

BCK-代数研究の始まりのこと

(BCK-algebras in the Beginning)

熊澤 昌明 (あべの翔学高等学校)

Masaaki Kumazawa

Abeno Shogaku High School

1 はじめに

井関清志先生と田中昭太郎先生のお二人は鳴門教育大学で教授を勤められていました。その鳴門教育大学の数学教室の支援により運営されている数学教育の学会が”学校数学研究会”です。その研究会の発行している雑誌「学校数学研究」に、私は次のタイトルの報告を掲載させていただきました。

”井関清志と田中昭太郎の友情と『数学基礎論の会』”

上記の報告の中の、特に BCK-代数の発見時の経緯をより詳しく述べるのがこの報告の目的であります。BCK-代数は、井関先生の発表された次の論文

K. Iséki, An Algebra Related with a Propositional Calculus, *Proc. Japan Acad.*, **42**(1966), 26-29.

により初めて定義されましたが、この論文は突然に登場したものではありません。その前段階が存在しました。この辺りの事情に関してこの報告では述べてみたいと思います。

2 市民のための数学学習会：『数学基礎論の会』

井関清志先生は、1943 年に大阪帝国大学理学部数学科を卒業され、太平洋戦争に従軍されました。戦後には復員され 1947 年に母校の大阪大学に助手として採用され 1949 年まで勤められました。その後、学制改革によって新設された近畿大学の助教授として 1949 年から 1953 年まで務められました。そして、1953 年になり神戸大学に移られて助教授をされていました。そして、次の論文

Doctor of Philosophy, Osaka University, (1957)

Ph. D Thesis : ”Generalizations of Notion of Compactness”

によって、功刀金二郎先生のもとで 1957 年に新制大阪大学より学位を得られました。その学位論文の内容は「一様位相空間のコンパクト性を新たに定義した”ルベグ性”という概念によって特徴付ける」という内容です。私はこの学位論文の実物を見るために大阪大学附属図書館を訪れたことがあります。上記のタイトルの学位論文のファイルには専門誌に掲載された学位論文に関する主論文の別刷りだけではなく、それまでに出版された他の井関先生によって書かれた論文の別刷りもたくさん挟まれていました。

上記の学位論文の内容からもわかるように、井関先生はその数学研究の初めには主に位相空間論を研究するトポロジストとして数学者のキャリアをスタートされました。

井関先生は 1956 年に一人の公立中学校の教員と出会いました。

この年に、神戸市立荊藻中学校において「数学教育に数学史をどのように採り入れるか？」というテーマで神戸市の数学教育部会による研究会が開かれることになりました。この時、その指導助言者を務めることになったのが井関先生でした。そして、この研究会で新任教員として雑用を勤めておられたのが田中昭太郎先生でした。研究会の間にお二人の間でどのような交流があったのかはわかりませんが、研究会の終了後に校長室でお茶を飲みながら、井関先生は隣席の田中先生に「田中さん、俺と一緒に数学の研究をやらないか。」と言われたそうです。田中先生も即座に「いいですね。」と返されました。しかし、残念ながらこの話はすぐには実現することがありませんでした。お二人の本当に偶然的な再会が『数学基礎論の会』の誕生に繋がっていきます。

田中先生は 1955 年に神戸市で公立中学校の教員になりました。教員になって間もなくして同じく中学校の教員をされていた先輩の勧めで <神戸市民同友会> に参加することになりました。この会は市民による市民のための勉強会であり、田中先生は初めはその会の一つのサークルである <岩波新書を読む会> に参加されました。先生はこのグループを皮切りとしていくつかのグループを経て最終的に <自然科学・岩波新書を読む会> に所属されて、科学史について学んでおられました。

このサークルには、指導助言者のお一人として神戸大学文学部哲学科の教授である三田博雄先生がいらっしました。三田先生は、田中先生が科学史を学ぶことより数学を学びたいと思われている事を見抜かれていたのでしょう。1962 年頃に、三田先生は「田中さん、数学史や数学を勉強する会を立ち上げませんか。その気があるのなら良い先生を紹介しますよ。」とおっしゃられて、田中先生に数学史について学ぶ新しいグループを立ち上げることを勧められました。田中先生はこの助言にお応えして 8 人の仲間を集めることができました。これにより <数学史を学ぶ会> が生まれました。この新しいグループの発足ために指導助言者として三田先生が紹介された方が井関先生でした。三田先生も井関先生も同じ大学にお勤めだったので親しかったのでしょう。

井関先生と田中先生のお二人は初めて会った時の約束を 6 年ほど経ってやっと実現することができました。会員の多くが教員だったのでしょうか、会場は 3 つ学校 (小学校 2 校, 中学校 1 校) を持ち回りすることで勉強会は始まりました。

当時、井関先生はソヴィエト社会主義共和国連邦の数学者コンスタンチン・アレクセビッチ・ルイブニコフによるモスクワ大学での数学史の講義をまとめた、2 分冊からなるロシア語で書かれた著作を、同僚の教官の山内一次先生と一緒に翻訳しようと考えていました。このサークルの活動がこの翻訳のお手伝いをさせて頂くことになりました。この著作は次の 4 分冊の本として出版されました。

ルイブニコフ著、山内一次・井関清志 訳、数学史 I, II, III, IV, 東京図書 (1963, 1965, 1965, 1966)。

更に、この余力をもっともう一つの数学史の翻訳に取り組むことになりました。エルネスト・コールマン とアドルフ＝アンドレイ・パプロビッチ・ユシケーヴィッチ の共著である 2 分冊からなる著作で、次の 2 冊からなる書籍として出版されました。

コールマン、ユシケービッチ 著、山内一次・井関清志 訳、数学史 1, 2, 東京図書, (1970, 1971)。

このサークル活動は、上記の 2 冊の数学史の著作を翻訳することにより数学史を学ぶことから始まりました。これらの著作は社会主義国であるソ連邦のもので書かれていますから唯物論史観を押し付けている部分はありますが、細かい数学的な部分の記述はどちらもしっかりしており現在においても優れた著作であると思います。しかし、この翻訳作業を終えて、ここから井関先生の指導のもとこのサークルは次のステージに向かうことになります。

井関先生が、なぜこのような方向性を打ち出されたのかは明確には分かりませんが、サークルの会員みんなが記号論理学を学ぼうということになったようです。最初は日本語に翻訳された数学の基礎づけや数理論理学に関する著作を何冊か輪読されていたようですが、その後に次の著作をテキストに取り上げました。

J. Lukasiewicz, Elements of Mathematical Logic, Pergamon Press, (1963).

です。著者のヤン・ウカシェヴィチはポーランドにおける論理学のルヴフーワルシャワ学派の指導者であり、この著作は彼が書いた数理論理学の入門書の英訳でした。サークルの名称も『数学基礎論の会』と改め、学習会場も神戸大学の井関研究室の隣のセミナー室に変えました。回数も週2回と多くなりました。更にそれまで輪読形式であった勉強方法を井関先生の提案により田中先生が発表者を務めるセミナー形式に変更することにしました。田中先生はご自分の翻訳をガリ版刷り（当時の学校にはコピー機などなくプリントの印刷はすべてガリ版刷りと呼ばれるものでした）を用意して会員に配布してセミナーを行いました。このとき、田中先生は井関先生から細かく指導を受けることができました。これにより田中先生は大学院で学ぶ事と同じ経験を得ることになったのかも知れません。こうして、『数学基礎論の会』のメンバーはウカシェヴィチの論理学の基礎を教科書で精読することができました。

3 日本学士院への論文掲載時代

公理系の同値性

古典命題論理は、現在ではゲンツェンから始まった自然演繹による構成の方法が主流でしょう。しかし、最初のフレーゲによるものもそうですが、はじめは公理系と推論規則の2つからなる方法が主流でした。こちらの方法においては、最初に仮定する公理系は多くの数学者・論理学者によって種々の異なる公理系が提案されていました。

『数学基礎論の会』の会員は、古典命題論理に対するいろいろな論理学者・数学者による異なる公理系の間の同値性を示す問題に取り組みました。その成果は次のタイトル

”On Axiom Systems of Propositional Calculi”

に定めて、日本学士院が発行する雑誌「Proceedings of Japan Academy, Ser. A Mathematical Science」に25編にわたって同タイトルで5名の会員が単著あるいは共著の形で発表しました。

これらの論文には、異なる公理系の間の同値性を示すための証明にはウカシェヴィチの proof-line と呼ばれる方法を使って行っています。この方法の一端は次の著作に紹介されています。

井関清志, 記号論理学 (命題論理), 数学選書, 槇書店, (1968).

証明法: proof-line に関してはこの著作をご覧ください。ここでは『数学基礎論の会』のメンバーの論文において基準となっているウカシェヴィチの公理系 L_3 のみをあげおきます。ちなみにウカシェヴィチは L_1 , L_2 と呼ばれる他の公理系も与えているので、次の公理系は L_3 とよばれています。

ウカシェヴィチの公理系

$$L_3 \text{ 1. } C_p C_{qp} : (p \rightarrow (q \rightarrow p)),$$

$$L_3 \text{ 2. } CC_p C_{qr} CC_{pq} C_{pr} : (\{p \rightarrow (q \rightarrow r)\} \rightarrow \{(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)\}),$$

$$L_3 \text{ 3. } CCN_p N_q C_{qp} : (\{(\sim p) \rightarrow (\sim q)\} \rightarrow (q \rightarrow p)).$$

論理の代数化

井関先生はサークルの次の段階の研究テーマを模索されていました。命題論理の代数化を試みることに取り組みます。そして次の論文を発表します。

K. Iséki, 176. Algebraic Formulations of Propositional Calculi. *Proc. Japan Acad.*, **41** No.9 (1965), 803-807.

これまでのサークルの研究においては、ウカシェヴィチの proof-line を使用して、いくつかの推論をもとにして必要な推論を導くことで研究を進めてきました。この論文ではこの過程を代数計算として取り扱うことによって命題計算の代数化を試みています。

その基本的なアイデアは、含意を表す論理記号 $\rightarrow$ を二項演算 $*$ に置き換えることです。即ち

「もし p ならば q である」という推論が正しいとき、これを等式「 $p * q = 0$ 」と読み直します。

そして、命題論理における公理系の一つ一つの公理に対応させて、二項演算 $*$ からなる一つ一つの等式の成立を仮定することによって代数を定義します。この方法は次のヘンキンの論文

L. Henkin, An algebraic characterization of quantifiers, *Fund. Math.*, **37** (1950), 63-74.

を参考にしたということが井関先生の論文には書かれています。

この論文において、井関先生は具体的にはウカシェヴィチの含意と否定からなる古典命題論理の公理系 L_3 より二項演算 $*$ と一項演算 $\sim$ からなる B-代数を定義し、更に公理系 L_3 の中にある否定を含む公理の変異を用いて NB-代数, BN-代数, NBN-代数も定義して、それらの代数において命題論理における推論の過程を等式の間を式変形することによって示そうとしています。ここに B-代数の定義を紹介しておきます。

定義 3.1 二項演算 $*$ と一項演算 $\sim$ と定数 0 を持つ $\langle 2, 1, 0 \rangle$ 型の代数 $X = \langle X; *, \sim, 0 \rangle$ が B-代数であるとは、 X の任意の 3 元 x, y, z に対して、次の 5 つの条件 **B.1**~**B.5** を満たす代数である。

- B 1.** $(x * y) * x = 0,$
- B 2.** $\{(x * z) * (y * z)\} * \{(x * y) * z\} = 0,$
- B 3.** $(x * y) * \{(\sim y) * (\sim x)\} = 0,$
- B 4.** $0 * x = 0,$
- B 5.** $x * y = 0$ かつ $y * x = 0$ ならば $x = y$ である。

このとき、 $x * y = 0$ であるとき、このときに限り $x \leq y$ とする。

B-代数では、“含意”を代数化した二項演算 $*$ だけでなく“否定”を代数化した一項演算 $\sim$ も定義されています。また、これらの代数のもとになっている公理系は古典命題論理の公理系でありましたから、当然ではありますが、最終的にはこの代数がブール代数と同値であることが分かりました。

BCK-代数・BCI-代数の発見

『数学基礎論の会』のセミナーにおいて、田中先生は形成規則の説明をするときに CN-system のいくつかの公理より他の公理を導き出すことで、その発表を行いました。このとき、この証明のさいに C. A. メレディスによって導入された System B.C.I. と System B.C.K. が非常に有効に働くことを強調されました。井関先生はこの発表に大きなヒントを得たのかも知れません。次の BCK-代数を定義する論文を発表することになります。

K. Iséki, 7. An Algebra Related with a Propositional Calculus, *Proc. Japan Acad.*, **42** No.1 (1966), 26-29.

B-代数と比較していただくために, BCK-代数の定義もあげておきます.

定義 3.2 二項演算 $*$ と定数 0 を持つ $\langle 2, 0 \rangle$ 型の代数 $X = \langle X; *, 0 \rangle$ が BCK-代数であるとは, X の任意の 3 元 x, y, z に対して, 次の 5 つの条件 **BCK.1**~**BCK.5** を満たす代数である.

BCK 1. $\{(x * y) * (x * z)\} * (z * y) = 0,$

BCK 2. $\{x * (x * y)\} * y = 0,$

BCK 3. $x * x = 0,$

BCK 4. $0 * x = 0,$

BCK 5. $x * y = 0$ かつ $y * x = 0$ ならば $x = y$ である.

このとき, $x * y = 0$ であるとき, このときに限り $x \leq y$ とする.

ここでは BCK-代数自身の性質は深められることはありませんでしたが, それまでに熟知していた古典命題論理の公理系の代数化である B-代数の仲間たちとの間の関係についてはいろいろと調べられています.

なお, 上記のテーマに関して 1965 年から 1971 年にかけて, 『数学基礎論の会』の会員の著した論文が『Proceedings of the Japan Academy, Ser.A, Mathematical Sciences』に継続的に発表され続けました. 1965 年は 17 編, 1966 年は 29 編, 1967 年は 9 編, 1968 年は 8 編, 1969 年は 4 編, 1970 年は 1 編, 1971 年は 1 編の計 69 編でした. この期間の論文の全リストについては, 報告

熊澤昌明, 『数学基礎論の会』における日本学士院への論文掲載時代の論文リスト, 学校数学研究, Vol.29 (2021), 79-82.

で紹介させていただきました. この数年の期間が, 市民のための数学学習会である『数学基礎論の会』の最も活動の活発な時期であったように思われます.

4 雑誌「Mathematics Seminar Note, Kobe University」の創刊

『数学基礎論の会』では, 井関先生の大学時代の恩師である功刀金二郎先生が雑誌『Proceedings of the Japan Academy, Ser.A, Mathematical Sciences』の編集者をされていたので, ずっと功刀先生を通じて論文の投稿を続けてきました. しかし, ある頃から投稿した論文を掲載してもらうことがなかなか難しくなったそうです.

井関先生が私におっしゃられたのは, あまりに多くの論文を投稿しすぎたからではないかということでした. しかしサークルの会員は発表の機会を求めています. そこで神戸大学内で出版されていた経済学の雑誌への投稿も試みましたが当然のことながら断られてしまいます. そこで, 『数学基礎論の会』の会員の求めもあり, 井関先生は同僚で仲の良かった笠原章郎先生の協力を得て数学教室で雑誌を発行することに取り組みました. 資金面のことなど諸々のことでなかなか容易ではなかったと想像されますが, 何とか刊行にこぎつけました. それが 1973 年に創刊された雑誌

「Mathematics Seminar Notes, Kobe University」

でした。この雑誌 M. S. N. は、初めはほとんど同人誌のような形でスタートしたように思われますが、井関先生の神戸大学でのお弟子さんに論文の発表の機会を与え、更に『数学基礎論の会』のメンバーに対しても論文を発表するための機会を与えることになりました。やがて、雑誌の中で議論されている問題に対して海外から論文の投稿が寄せられるようになりました。こうして雑誌 M. S. N. は着実に充実していきました。この雑誌は 1983 年まで 10 年の間発行され、翌年の 1984 年より 雑誌

「Kobe Journal of Mathematics」

と名称を改め、装いを新たにして存続されて今日では立派な雑誌となっています。

BCK-代数の理論は、その研究の最初期この雑誌の中で生まれ、その基礎をかたちづくられました。Vol.1 にはまだ BCK-代数に関する論文はひとつも掲載されていませんが、Vol.2 の巻末の論文として

K. Iséki, Some Properties of BCK-algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **2**(1974), 193-201.

が掲載されています。1966 年に BCK-代数を定義して以来、8 年ぶりに本格的に BCK-代数の性質に言及した論文でした。これによって再び BCK-代数が『数学基礎論の会』の研究テーマとして取り上げられたのでしょう。翌年の Vol.3 には BCK-代数に関して次の 8 本の論文が掲載されています。

K. Iséki, On Ideals in BCK-algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **3** (1975), 1-12.

K. Iséki, On Bounded BCK-algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **3** (1975), 22-33.

K. Iséki, On Bounded BCK-algebras II, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **3** (1975), 34-36.

S. Tanaka, A New Class of Algebra, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **3** (1975), 37-43.

K. Iséki, Remarks on BCK-algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **3** (1975), 45-53.

S. Tanaka, On $\wedge$ -Commutative Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **3** (1975), 59-64.

K. Iséki, On Some Ideals in BCK-algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **3** (1975), 65-70.

S. Tanaka, Examples of BCK-Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **3** (1975), 75-82.

この Vol.3 までに、BCK-代数がブール代数となるための必要条件である 3 つの基本的条件：有界性、可換性、正含意性 (positive implicative) が登場し、BCK-代数のイデアルも定義されています。

翌年の Vol.4 では 6 本の論文が掲載されていますが、まさにこの時期の井関先生は孤軍奮闘されていました。ほぼ独力で BCK-代数の基礎理論を建設されました。また、この時期より井関先生は積極的に海外に出られて、ご自身の研究について発表されています。この年、第 7 回イラン数学会議に招待されてイランのタブリーズのアザラバデガン大学 (現 タブリーズ大学) で発表をされました。この時の縁なのかどうかは分かりませんが、現在、中東諸国に BCK-代数に関連した論文の発表者が多いように思います。

K. Iséki, On Implicative BCK-Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **4** (1976), 9-10.

K. Iséki, BCK-Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **4** (1976), 77-86.

K. Iséki, On a Quasi-Uniformity BCK-Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **4** (1976), 225-226.

K. Iséki, Introduction of Quasi-Uniformity on BCK-Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **4** (1976), 229-232.

K. Iséki, An Ideal Characterization of a Positive Implicative Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **4** (1976), 231-232.

K. Iséki, On Topogenous Structures on BCK-Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **4** (1976), 237-240.

また、この年には井関、田中両先生の共著である次の論文

K. Iséki and S. Tanaka, Ideal Theory of BCK-Algebras, *Mathematicae Japonicae*, **21** (1976), 351-366.

が出版されています。BCK-代数のイデアル論に関してひとつの総括を与える論文であったのだと思います。以後にもよく見られますが、井関先生は M. S. N. での結果をご自身が編集者を務められた *Mathematicae Japonicae* において再びまとめ直された論文を発表されることをよくされていますが、これがそのような最初の論文であると思います。

井関先生はこれまでに海外において BCK-代数についてもお話をされたのかも知れません。Vol.5 では海外の方が著者である BCK-代数に関する論文が初めて掲載されるようになります。Vol.5 には BCK-代数に関する論文が全部で 19 編掲載されてその中の 4 編は海外の方の書かれた論文でした。また、井関先生は 1977 年の春学期にはアメリカ合衆国のアーカンソー大学において先生が名付けた ”非ギリシア数学” についての講義を行われました。

J. Ahsan and A. B. Thaheem, On Ideals in BCK-Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **5** (1977), 167-172.

J. Ahsan and A. B. Thaheem, Chain Conditions in BCK-Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **5** (1977), 179-184.

K. Iséki, BCK-Algebras and its Homomorphism, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **5** (1977), 185-188.

K. Iséki, A Special Class of BCK-Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **5** (1977), 191-198.

H. Yutani, The Class of Commutative BCK-Algebras is equationally definable, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **5** (1977), 207-210.

K. Iséki, On BCK-Algebras with Condition (S), *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **5** (1977), 215-222.

J. Ahsan and A. B. Thaheem, A Note on Ideals in Tanaka Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **5** (1977), 223-226.

K. Iséki, On a Positive Implicative Algebras with Condition (S), *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **5** (1977), 227-232.

K. Iséki, On Bounded Positive Implicative Algebras with Condition (S), *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **5** (1977), 239-244.

S. Tanaka, On $\wedge$ -Commutative Algebras. II, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **5** (1976), 245-247.

K. Iséki, On Implicative BCK-Algebras with Condition (S), *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **5** (1977), 249-253.

H. Yutani, On a System of Axioms of Commutative BCK-Algebra, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **5** (1977), 255-256.

H. Y. Seto, An Example of Bounded Commutative BCK-Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **5** (1977), 283-284.

K. Iséki, On Congruence Relation on BCK-Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **5** (1977), 327-346.

Y. Seto, Some Examples of BCK-Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **5** (1977), 327-346.

J. Ahsan, On Decomposition Properties of Certain BCK-Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **5** (1977), 419-430.

K. Iséki, Some Topics from the Category of BCK-Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **5** (1977), 465-468.

H. Yutani, Quasi-Commutative BCK-Algebra, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **5** (1977), 469-480.

K. Iséki, On Some of BCK-Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **5** (1977), 481-484.

翌年の Vol.6 では 13 編の BCK-代数に関する論文の掲載があり海外の方による投稿は 5 編でした。BCK-代数以外の内容でも海外の方の投稿は多くなり M. S. N. が研究雑誌として認められてきたのだと思われます。

この 1978 年に井関先生はポーランドのバナッハ・センターの招聘に応じて長期に渡ってヨーロッパで過ごされました。この間の出来事については次の記事に書かれています。

井関清志, ポーランド・ハンガリー滞在記, 数学セミナー, 12 月, 日本評論社 (1979), 53-57.

バナッハ・センターはソ連と東欧の科学アカデミーが共同でワルシャワに 1972 年に設立した数学研究所です。ここではひとつの研究テーマを決めて 3 カ月から半年程度の研究期間を定めます。これをセメスターと呼んでおり、この間定めた研究テーマに対して世界各国から数学者を招待して、その研究の成果の交換と若手研究者の養成を行っていました。井関先生が参加したのは第 11 回のセメスターで 1978 年の 2 月 15 日より 6 月 9 日まで "代数学とその応用" をテーマとして行われました。この研究会には各国から数十人の研究者が招待されていました。日本からの参加者の中には当時広島大学に所属されていた小野寛晰先生がいらっしゃいました。先生は後に "部分構造論理" という研究分野を確立された方です。井関先生との間にどのような交流があったのだろうかに興味があります。

J. Ahsan, Equivalent Conditions for Some Ideals in BCK-Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe*

University, **6** (1978), 51-56.

J. Ahsan , On Complete BCK-Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **6** (1978), 123-131.

H. Yutani, Categoricity in Theory of BCK-Algebra, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **6** (1978), 133-135.

K. Iséki, On Commutative BCK-Algebras with Condition (S), *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **6** (1978), 137-138.

K. Iséki, On the Class of BCK-Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **6** (1978), 157-160.

J. Ahsan and E. Deeba, On Ideal in Implicative BCK-Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **6** (1978), 161-168.

H. Yutani, Congruence on Products of BCK-Algebra, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **6** (1978), 169-176.

K. Iséki, On Implicative Ideals in BCK-Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **6** (1978), 185-186.

H. Yutani, Coequalizer in the Category of BCK-Algebra, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **6** (1978), 187-188.

A. B. Thaheem, Remarks on Commutative BCK-Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **6** (1978), 237-244.

K. Iséki, Some Problems on BCK-Algebras with Condition (S), *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **6** (1978), 369-370.

K. Iséki, Remarks on BCK-Algebras with Condition (S), *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **6** (1978), 449-453.

A. B. Thaheem, Characterizations of Certain Ideals in Implicative BCK-Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **6** (1978), 495-504.

また、この年に BCK-代数の研究におけるひとつの一里塚を与える次の論文が出版されました。

K. Iséki and S. Tanaka, Introduction to the Theory of BCK-Algebras, *Mathematicae Japonicae*, **23**, No.1 (1978), 1-26.

です。この論文はこのあと長い期間 BCK-代数に関して書かれた論文において必ず引用文献にあげられる論文になりました。

この後、雑誌「Mathematics Seminar Note, Kobe University」において、1979 年には 9 編、1980 年には 21 編、1981 年には 1 編、1982 年には 10 編、1983 年には 6 編と BCK-代数に関する論文が掲載されましたが、BCK-代数に関する論文は M. S. N. に限らず他のいろいろな雑誌に掲載されるようになりました、こうして、M. S. N. は当初の役目のひとつである BCK-代数の理論を育てるという役割を終えました。

この間の重要な出来事を一つだけあげます。1982年に井関先生は再びバナッハ・センターに招かれ「Universal algebra and its application」という研究テーマのセメスターにおいて“Some problems of BCK-algebra and its application”という講演を行い、その中で次の問題を提起されました。

「BCK-代数全体は non-variety (非等式クラス) であるか。」

この問題に対して、ポーランドのクラコビッチ大学の A. ウロンスキー教授は BCK-代数であるが non-variety となる具体的な例を構成して見せました。それは次の論文に掲載されました。

A. Wroński, BCK-Algebras Do not a Variety, *Mathematicae Japonicae*, **28**, No.2 (1983), 211-213.

数学では、数、操作、論理などさまざまな対象の中に代数構造を見い出して、さまざまな代数を定義してその性質を調べています。しかし、そのほとんどの代数は variety です。即ちそれらの代数の定義はすべて等式のみで行うことができるものです。良く知っている代数の中では唯一“体”が non-variety です。それは体が定義されている演算である割り算に関して、“0 で割ることできない”という条件を持っているためです。体は数に由来している代数ですが、一方 BCK-代数は体とは異なり論理を由来とする代数です。まだ non-variety の代数的特徴づけはきちんとできているとはいえません。また、論理代数としての non-variety の論理学における意味づけもできていないと思われます。このことを説明することが、BCK-代数における最も重要な研究テーマであると考えます。なお、どなたが招待されたのかわかりませんが、ウロンスキー教授は 1985 年の富山大学における日本数学会秋季総合分科会において、分科会のセッションの中で特別講演“Foundations of Mathematics”を行われていますが、ぜひその内容を読んでみたいものです。

最後にこの報告で強調しておきたいのは、BCK-代数がプロの研究者のみによって見出されたのではなく、市井の向学心を持った学究の徒の大きな協力のもとで得られたのだということを記憶にとどめておいてほしいということです。

まだまだ、BCK-代数の最初期の研究史を捉え切れていませんが、今回の報告をこれで終えたいと思います。

Acknowledgments

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

(2023 年 5 月 8 日よりコロナは 5 類感染症移行となりました。私にはあまり実感が持てませんが、私たちは歴史的な疫病蔓延の時期を生き延びたということなのでしょう。2024 年度の研究集会の懇親会は”がんこ高瀬川二条苑”にて行われました。パンフレットを見て驚きました。この店の見事な美しい庭園を最初に作ったのは豪商の角倉了以だそうです。彼のいとこである吉田宗運の孫は「塵劫記」を書いた吉田光由です。吉田の著作は寺子屋など広く江戸時代の日本で読まれ、今日の日本人の数理的知識の基礎を与えています、ここは数学者の懇親会の会場に大変ふさわしい場所だと感じました。世話役の西中恒和先生に感謝いたします。2024.5.10)