）は時刻 t までの情報を含み, 時間の経過とともに過去の影響が小さくなる項である. ここで,

*E-mail: knakamura@kanagawa-u.ac.jp

$\kappa_0 = b_0 = 0$ の場合, (1.1) は古典的な Timoshenko 系として知られている. また, この場合は方程式に消散項がないため, 解のエネルギーが保存されることに注意する.

方程式 (1.1) で $\kappa_0 = 0, b_0 > 0, \beta = 0$ の場合, 初期条件

$$(\phi, \phi_t, \psi, \psi_t)(0, x) = (\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1)(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

を課した初期値問題において, Liu, Kawashima [4] は解の時間減衰評価について結果を得た. 証明は方程式を Fourier 変換し, Fourier 空間でエネルギー法を適用するものである. その際重要となるのが, Fourier 空間における各点評価を得ることである. この方面で, Mori [5] は Fourier 空間における各点評価で高周波部分の結果を改良し, 最良な減衰率を得た.

より一般に $\alpha = \beta = 0$ の場合, (1.1) の初期値問題は Silva-Ueda [6] で解の時間減衰評価が得られている. ただし, [4, 5, 6] では記憶核 g に C^2 級を仮定しており, 指数減衰する関数を想定している. 本稿では, $\alpha, \beta < 0$ として, さらに初期履歴

$$\begin{aligned} \phi(t, x) &= \tilde{\phi}(t, x), \quad (t, x) \in (\alpha, 0) \times \mathbb{R}, \\ \psi(t, x) &= \tilde{\psi}(t, x), \quad (t, x) \in (\gamma, 0) \times \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

を与えた場合に解の消散構造を調べる. ただし, $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$ である. なお, Fabrizio, Giorgi, Pata [1] では α, β のことを creation time と述べている. また, creation time を考慮した Volterra 微分積分方程式を有界領域で扱った結果として [2] がある.

2 主結果

変数 $v := \kappa(\phi_x + \psi), w := \phi_t, z := b\psi_x, y := \psi_t,$

$$\begin{aligned} r_1(t, x) &:= -\kappa\kappa_0 \int_\alpha^0 g_1(t - \tau)(\tilde{\phi}_x + \tilde{\psi})_x(\tau, x) d\tau, \\ r_2(t, x) &:= \kappa\kappa_0 \int_\alpha^0 g_1(t - \tau)(\tilde{\phi}_x + \tilde{\psi})(\tau, x) d\tau - bb_0 \int_\beta^0 g_2(t - \tau)\tilde{\psi}_{xx}(\tau, x) d\tau \end{aligned}$$

とベクトル値関数 $u := (v, w, z, y)^\top, R := (0, r_1, 0, r_2)^\top$ を導入して, (1.1), (1.2), (1.3) を次のように表す:

$$A^0 u_t + A u_x + L u + M_1 g_1 * u_x + M_2 g_2 * u_x + N g_1 * u = R, \tag{2.1}$$

$$u(0, x) = (v_0, w_0, z_0, y_0)(x) =: u_0(x). \tag{2.2}$$

ただし, $v_0 := \kappa(\phi_{0x} + \psi_0)$, $w_0 := \phi_1$, $z_0 := b\psi_{0x}$, $y_0 := \psi_1$ であり, 係数行列は

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1/\kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_2 \end{pmatrix}, \quad A = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\ \kappa_0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\end{pmatrix},\quad M_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&b_0&0\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ -\kappa_0&0&0&0\end{pmatrix}$$

である. 初期値問題 (2.1), (2.2) を Fourier 変換すると

$$A^0\hat{u}_t+i\xi A\hat{u}+L\hat{u}+i\xi M_1 g_1*\hat{u}+i\xi M_2 g_2*\hat{u}+Ng_1*\hat{u}=\hat{R},\quad \hat{u}(0,\xi)=\hat{u}_0(\xi) \tag{2.3}$$

を得る. Fourier 空間でエネルギー法を用いることにより, 次の定理を得る.

定理 2.1. 初期値問題 (2.1)-(2.2) の解を u とする. $\kappa_0>0$ かつ $b_0>0$ のとき, $\hat{u}$ は Fourier 空間で次の各点評価を満たす:

$$|\hat{u}(t,\xi)|^2\le C(|\hat{u}_0(\xi)|^2+G(\xi))\exp\left(-c\rho(\xi)\int_0^t c_1(\tau-\alpha)c_2(\tau-\beta)d\tau\right)$$

ただし, $\rho(\xi)$ と $G(\xi)$ は次で与えられる.

$$\rho(\xi)=\frac{\xi^4}{(1+\xi^2)^2},\quad G(\xi)=\int_\alpha^0 g_1(-\tau)|i\xi\hat{\hat{\phi}}(\tau,\xi)+\hat{\hat{\psi}}(\tau,\xi)|^2d\tau+\int_\beta^0 g_2(-\tau)|i\xi\hat{\hat{\psi}}(\tau,\xi)|^2d\tau.$$

定理 2.2. 初期値問題 (2.1)-(2.2) の解を u とする. $\kappa_0>0$ かつ $b_0=0$ のとき, $\hat{u}$ は Fourier 空間で次の各点評価を満たす:

$$|\hat{u}(t,\xi)|^2\le C(|\hat{u}_0(\xi)|^2+H(\xi))\exp\left(-c\eta(\xi)\int_0^t c_1(\tau-\alpha)d\tau\right).$$

ただし, $H(\xi)$ と $\eta(\xi)$ は次で与えられる.

$$H(\xi)=\int_\alpha^0 g_1(-\tau)|i\xi\hat{\hat{\phi}}(\tau,\xi)+\hat{\hat{\psi}}(\tau,\xi)|^2d\tau,$$

$$\eta(\xi)=\frac{\xi^6}{(1+\xi^2)^4}\quad \mathit{if}\quad \frac{\kappa}{\rho_1}\neq\frac{b}{\rho_2},\qquad \eta(\xi)=\frac{\xi^6}{(1+\xi^2)^3}\quad \mathit{if}\quad \frac{\kappa}{\rho_1}=\frac{b}{\rho_2}.$$

定理 2.3. 初期値問題 (2.1)-(2.2) の解を u とする. $\kappa_0=0$ かつ $b_0>0$ のとき, $\hat{u}$ は Fourier 空間で次の各点評価を満たす:

$$|\hat{u}(t,\xi)|^2\le C(|\hat{u}_0(\xi)|^2+I(\xi))\exp\left(-c\zeta(\xi)\int_0^t c_2(\tau-\beta)d\tau\right)$$

ただし, $I(\xi)$ と $\zeta(\xi)$ は次で与えられる.

$$I(\xi)=\int_\beta^0 g_2(-\tau)|i\xi\hat{\hat{\psi}}(\tau,\xi)|^2d\tau,$$

$$\zeta(\xi)=\frac{\xi^4}{(1+\xi^2)^3}\quad \mathit{if}\quad \frac{\kappa}{\rho_1}\neq\frac{b}{\rho_2},\qquad \zeta(\xi)=\frac{\xi^4}{(1+\xi^2)^2}\quad \mathit{if}\quad \frac{\kappa}{\rho_1}=\frac{b}{\rho_2}.$$

特に, 記憶核の仮定で $c_1(t), c_2(t)$ を定数とすると, 例えば定理 2.1 から次がわかる:

$$\begin{aligned}\|\partial_x^k u(t)\|_{L^2} \le C(1+t)^{-\frac{1}{8}-\frac{k}{4}} &\left(\|u_0\|_{L^1}+\|\tilde{\phi}_x+\tilde{\psi}\|_{L^2((\alpha,0);L^1)}+\|\tilde{\psi}_x\|_{L^2((\beta,0);L^1)}\right)\\ &+Ce^{-ct}\left(\|\partial_x^k u_0\|_{L^2}+\|\partial_x^k(\tilde{\phi}_x+\tilde{\psi})\|_{L^2((\alpha,0);L^2)}+\|\tilde{\psi}_x\|_{L^2((\beta,0);L^1)}\right).\end{aligned}$$

上式の右辺第 1 項は $\rho(\xi)$ の低周波部分が ξ^4 程度であることから減衰率が決まり, 第 2 項は高周波部分が定数程度であることから指数減衰することがわかる. 一方, 定理 2.2 から $\kappa/\rho_1 \neq b/\rho_2$ の場合は次がわかる:

$$\begin{aligned}\|\partial_x^k u(t)\|_{L^2} \le C(1+t)^{-\frac{k}{6}-\frac{1}{12}} &\left(\|u_0\|_{L^1}+\|\tilde{\phi}_x+\tilde{\psi}\|_{L^2((\alpha,0);L^1)}\right)\\ &+C(1+t)^{-\frac{\ell}{2}}\left(\|\partial_x^{k+\ell} u_0\|_{L^2}+\|\partial_x^{k+\ell}(\tilde{\phi}_x+\tilde{\psi})\|_{L^2((\alpha,0);L^2)}\right).\end{aligned}$$

この場合は, $\eta(\xi)$ の高周波部分が ξ^{-2} 程度である. そのため, $-\ell/2$ の減衰を得るためには初期値に ℓ 階の正則性を要する regularity loss type となる.

また, 記憶核の仮定で $c_1(t), c_2(t)$ を定数とすれば, 定理 2.1, 2.2, 2.3 で $\alpha, \beta \to -\infty$ とした場合に対応する結果を得ることもできる. なお, この場合で $\kappa_0 = 0$ のとき, Guesmia, Messaoudi[3] の結果もあることに注意する.

3 証明の概略

まず, 次を定義する:

$$(g \overset{\beta}{\diamond} f)(t) := \int_\beta^t g(t-\tau)(f(\tau)-f(t))d\tau, \quad (g \overset{\beta}{\square} f)(t) := \int_\beta^t g(t-\tau)|f(t)-f(\tau)|^2 d\tau.$$

定理 2.3 の $\rho_1 b \neq \rho_2 \kappa$ の場合に証明の概略を述べる. このとき, (2.3) の成分表示は

$$\begin{cases}\hat{v}_t-\kappa i\xi\hat{w}-\kappa\hat{y}=0,\\ \rho_1\hat{w}_t-i\xi\hat{v}=0,\\ \hat{z}_t-bi\xi y=0,\\ \rho_2\hat{y}_t-i\xi K_2[\hat{z}]+\hat{v}=0\end{cases} \tag{3.1}$$

である. ただし, $K_2[\hat{z}] := h_2^\beta(t)\hat{z}-b_0(g_2 \overset{\beta}{\diamond} \hat{z})$,

$$h_2^\beta(t) = 1-b_0\int_\beta^t g_2(t-\tau)d\tau$$

である. (3.1) の第 1 式から第 4 式にそれぞれ $\bar{\hat{v}}, \bar{\hat{w}}, K_2[\bar{\hat{z}}], \bar{\hat{y}}$ をかけて実部をとれば

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\kappa}|\hat{v}|^2+\rho_1|\hat{w}|^2+\frac{h_2^\beta(t)}{b}|\hat{z}|^2+\rho_2|\hat{y}|^2\right)-\frac{1}{2b}(h_2^\beta(t))'|\hat{z}|^2-\frac{b_0}{b}\mathrm{Re}((g_2 \overset{\beta}{\diamond} \hat{z})\bar{\hat{z}}_t)=0.$$

を得る．ここで

$$\mathrm{Re}((g_2 \overset{\beta}{\diamond} \hat{z})(t)\bar{\hat{z}}_t(t)) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g_2 \overset{\beta}{\Box} \hat{z})(t) + \frac{1}{2}(g_2' \overset{\beta}{\Box} \hat{z})(t)$$

に注意する．したがって

$$E_0 := \frac{1}{\kappa}|\hat{v}|^2 + \rho_1|\hat{w}|^2 + \frac{1}{b}h_2^\beta(t)|\hat{z}|^2 + \rho_2|\hat{y}|^2 + \frac{b_0}{b}(g_2 \overset{\beta}{\Box} \hat{z}).$$

とすれば, 次の基本的なエネルギー関係式を得る:

$$\frac{\partial}{\partial t}E_0 + \frac{b_0}{b}g_2(t-\beta)|\hat{z}|^2 - \frac{b_0}{b}(g_2' \overset{\beta}{\Box} \hat{z}) = 0.$$

すなわち, $E_0(t)$ は単調減少することがわかる．さらに, 高階に対応する関係式を構成して上の関係式と合わせることにより, 次の評価を得る．

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{E} + C\gamma_0 c_2(t-\beta)\{(\xi^2+1)\xi^2|\hat{v}|^2 + \xi^4|\hat{w}|^2 \\ &\qquad + (\xi^2+1)\xi^4|\hat{z}|^2 + (\xi^2+1)^2\xi^2|\hat{y}|^2 + g_2 \overset{\beta}{\Box} \hat{z}\} \le 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

ただし, $C, \gamma_0 > 0$ は適当な定数である．また, $\tilde{C} > 0$ を適当な定数として

$$\mathcal{E} := (1 + c_2(t-\beta))(\xi^2+1)^3 E_0 + \gamma_0 c_2(t-\beta)\left((\xi^2+1)E_y + \tilde{C}\xi^2 E_2\right)$$

とする．ただし

$$\begin{aligned} E_y &= \rho_2\left(\int_\beta^t g_2(t-\tau)d\tau\right)^{-1}\xi\mathrm{Re}(i(g_2 \overset{\beta}{\diamond} \bar{\hat{z}})\hat{y}), \\ E_2 &= E_1 + \xi^2\left(\rho_2\xi\mathrm{Re}(i\hat{y}K_2[\bar{\hat{z}}]) + \rho_1\mathrm{Re}(\hat{w}K_2[\bar{\hat{z}}])\right), \\ E_1 &= \rho_1\xi\mathrm{Re}(i\hat{v}\bar{\hat{w}}) + \rho_2\xi\mathrm{Re}(i\hat{y}K_2[\bar{\hat{z}}]) + \rho_1\mathrm{Re}(\hat{w}K_2[\bar{\hat{z}}]) \\ &\quad + (2\xi^2+1)\left\{\rho_1\mathrm{Re}(\hat{w}K_2[\bar{\hat{z}}]) + \rho_2\mathrm{Re}(\hat{v}\bar{\hat{y}})\right\} \end{aligned}$$

である．このとき, 適当な $m, M > 0$ に対して次が成り立つ:

$$m(\xi^2+1)^3(|\hat{u}|^2 + g_2 \overset{\beta}{\Box} \hat{z}) \le \mathcal{E} \le M(\xi^2+1)^3(|\hat{u}|^2 + g_2 \overset{\beta}{\Box} \hat{z}).$$

よって, (3.2) を 0 から t まで積分すれば

$$\begin{aligned} &|\hat{u}|^2 + g_2 \overset{\beta}{\Box} \hat{z} + \frac{\gamma_0 C}{m}\int_0^t c_2(\tau-\beta)\left\{\frac{\xi^2}{(\xi^2+1)^2}|\hat{v}|^2 + \frac{\xi^4}{(\xi^2+1)^3}|\hat{w}|^2\right. \\ &\left. + \frac{\xi^4}{(\xi^2+1)^2}|\hat{z}|^2 + \frac{\xi^2}{(\xi^2+1)}|\hat{y}|^2 + g_2 \overset{\beta}{\Box} \hat{z}\right\} d\tau \le \frac{1}{m}\mathcal{E}(0) \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって, 定理 2.3 の各点評価を得る．

参考文献

[1] M. Fabrizio, C. Giorgi, V. Pata, A new approach to equations with memory, Arch. Ration. Mech. Anal., **198** (2010), 189–232.

[2] E. H. Gomes Tavares, M. A. Jorge Silva, T. F. Ma, Unified stability analysis for a Volterra integro-differential equation under creation time perspective, Z. Angew. Math. Phys., **73** (2022), 23pp.

[3] A. Guesmia, S. Messaoudi, Some $L^2(\mathbb{R})$-norm and $L^1(\mathbb{R})$-norm decay estimates for Cauchy Timoshenko type systems with a frictional damping or an infinite memory, J. Math. Anal. Appl., **527** (2023), 26pp.

[4] Y. Liu, S. Kawashima, Decay property for the Timoshenko system with memory-type dissipation, Math. Models Methods Appl. Sci., **22** (2012), 19pp.

[5] N. Mori, Dissipative structure and global existence in critical space for Timoshenko system of memory type, J. Differential Equations, **265** (2018), 1627–1653.

[6] M.A. Jorge Silva, Y. Ueda, Memory effects on the stability of viscoelastic Timoshenko systems in the whole $1D$-space, Funkcial. Ekvac., **66** (2023), 71–123.