

交通流数理モデルと時間遅れ

- 偏差分方程式で記述する新しい交通流モデル -

○友枝 明保 (関西大学)* , 岡本 和也 (早稲田大学), 宮路 智行 (京都大学)

概要

1950 年代には始まっていたといわれている交通流の数理モデル研究では、今日に至るまでに様々な数理モデルが提案されている。これらの数理モデルは、交通流を記述する物理量をどのように設定するかというモデリングのアプローチによって、流体モデル、追従モデル、セルオートマトンモデルの三つに大別できる。また、交通流という現象を理解するために欠かせない要因の一つが「時間遅れ」である。これは、ドライバーレベルで考えると、ドライバーが環境の変化を認識し、状況に応じた意思決定を行い、それに従って車両を操作するために必要な時間を意味し、この時間遅れの大きさによって、交通流の状態が大きく変化することは容易に想像できる。本稿では、多くの交通流数理モデルの中から、「時間遅れ」をキーワードに、モデル同士の関係にも触れつつ、いくつかの数理モデルを概観する。さらに、著者らが構築した時間遅れを取り入れた偏差分方程式で記述される新しい交通流モデルについても紹介する。

1 はじめに

交通流とは、道路上を走行する多数の車両を流れとしてとらえたものであり、その特性を把握する方法として、基本図（図 1(a)）がよく用いられる。基本図では、横軸に交通密度、縦軸に交通流量をとることが多く、次のような特性が知られている [1]。

- 特性 1：低密度領域では、密度が増えるにつれ、ほぼ線形に流量が増加する（自由流）。
- 特性 2：高密度領域では、密度が増えるにつれ、流量が減少するとともに、データ点が二次元的に拡がる（渋滞流）。

特に、これら二つの流れが移り変わる 25 台/km 付近では、高速で自由走行している高流量状態に加えて、相対的に流量が低い状態（本稿では低流量状態と呼ぶ）も観察される。これは、高流量状態が、自由走行するには密度が高すぎて、少しの擾乱によって自由走行が保てなくなり、より安定な低流量状態へと遷移することを示している（図 1(b)）。この遷移は実際の車両を用いた実験 [2] でも観察されており、初期状態（図 2(a)）では、車間距離と速度をほぼ一様に保った状態で走行できているが、時間が経つにつれ車間距離がばらつき、走行する車と停止する車が共存する状態（図 2(b)）へと遷移する。さらに、この高流量状態から低流量状態への遷移プロセスでは、流量の変化が不連続的であることも指摘されている。これらの特性は、ドライバーの個性や車両性能、道路形状や各国の交通ルールなどによらず、普遍的に観察されるものであり、交通流のダイナミクスをモデリングし、解析するという数理モデル研究が有効であることを裏付けている [1]。

*Email : tomoeda@kansai-u.ac.jp

2023 年度 RIMS 共同研究 (2023.10.18–20) 「時間遅れ系と数理科学：理論と応用の新たな展開に向けて」

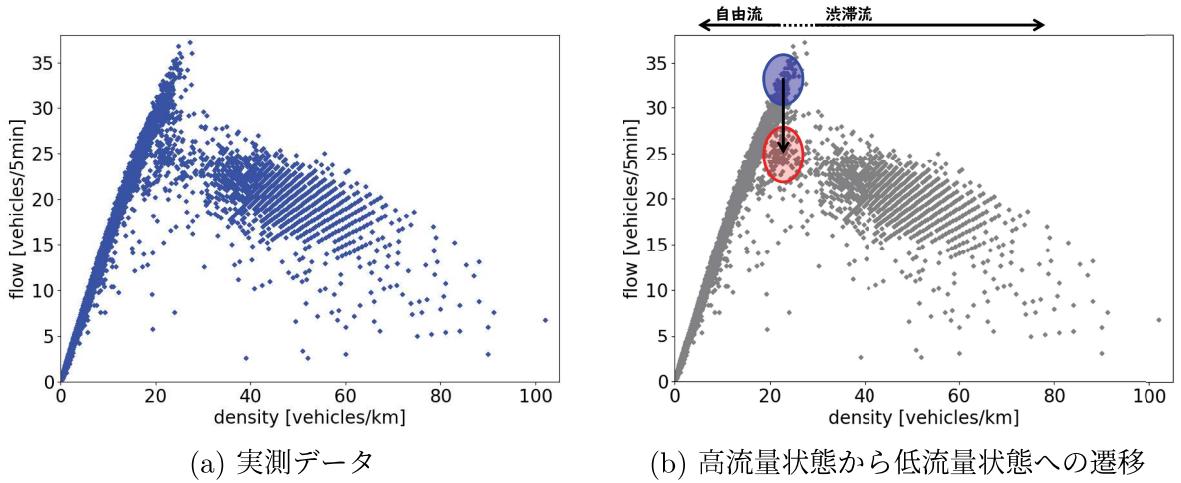


図 1: 基本図の例. (a) は実測データ（各点は 5 分ごとのデータ）であり, (b) は実測データの特性である臨界密度付近での状態遷移を重ねて表示したものである.

また, 交通流に見られる重要な現象が「渋滞」である. とりわけ, 事故などの原因が無いにも関わらず, いつの間にか発生する自然渋滞は, “phantom traffic jams” と呼ばれることもあり, この自然渋滞がなぜ発生するのか, 特に, 数理モデルはこの現象のメカニズムを説明できるのか, という問い合わせ^{*}に答えることが, 交通流における数理モデル研究の一つのミッションとなっていた. このような背景から, 交通流を記述する数理モデルがこれまでに数多く提案され, その数値実験や数理解析を通じて, 様々な知見が蓄えられてきた.

2 交通流を記述する数理モデルたち

交通流を記述する数理モデルは, 交通流という現象をどのように捉えるか, すなわち, 物理量をどのように設定するかというモデリングのアプローチによって, 流体モデル, 追従モデル, セルオートマトンモデルの三つに大別できる（表 1）. 流体モデルは, 平均密度や平均速度といった交通流におけるマクロ量を用いて流れを記述しようとするもので, その多くは偏微分方程式で記述される. 追従モデルとセルオートマトンモデルは, 交通流を構成する個々の車両に注目し, そのミクロレベルでの挙動を記述するもので, 前者は運動方程式, 後者は代数方程式やルールベースのアルゴリズムで記述されることが多い. 本章では, これまでに提案してきた交通流モデルの中から, 古典的ではあるが重要な数理モデルについて概観する.

表 1: 交通流数理モデルの分類

	車両	時間	空間
流体モデル	連続	連続	連続
追従モデル	離散	連続	連続
セルオートマトンモデル	離散	離散	離散

*この基本的な問い合わせについては, 既に答えが得られていて, 「一様流の不安定性」によるものと理解されている [2].



(a) 自由流

(b) 渋滞流

図 2: 実験（系の密度を固定：周期系）での自由流と渋滞流の様子 ([2] の動画のスナップショット）.

2.1 追従モデル (Car-following model)

追従モデルは、その名の通り、各車両が道路上でどのように他の車両を追従するかを記述した数理モデルである。このモデルでは、車が一列に連なって走行する状況を考え、自車の挙動に支配的な影響を与えるのは先行車であると仮定し、先行車との相互作用(非対称相互作用)も含めたドライバーの運転行動を数理モデルとして定式化する。例えば、Newellが提案した追従モデル(Newell モデル) [3] は、次のように記述される。

$$\frac{d}{dt}x_i(t + \tau) = V(\Delta x_i(t)) \quad (1)$$

ここで、 $x_i(t)$ は時刻 t における i 番目の車の位置を表し、 τ は時間遅れを表す。また、 $\Delta x_i(t) := x_{i+1}(t) - x_i(t)$ は、先行車 ($i+1$ 番目の車) との車間距離を表し、関数 $V(\Delta x_i(t))$ は、車間距離に応じた速度を与える関数(最適速度関数[†])である。つまり、Newell モデル (1) では、先行車との車間距離で決まる適切な速度に、時間遅れ τ をともなって、自車の速度を合わせるというモデルになっている。

この Newell モデル (1) は、時間遅れ付きの微分方程式であり一般的に解析が困難であるが、長谷部らにより厳密解が発見されている [4, 5]。具体的には、問題を定常解に限定し、渋滞クラスターが一定の速度で伝播することを用いて適切な動座標系で見ることで、静止解が得られると想定する。これによって時間依存の無い状況を考えることができ、いくつかの手続きを経て、Newell モデル (1) から次の Ablowitz-Ladik 微分差分方程式

$$v \frac{dG(u)/du}{1 - G(u)^2} = G\left(u + \frac{1}{2}\right) - G\left(u - \frac{1}{2}\right) \quad (2)$$

を導出し、ヤコビの楕円関数を用いた厳密解の記述に成功している。この他にも、交通流モデルと関連の深い可積分系の方程式およびその厳密解については、[6] に詳細が記載されているので、合わせて参照していただきたい。

[†]「最適速度関数(OV 関数)」という名称は後に提案される最適速度モデルにおいて初めて利用されたものであるが、本稿では、Newell モデルにおける車間距離 - 速度関係を与える関数も最適速度関数(OV 関数)と呼ぶことにする。

さて、Newell モデル(1)は、上で述べたように速度を調整するモデルであった。一方で、ドライバーは車両速度を制御するために、アクセル/ブレーキの操作を行っている。つまり、車両の加速度を調整しているのであって、直接速度を調整しているわけではない。このことから、速度を調整するモデルより、加速度を調整するモデルとして定式化する方が自然なモデリングとも言える。例えば、追従モデルの一つである最適速度 (Optimal Velocity, OV) モデル [7] は次のように記述される[†]。

$$\frac{d^2}{dt^2}x_i(t) = \frac{1}{\tau} \left(V(\Delta x_i(t)) - \frac{d}{dt}x_i(t) \right) \quad (3)$$

各変数は Newell モデル(1)と同様であるが、OV モデル(3)の左辺は時間 t の 2 階微分であり、自車の加速度をどう調整するかを記述したモデルとなっている。OV モデル(3)の右辺は、先行車との車間距離で決まる最適速度と自車速度の差をみて、その最適速度に合わせるように加減速を行うという運転行動を表している。この OV モデル(3)は過去の追従モデルとは独立に提案されたもの [1] であるが、Newell モデル(1)の時間遅れ τ が小さいとして、 τ でテイラー展開して一次の項までを残すことで形式的な対応が見られる。さらに、OV モデル(3)では、適切な時間のスケール変換を行うことで、パラメータ τ を消すことができるが、そうすると、交通流における特徴的な時間スケールが見えなくなってしまうため、OV モデルはあくまでも実スケールを残して議論しているモデルと解釈する。[7] では、OV 関数 $V(\Delta x_i(t))$ として、図 3 に示す形

$$V(\Delta x) = \tanh(\Delta x - 2) + \tanh 2 \quad (4)$$

が採用されており、この概形は次のような自然な要請からである。

- 車間距離が増加するにつれて、走行速度も増加するので、単調増加関数である。
- 法定速度があるので、 $\Delta x \rightarrow \infty$ で、ある速度に漸近するような関数である。

実際、中央自動車道の追従実験データから

$$V(\Delta x) = 16.8(\tanh 0.0860(\Delta x - 25) + 0.913) \quad (\text{単位は [m/sec]}) \quad (5)$$

という報告もある [8]。

ここでは、この OV モデル(3)を用いて、図 1(b)で示した高流量状態から低流量状態への遷移を考える。ごく少数の車両が走行している場合は、一定速度を保って走行することができるが、次第に密度が高くなっていくと、あるところからそのスムーズな流れが保てなくなる。その結果、高流量状態から低流量状態への遷移が起こっており、この理由は、車の流れの安定性が変化しているためであると理解する。そこで、一様な流れの安定性に焦点をあてて遷移メカニズムの理解を進めていく。OV モデルには、 Δx を平均車間距離として、一様流解と呼ばれる解 $x_i(t) = \Delta x \cdot i + V(\Delta x) \cdot t$ が存在する。この一様流解から少しづれた状況を考え、そのずれが、時間とともに減少するなら一様流解は安定に保たれるが、時間とともに増大していくなら一様流解は不安定であり、その状態を維持することは難しくなるというわけである。この条件は解析的に得られており、

$$V'(\Delta x) < \frac{a}{2} \quad \left(a := \frac{1}{\tau} \right) \quad (6)$$

を満たすとき、安定であることが示されている [7]。ここで、 $V'(\Delta x)$ は OV 関数の導関数である。条件(6)を見ると、OV 関数の傾きにも依存しているが、反応度が十分高ければ一様流は常に安定

[†][7] では、ドライバーの反応度 (sensitivity, 刺激に対する応答の速さ) を表す正のパラメータ a を用いてモデルを記述しているが、本稿では、時間遅れを明示するために、 $a := 1/\tau$ と書き換えてモデルを記述した。

であり、反応度が低い場合に不安定となることがわかる。反応度が低い場合、つまり、時間遅れがある程度大きいと、一様流が不安定化して低流量状態へ遷移してしまうのである。図4は、平均車間距離 Δx と反応度 a をパラメーターとして、OV関数(4)のもとで、条件(6)の中立安定となる曲線を描いたものであり、この曲線より上部の領域で一様流が安定となる。さらに、OVモデルは、一様流解のみが安定となる密度領域と、一様流解は不安定で非一様流解のみが安定となる密度領域に加えて、一様流解と非一様流解がともに安定（双安定）となる密度領域が存在することも知られている[1]。

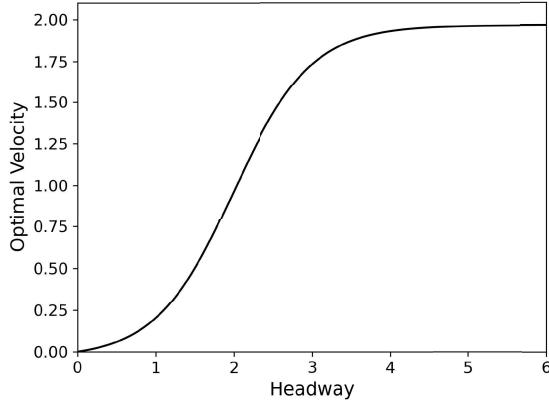


図3: OV関数(4)

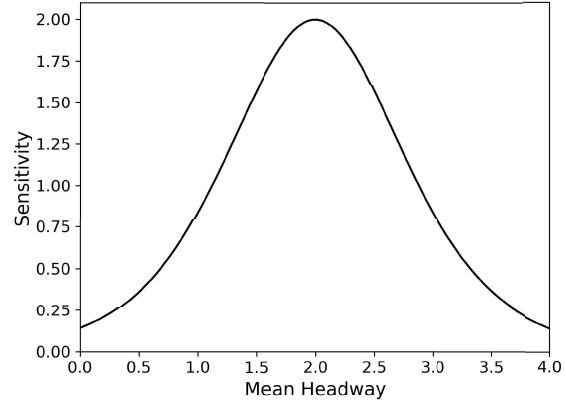
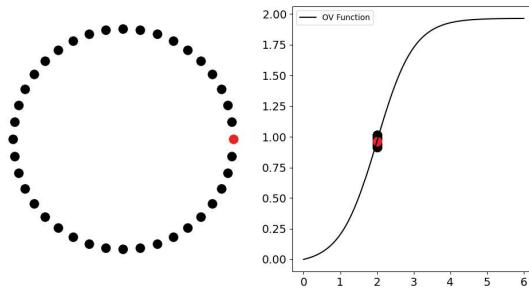
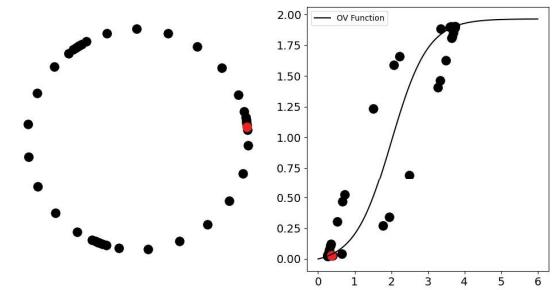


図4: 条件(6)の中立安定曲線



(a) 初期状態のスナップショット



(b) 一定時間経過した後のスナップショット

図5: OVモデルの数値実験例。

図5は周期系の数値実験例で、それぞれ左側の図は、車の位置を円周上にプロットしたものである。各丸はそれぞれの車両を表しており、分かりやすく表示するために、一つだけ赤で表示している。図5のそれぞれ右側の図は、横軸に車間距離、縦軸に速度をとったものであり、図中の曲線は、OV関数(4)を表す。図5(a)は、等間隔に並べた車に対して、微小な速度の擾動を入れた初期状態である。図5(b)は、一定時間経過した後の様子であり、クラスタの個数とは無関係に、同一のリミットサイクルが現れる。このように、一様流解が不安定化し、安定なリミットサイクル解が出現するプロセスは、ホップ分岐であることも示されている[9]。この他にもOVモデルに関する話題については、[10]を参照するとよい。

2.2 流体モデル

流体モデルの出発点は、連続の式である。いま、1車線の道路のある区間を考え、そこで合流や分岐は無いものとする。この場合、車が途中で現れたり消えたりすることはないので、その区間における車の台数の変化は、流入量と流出量によって決まる。ここでは、車の台数を区間の長さで割った密度という物理量で考える。時刻 t 、位置 x における交通密度を $\rho(x, t)$ とし、「車の場」の速度を $v(x, t)$ とすると、交通流量 $Q(x, t) = \rho(x, t)v(x, t)$ であり、連続の式は、次のように表される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

これだけでは、車の運動法則が入っていないため、交通流モデルとするために、車の運動法則をモデリングしていく。いま、密度 ρ と速度 v の二つの変数があり、密度の時間変化は連続の式で与えられているため、速度の時間変化を車の運動方程式として表現することを考える。具体的な方針は、車の運動をミクロに見たものが追従モデルであるため、追従モデルに対して平均化の操作を施することで、マクロに見た流体の運動方程式が得られるという着想であり、ここでは、速度に関する運動方程式を Newell モデル (1) から導く手順をフォローする [11]。

まず、Newell モデル (1) の左辺を、車の速度場を利用して次のように展開する。

$$\frac{d}{dt}x_i(t+\tau) = v(x+v\tau, t+\tau) \sim v(x, t) + v\tau \frac{\partial v}{\partial x} + \tau \frac{\partial v}{\partial t} \quad (8)$$

次に、Newell モデル (1) の右辺に対して、密度が車間距離の逆数に相当することから、密度を車間の中間地点で評価して、次のように変形する。

$$\frac{1}{\Delta x_i(t)} = \rho(x + \frac{1}{2}\Delta x_i, t) \sim \rho(x, t) + \frac{1}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (9)$$

さらに、Newell モデル (1) の OV 関数を $V(\Delta x) = \tilde{V}(1/\Delta x)$ と読み替えて整理すると、次の運動方程式が得られる。

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tilde{V}(\rho) - v}{\tau} + \frac{\tilde{V}'(\rho)}{2\rho\tau} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (10)$$

この運動方程式 (10) と連続の式 (7) を連立させ、システムとして交通流のダイナミクスを記述したものが、Payne モデル [12] である。

さて、OV モデルのときと同じように、一様流の安定性を議論するために、ある密度 ρ_0 で一様流になっているとし、Payne モデルの線形安定条件を計算すると、

$$\frac{a}{2} > -\rho_0^2 \tilde{V}'(\rho) \quad \left(a := \frac{1}{\tau} \right) \quad (11)$$

を満たすときに、一様流が安定となることが分かる。Payne モデルの文献 [12] と同じく、密度の OV 関数に Greenshield の関係式 [13]

$$\tilde{V}(\rho) = V_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) \quad (12)$$

を採用し、 $V_{\max} = \rho_{\max} = 1.0$ としたときの安定性を表した相図が図 6 である。図 6 を見ると、Payne モデルは確かに不安定領域を持つが、反応度 a を固定した場合に、高密度領域で安定化しないことがわかる。また Payne モデルでは、一様流不安定性を示す解が安定化する数理構造を持

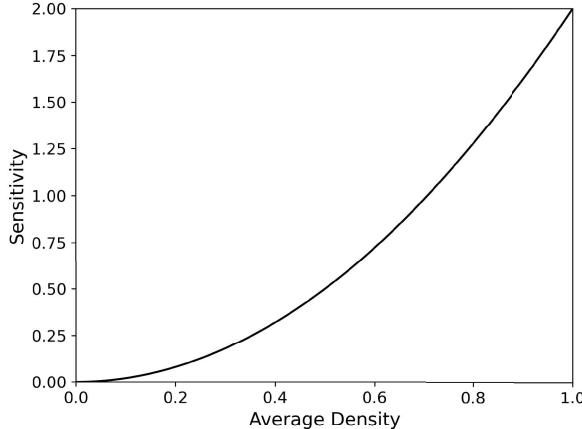


図 6: Payne モデルの中立安定線 (11).

たないという欠点もあり、Payne モデルの改良版として、速度の拡散項を導入して安定化を実現したモデル [14] や時間遅れを密度依存の関数とすることで安定化を達成したモデル [15] なども提案されている。

さらに、Payne モデルの運動方程式で $\tau \rightarrow 0$ の極限を考えてみる。 $\tau \rightarrow 0$ により、右辺が支配的になり、次の関係式が得られる。

$$v = \tilde{V}(\rho) + \frac{\tilde{V}'(\rho)}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (13)$$

この式を連続の式 (7) に代入し、Greenshield の関係式 (12) を用いて整理すると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_{\max} \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_{\max}} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (14)$$

となる。これは、流体力学で有名な Burgers 方程式であり、Burgers 方程式で記述される交通流モデル (Burgers モデル) [16] と一致する。 $\tau \rightarrow 0$ の極限で Burgers 方程式が導かれたことからも予想できるが、Burgers モデルでは、一様流が不安定化せず、残念ながら自然渋滞のメカニズムを説明することはできない。このことから、Burgers 方程式に時間遅れを取り入れて発展させた数理モデルも提案されている [17]。Burgers モデルには一様流が不安定化しないというモデルとしての欠点が潜んでいるが、その一方で、厳密解を求めることができるという数学的に強力なアドバンテージを持っている。実際、Burgers モデル (14) では、衝撃波解として、

$$\rho(x, t) = c_1 \frac{\rho_{\max} D}{V_{\max}} \tanh \left[c_1 \left(x - V_{\max} \left(1 - \frac{2c_2}{\rho_{\max}} \right) t \right) \right] + c_2 \quad (15)$$

がある [18] (図 7)。衝撃波の特徴は、その波面を境に流体の密度や速度が急激に変化することである。つまり、衝撃波を解析することは、渋滞部分の移動を理解するために極めて有効なアプローチであり、この点においては、Burgers モデルも重要な交通流数理モデルであると言える。さらに、この厳密解の構成は、Burgers 方程式がコールホップ変換によって線形な拡散方程式に帰着するという特徴によるものであり、この線形化可能という数理構造が、次のセルオートマトンモデルとの対応を考える際に重要となる。

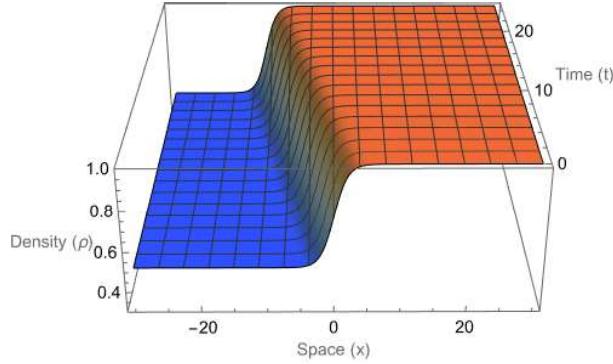


図 7: Burgers モデルの衝撃波解 (15) の伝播の様子. ここでは, $V_{\max} = \rho_{\max} = 1, D = c_1 = 1/2, c_2 = 3/4$ とした.

2.3 セルオートマトンモデル

各モデリングの締めくくりとして, 本節ではセルオートマトンで記述する交通流モデルについて解説する. セルオートマトンでは, 時間や空間といった独立変数だけでなく, 密度などの従属変数もすべて離散量として考える. ここでは, もっとも単純なセルオートマトン (Elementary Cellular Automaton, ECA) を考えることにする.

時刻 t における j 番目のセルの状態を U_j^t と表し, $U_j^t \in \{0, 1\}$ とする. これは, $U_j^t = 1$ であればセル j に車が存在して, $U_j^t = 0$ であればセル j に車が存在しないことを意味する. この設定により, 道路上の車の配置を数値として表現できたので, 次に車の運動を考えていく. ECA では, 次の時刻 $t+1$ におけるセル j の状態を, 時刻 t における $j-1$ (左), j (真ん中), $j+1$ (右) の三つのセルの状態から定める. つまり, 時間発展則は, ある遷移関数 f を用いて, 次のように定式化できる.

$$U_j^{t+1} = f(U_{j-1}^t, U_j^t, U_{j+1}^t) \quad (16)$$

車の運動を遷移関数 f として記述することができれば, 交通流セルオートマトンモデルとなるわけである.

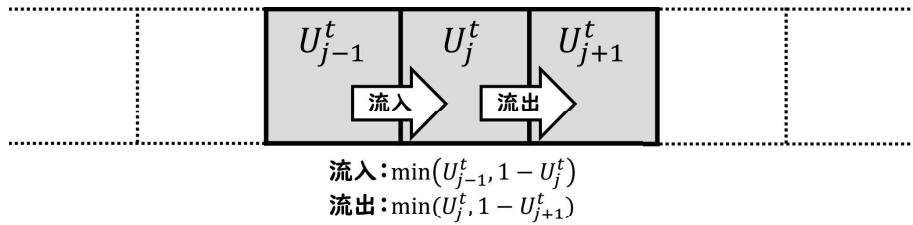


図 8: セルオートマトンモデルにおける連続の式 (17) の図解.

例えば, ECA の中で, 最も車の動きに近いものが, ルール 184 と呼ばれるセルオートマトンであり, 次の代数方程式で記述することができる [19].

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(U_{j-1}^t, 1 - U_j^t) - \min(U_j^t, 1 - U_{j+1}^t) \quad (17)$$

この方程式は, min-plus 代数という特殊な代数系を用いて記述されているが, 右辺第二項がセル $j-1$ からセル j への流入を表し, 右辺第三項がセル j からセル $j+1$ への流出を表している. つま

り、(17) はセル j に注目した連続の式そのものである（図 8）。右辺第二項（右辺第三項）の \min の引数を詳しく見ると、セル $j - 1$ (j) に車がいるときに、前方のセル j ($j + 1$) が空いていれば進み、空いていなければ進めないという交通流に欠かせない排除体積効果も考慮されていることがわかる。さらに、ルール 184ECA の数理的に大きな特徴は、差分化および超離散化 [20] という手法を通じて、Burgers 方程式からの対応が示されている点である。超離散化は、次の極限に関する公式（超離散公式）

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon}) = \max(A, B) = -\min(-A, -B) \quad (18)$$

を用いて、従属変数を離散化する手法であり、この超離散化によって、微分方程式で記述される連続の世界と、セルオートマトンで記述される離散の世界との対応が見えてくるのである。

さて、ルール 184ECA は交通流の基本モデルであるが、基本図を描くと高流量状態から低流量状態への遷移は示さないことが分かる（図 9）。ルール 184ECA は数理的に性質の良いモデルであるが、その「前が空いていれば進む」という車の運動だけでは、交通流モデルとしては単純すぎるるのである。そこで流量の遷移を示す有名なモデルとして、スロースタートモデル [21] を挙げておく。スロースタートモデルの時間発展則は、例えば次のように記述できる [22].

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(U_{j-1}^t, 1 - U_j^t, U_{j-1}^t - U_{j-1}^{t-1} + 1 - U_j^{t-1}) \\ - \min(U_j^t, 1 - U_{j+1}^t, U_j^t - U_j^{t-1} + 1 - U_{j+1}^{t-1}) \quad (19)$$

このスロースタートモデルは、一度止まった粒子は前が空いて動けるようになっても、一回休んでから動き出す、という振る舞いを組み込んだモデルであり、動き出しに時間遅れをともなっていると解釈できる。スロースタートモデルの基本図（図 10）を見ると、中間密度領域で高流量状態と低流量状態が共存しており、自然渋滞の発生には時間遅れの効果が本質的に影響を及ぼしていることが示唆される。ここでは取り上げないが、その他にも交通流セルオートマトンモデルのさきがけとなった Nagel-Schreckenberg モデル [23] や OV モデルから着想を得た Stochastic Optimal Velocity Model [24] といった確率的な要素を取り入れたセルオートマトンモデルも提案されている。

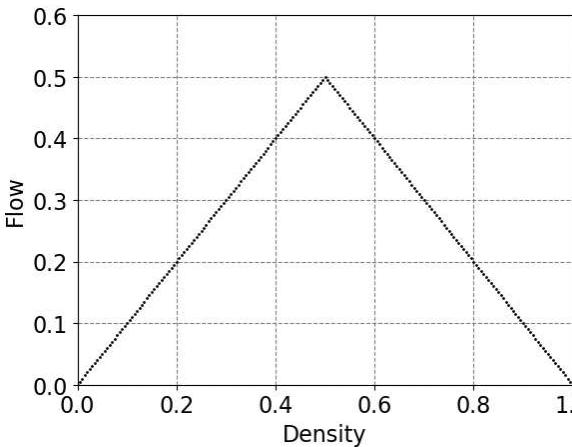


図 9: ルール 184ECA の基本図

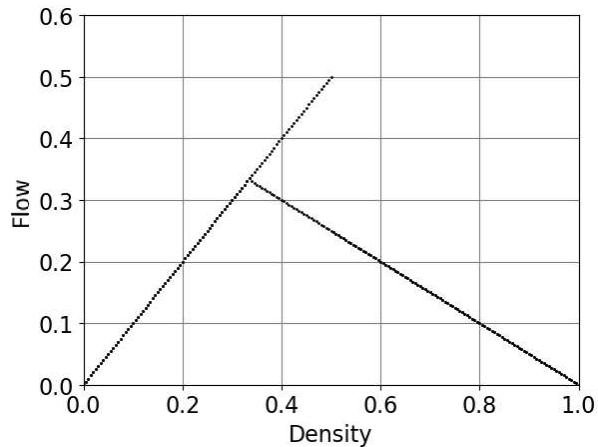


図 10: スロースタートモデルの基本図

3 双安定性を持つ非線形遅延差分方程式で記述される新しい交通流モデル

本章では、最近構築した差分方程式で記述される交通流モデルについて紹介する。前章で述べたように、Burgers 方程式とルール 184ECA は、差分化・超離散化によって、関係性が示されて

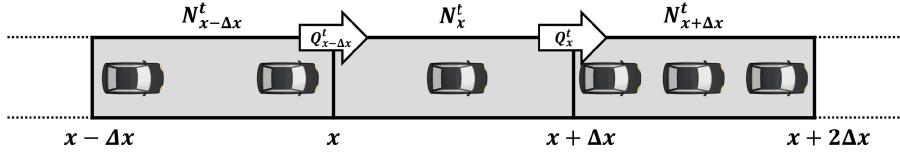


図 11: 区間を移動する車の台数表現

いる。このことから、ここでは、連続極限によって微分方程式との対応を、超離散極限によって超離散系（セルオートマトン）との対応を考えるという立場を取り、差分方程式で記述される交通流モデルを考える。

これまでと同様、連続の式を出発点としてモデルを構築していく。まず、道路を1次元空間とみなし、道路を幅 Δx の区間に分割する。時刻 t のとき、区間 $x \sim x + \Delta x$ に存在する車の台数を N_x^t とし、 N_x^t のうち、時間 Δt が経過したとき、次の区間 $x + \Delta x \sim x + 2\Delta x$ に進む車の台数を Q_x^t とする（図11）。ここで、移動する車の割合を r_x^t とおき、

$$r_x^t = 1 - \frac{N_{x+\Delta x}^t}{N_{\max}} \quad (20)$$

と仮定すると、移動する車は、 $Q_x^t = r_x^t N_x^t$ と表すことができる。（20）は、 $x + \Delta x \sim x + 2\Delta x$ に、車がないとき、すべての車が移動できるため $r_x^t = 1$ とし、車が区間内に収容できる最大数 N_{\max} であれば、移動できないため $r_x^t = 0$ とするものであり、Greenshieldの関係式（12）と同様、線形な関係式で与える。このとき、車が道路上を動いていく様子は、連続の式より、

$$N_x^{t+\Delta t} = N_x^t - r_x^t N_x^t + r_{x-\Delta x}^t N_{x-\Delta x}^t \quad (21)$$

と表される。ここで、 $\rho_x^t := N_x^t / N_{\max}$ と置きなおせば、

$$\rho_x^{t+\Delta t} = \rho_{x-\Delta x}^t + \rho_x^t (\rho_{x+\Delta x}^t - \rho_{x-\Delta x}^t) \quad (22)$$

となり、交通密度に関する差分方程式として記述することができる[25, 26]。特に、 $\Delta x = \Delta t = 1$ とし、初期密度 $0 \leq \rho_x^0 \leq 1$ とすると、以降全ての時刻 t で $0 \leq \rho_x^t \leq 1$ が成り立つことから、（22）はセルオートマトンの時間発展則の連続化（ファジー化）と解釈することができ、ルール184FCA(Fuzzy Cellular Automaton)と呼ばれている[26]。また、これまでのルール184ECAでは、 $U \in \{0, 1\}$ であったが、ルール184FCAでは、 $\rho \in [0, 1]$ であり、確率セルオートマトンとの関係も調べられている[27]。

さて、ここでの我々の興味は、高流量状態から低流量状態への遷移にあり、この二つの状態が共存する双安定性にある。この観点で交通流モデルとしてのルール184FCAについて見ていくと、ルール184FCAは、 L を区間の数としたときに2周期解を示す $L/2$ モードを除いて、振動の大きさによらず一様流解に収束することから、改良の余地があることがわかった。そこで我々は、次のような時間遅れを取り入れた非線形差分方程式を新しい交通流モデルとして提案した[28]。

$$\begin{cases} \rho_x^{t+\Delta t} = \rho_x^t - Q_x^t + Q_{x-\Delta x}^t \\ Q_x^t = \rho_x^t (1 - \rho_{x+\Delta x}^t) \left\{ 1 - \left((1 - \alpha) \rho_x^{t-\Delta t} + \alpha \rho_{x+\Delta x}^{t-\Delta t} \right) \right\} \end{cases} \quad (23)$$

ここで、パラメータ α は、時刻 $t - \Delta t$ における場所 x と $x + \Delta x$ での空間平均を考える際の重みを表す。本稿では、モデルの解釈のしやすさのために ρ と Q に関する方程式系で記述しているが、本質的には、 ρ に関する単独の時間発展方程式となっていることを注意しておく。

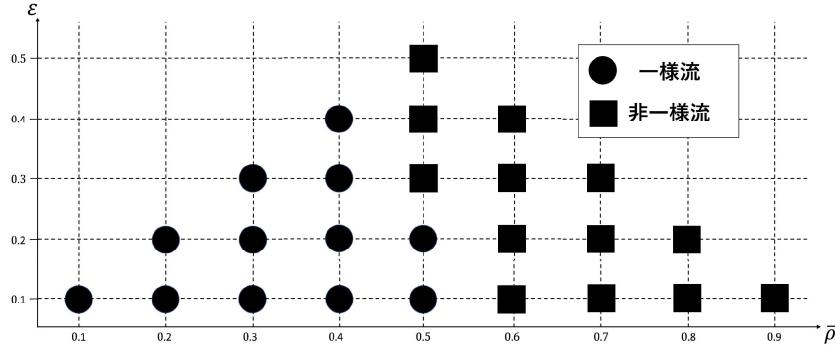


図 12: 提案モデル (23) の数値解の分類 [28]

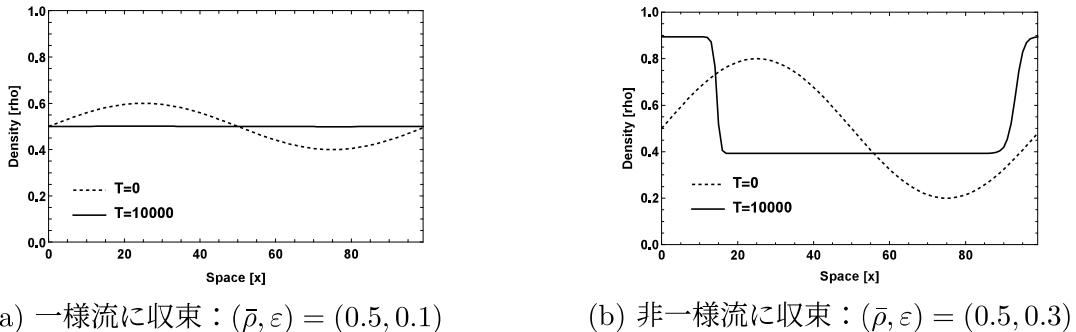


図 13: 平均密度 $\bar{\rho}$ と の各組み合わせに対する数値実験結果 [28].

ここでは、我々の提案する交通流モデル (23) の数値実験で得られた数値解の振る舞いについて紹介する。 $\alpha = 0.2$, $\Delta x = \Delta t = 1$ とし、初期値として ρ_x^0, ρ_x^1 を次のように与える。

$$\rho_x^0 = \rho_x^1 = \bar{\rho} + \varepsilon \sin \frac{2\pi x}{L} \quad (24)$$

$L = 100$ とし、計算時間を $T = 10000$ ステップまで行い、 $\bar{\rho}$ と ε をそれぞれ変えたときの $T = 10000$ での数値解の振る舞いを分類した図が図 12 である。図 12 を見る限り、四角で示したパラメーターの組み合わせにおいて、非一様流が観察された。さらに、平均密度が低いときは一様流となる傾向にあり、平均密度が高いときは非一様流になる傾向があることもわかった。特に、平均密度が $\bar{\rho} = 0.5$ のときは、 ε が小さい場合は一様流に、 ε が大きい場合は非一様流へと収束することが確認され、同じ平均密度であっても、 ε の大きさによって二つの安定な状態が存在しうることが明らかとなった。これはまさに、我々の提案する交通流モデル (23) が双安定性をもつことを示している。解のプロファイルの例として、 $(\bar{\rho}, \varepsilon) = (0.5, 0.1), (0.5, 0.3)$ のそれぞれの場合を図 13 に示す。初期擾乱の振幅が小さい場合は一様流に収束し、振幅が大きい場合は非一様流を形成することがわかる。さらに、長時間経過後の非一様流の振る舞いの時間変化を示したものが図 14 であり、十分時間が経ったあとも形を変えず移動し続ける様子が観察された。このことから、この非一様流は安定な進行波となっている可能性が高く、提案モデル (23) に渋滞の伝播を意味する進行波解の存在が示唆された。さらに、このモデルの安定性を描いた図 15 を見ると、このモデルから示唆される重要な点として、パラメーター α の大きさがある値より大きくなると、つまり、前方の混雑を重視する傾向が強くなると、不安定領域が消失することが挙げられる。これは、一様流解が常に安定となることを意味しており、渋滞解消という観点では、この α が重要な意味を持つこともわかった。この提案モデルのさらなる詳細については、[28] を参照していただければ幸いである。

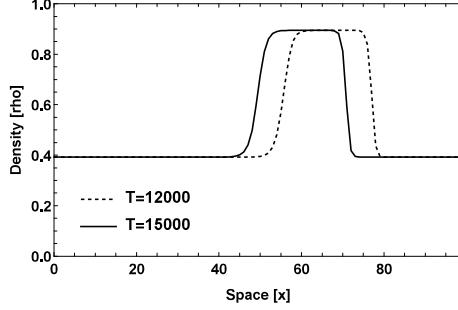


図 14: $(\bar{\rho}, \varepsilon) = (0.5, 0.3)$ における提案モデル (23) に対して観察された非一様流解の長時間経過後の比較 [28]. $T = 12000$ と $T = 15000$ で空間が少しだけずれているが、これは周期境界条件によるものであり、実際は何周も回っており、十分な距離を移動している。

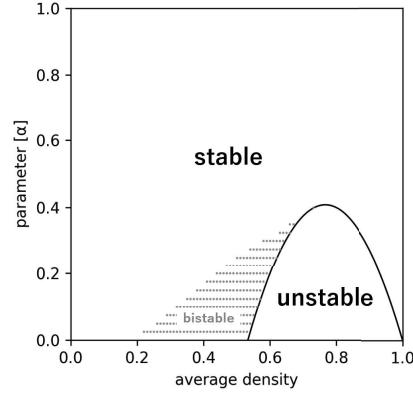


図 15: $L = 100$ の場合の安定性の相図 [28]. 曲線は線形安定性解析によって得られたものであり、プロット点は、数値的に求めた双安定領域を表す。

4 まとめ

本稿では、これまでに提案された様々な交通流数理モデルの中から、「時間遅れ」をキーワードに主要なモデルについて概観した。交通流における「時間遅れ」は、渋滞形成の要因である一様流の不安定性に深くかかわっていることを、モデルの数理解析から改めて確認した。また、流体モデル、追従モデル、セルオートマトンモデル、それぞれのモデリングの記述方法は異なるが、モデル間には対応があることも確認した。さらに、著者らが提案した遅延差分方程式で記述する新しい交通流モデルについても紹介した。時間遅れを取り入れた提案モデルは、交通流において重要な双安定性を持つことが示され、モデルに含まれるパラメータによって、一様流解が安定となる範囲が変化することも確認できた。渋滞解消という点では、この安定領域を広げることが重要であり、今後は定量的な議論へと発展させる予定である。本稿は、交通流という研究分野での知見の一部を記載しているにすぎないが、「時間遅れ」に関わる皆様への一助となれば幸いである。

参考文献

- [1] 杉山雄規, 交通流の物理, ながれ, 22, 95-108 (2003).

- [2] Y. Sugiyama, et al., New J. Phys., **10**, 033001 (2008).
- [3] G. F. Newell, Oper. Res., **9**, 209-229, (1961).
- [4] K. Hasebe, et al., Phys. Lett. A, **259**, 135–139 (1999).
- [5] K. Hasebe, et al., Comp. Phys. Comm., **142**, 259-262 (2001).
- [6] 金井政宏, 数理解析研究所講究録, **1713**, 25-34 (2010).
- [7] M. Bando, et al., Phys. Rev. E, **51**, 1035-1042, (1995).
- [8] M. Bando, et al., J. Phys. I France, **5**, 1389–1399 (1995).
- [9] I. Gasser, et al., Physica D, **197**, 222–241 (2004).
- [10] Y. Sugiyama, *Dynamics of Asymmetric Dissipative Systems*, Springer Nature Singapore (2023).
- [11] M. Treiber and A. Kesting, *Traffic Flow Dynamics: Data, Models and Simulation*, Springer Berlin Heidelberg (2012).
- [12] H. J. Payne, in *Mathematical Models of Public Systems*, edited by G. A. Bekey (Simulation Council Proc., La Jolla, CA), **1**, 51-60 (1971).
- [13] B. Greenshield, in *Proceedings of Highway Research Board*, Washington D. C., **14**, 448-477 (1935).
- [14] B. S. Kerner and P. Konhäuser, Phys. Rev. E, **48**, R2335– R2338 (1993).
- [15] A. Tomoeda, et al., JSIAM Lett., **1**, 72–75 (2009).
- [16] T. Musha and H. Higuchi, Jpn. J. Appl. Phys., **17**, 811-816 (1978).
- [17] T. Kubo and Y. Ueda, J. Differ. Equ., **333**, 184–230 (2022).
- [18] 西成活裕, よくわかる渋滞学, ナツメ社, (2009).
- [19] K. Nishinari and D. Takahashi, J. Phys. A, **31**, 5439–5450 (1998).
- [20] T. Tokihiro, et al., Phys. Rev. Lett., **76**, 3247–3250 (1996).
- [21] M. Takayasu and H. Takayasu, Fractals **1**, 860–866 (1993).
- [22] K. Nishinari and D. Takahashi, J. Phys. A, **33**, 7709-7720 (2000).
- [23] K. Nagel and M. Schreckenberg, J. Physique I **2**, 2221–2229 (1992).
- [24] M. Kanai, et al., Phys. Rev. E, **72**, 035102 (2005).
- [25] K. Higashi, et al., Bull. Musashino Univ. Musashino Cent. Math. Eng. **4**, 42–49 (2019).
- [26] K. Higashi, et al., Jpn. J. Ind. Appl. Math., **38**, 579–609 (2021).
- [27] Y. Nishida, et al., JSIAM Lett. **14**, 143–146 (2022).
- [28] K. Okamoto, et al., Phys. Scr., **99**, 045245 (2024).