超特殊アーベル多様体上の同種グラフ：固有値, BRUHAT-TITS ビルディング およびPROPERTY (T)

山内 卓也 (東北大学)

1. 序文

本稿は田中 亮吉 氏 (京都大学) と相川 勇輔 氏 (東京大学) との共同研究 [1] の概説である[1]．標数 p の有限体上の次元 g の主偏極付き超特殊アーベル多様体のモジュライ空間から同種グラフ (正則有向有限グラフ) が構成される．このグラフラプラシアンの第二固有値 (スペクトルギャップ) の下からの評価を Hee Oh による Kazhdan 定数の明示的評価を用いて与える．同種グラフから耐量子暗号に有用なハッシュ関数の構成のレシピが存在し ([4]), ハッシュ関数の安全性の部分にこの固有値の評価が用いられる．

固有値の評価のアイデアは問題を幾何群論が適用できる設定に持ち込むことである．先ず, モジュライ空間をマーク付きにものに書き換えそれとシンプレクティック群の Bruhat-Tits building の 1-skelton の部分グラフの頂点とを自然に同一視する．次に, この同一視の下, 対応する有限次元ヒルベルト空間上に作用するグラフラプラシアンと Hecke 作用素とが整合的になることを確認し, 後はよくある流れで Property (T) を適用すれば固有値の下からの評価が得られる．この時点では評価は定性的であるが, 先にも述べた Hee Oh の Kazhdan 定数の評価により具体的な評価を得, 主結果を得るという流れである．

本稿の構成を述べる．先ず 2 節において $g = 1$ の場合の Pizer の仕事を復習し, 何を問題としているかその問題意識を説明する．そして, 3 節で $g \geq 2$ の場合を説明し, 主結果 (Theorem 3.3) の説明を行う．後半は保型形式 (表現) 論から期待できる固有値の評価および今後の展望について述べる．

2. $g = 1$ の場合 (Pizer の結果)

本節では $g = 1$ の場合の Pizer の結果を復習する．従って, 本節の内容はすべて既知の結果であり新しいことは何も含まれていないことに注意されたい．以下, 異なる二つの素数 p, ℓ を固定して話をする．楕円曲線の基本的性質については [29] を参照されたい．

2.1. **同種グラフ．** 標数 p の有限体の代数閉体 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の楕円曲線 E が**超特異 (supersingular)** であるとは $E[p] = O_E$ を満たすときをいう (cf. [29, V.3,p.144-145])．超特異楕円曲線の $\overline{\mathbb{F}}_p$

[1]Published version は紙数の都合で Arxiv 版から大幅な改変がなされた．Arxiv 版は種々の定義を専門家にとっては自明であることでも丁寧に説明してあるのでこちらもご参照ください．

上の同型類全体のなす集合を $SS_1(p)$ で表す．このとき, 公式

$$|SS_1(p)| = \frac{p-1}{12} + \begin{cases} 0 & (p \equiv 1 \bmod 12) \\ \frac{1}{2} & (p \equiv 5 \bmod 12) \\ \frac{2}{3} & (p \equiv 7 \bmod 12) \\ \frac{1}{2}+\frac{2}{3} & (p \equiv 11 \bmod 12) \end{cases}$$

が知られている (cf. [29, Theorem 4.1-(c),p.148-149])．超特異楕円曲線 E_1, E_2 の間の楕円曲線としての非自明な射 $\phi : E_1 \longrightarrow E_2$ が **ℓ-同種 (ℓ-isogeny)** であるとは ϕ の核が $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ と同型であるときをいう．このとき, $\mathrm{Ker}(\phi)$ は $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ ベクトル空間 $E[\ell] \simeq (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^2$ 内の次元 1 の $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$-部分空間を定め, ϕ は同型

$$E_1/\mathrm{Ker}(\phi) \xrightarrow{\sim} E_2$$

を誘導する．これにより, $\phi : E_1 \longrightarrow E_2$ は自然な射影 $E_1 \longrightarrow E_1/\mathrm{Ker}(\phi)$ と同一視される．逆に, $E[\ell]$ の勝手な 1 次元 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$-部分空間の商をとることで E_1 を source とする ℓ-同種が得られる．$E[\ell]$ の 1 次元 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$-部分空間は $\ell+1$ 個あるので, E_1 を source とする ℓ-同種は $\ell+1$ 本あることになる．以上により, $SS_1(p)$ から **ℓ-同種グラフ (ℓ-isogeny graph)** を

$$G_1(p,\ell) := (V,E),\ V = SS_1(p),\ E = \{v_1 \xrightarrow{\phi} v_2 \mid \phi \text{ は } \ell\text{-同種}\}$$

として定める．つまり, グラフの頂点集合は $SS_1(p)$ で与えられ, 二つの頂点 v_1, v_2 に対して, その代表元 E_1, E_2 であって, E_1 から E_2 への ℓ-同種が存在するとき, $v_1 = [E_1]$ から $v_2 = [E_2]$ へ向き付けされた辺を与える．上記の考察により, これは $(\ell+1)$-正則有向有限グラフになる．ただし, $E[\ell]$ の異なる 1 次元 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$-部分空間達が同型を除いて, 同じ ℓ-同種を与えることが起こりうる．従って, 一般には各辺 $v_1 \xrightarrow{\phi} v_2$ には重さ $w(v_1, v_2, \phi)$ が割り当てられる．また, ϕ の双対同種 ([29, III.6]) は辺 $v_2 \xrightarrow{\widehat{\phi}} v_1$ を定める．このとき,

- $w(v_1, v_2, \phi)$ は被約自己同型群 $\mathrm{RA}(E_1) := \mathrm{Aut}(E_1)/\{\pm 1\}$ の位数を割り, そして,
- $|\mathrm{RA}(E_1)| w(v_2, v_1, \widehat{\phi}) = |\mathrm{RA}(E_2)| w(v_1, v_2, \phi)$

が成り立つことが知られている (cf. [10, Lemma 3.2-(2)])．特に, $p \equiv 1 \bmod 12$ のときは, 任意の $SS_1(p)$ の (代表) 元 E の被約自己同型群は自明となり (cf. [29, Theorem 10.1,p.103]), この場合は $G_1(p,\ell)$ は無向グラフとなる．以下にそのような例 (FIGURE 1, FIGURE 2) を二つの挙げる．

2.2. **同種グラフに付随する有限次元複素ヒルベルト空間.** ℓ-同種グラフ $G_1(p,\ell)$ に対して,

$$l^2(G_1(p,\ell)) := \{f : V = SS_g(p) \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ は関数}\}$$

とおき, エルミート内積を

$$\langle f, g\rangle := \sum_{v\in V} f(v)g(v)\frac{1}{|\mathrm{RA}(v)|}$$

によって定める．組 $(l^2(G_1(p,\ell)), \langle *, *\rangle)$ のことを**有限次元複素ヒルベルト空間 (fi**

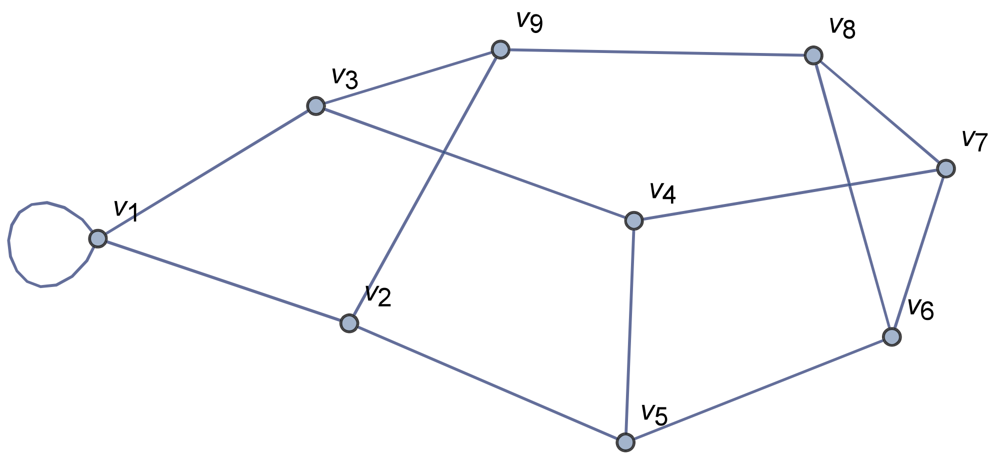

Figure 1. $G_1(109, 2)$ のグラフ

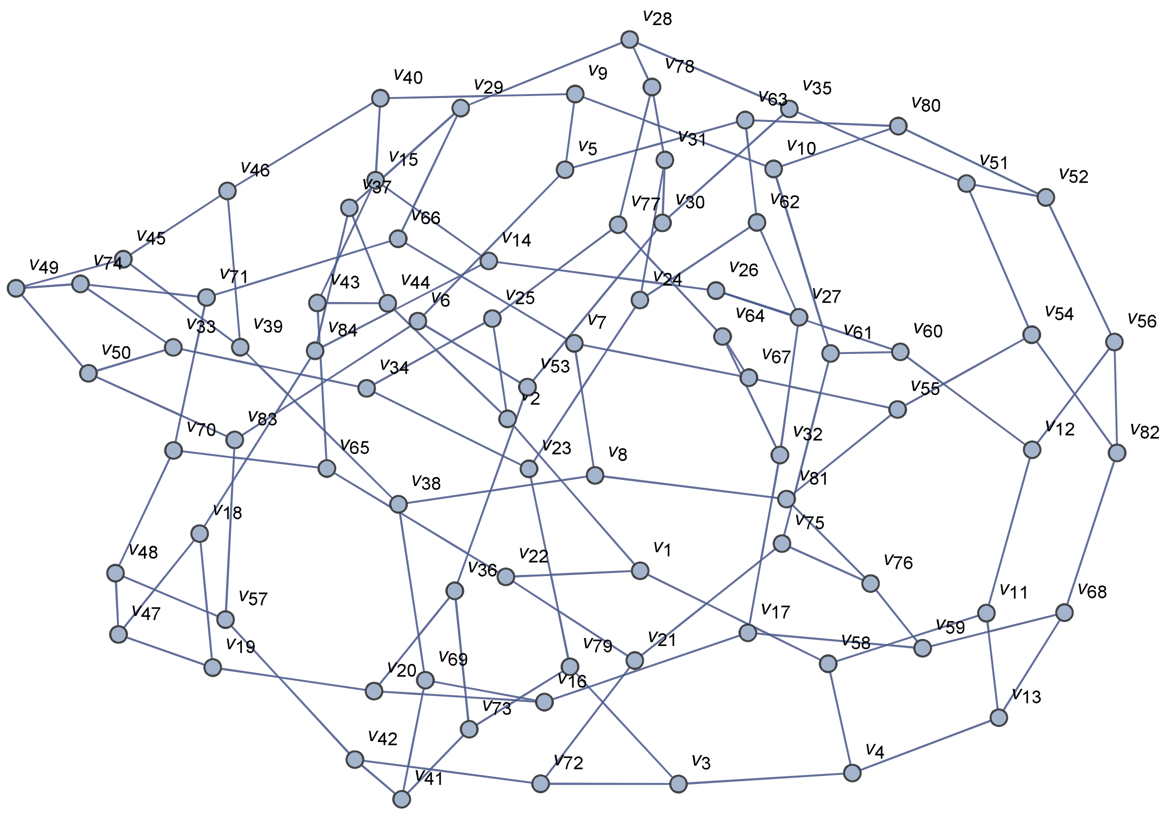

Figure 2. $G_1(1009, 2)$ のグラフ

nite-dimensional complex Hilbert space) という．$l^2(G_1(p,\ell))$ 上の線形写像

$$Pf(v) := \frac{1}{\ell+1}\sum_{v\xrightarrow{\phi}v'} f(v')w(v,v',\phi)$$

のことをマルコフ作用素 (Random walk 行列) といい, $\Delta := \mathrm{id} - P$ を $l^2(G_1(p,\ell))$ 上のグラフラプラシアンという．マルコフ作用素 P は内積に関してエルミートであり, かつ表現行列は確率行列なので, Δ の固有値は非負かつ 2 以下の実数であることがわかる．それらを重複も込めて

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \lambda_H \le 2,\ H := |SS_1(p)|$$

と並べる．同種グラフ $G_1(p,\ell)$ は $(\ell+1)$-正則なので $\displaystyle\sum_{v\xrightarrow{\phi}v'} w(v,v',\phi) = \ell+1$ であり, 定数関数のグラフラプラシアンの固有値は 0 となる．よって, $\lambda_1 = 0$. またグラフが連結, bipartite でないことが知られているので (cf. [15, 7.1] または [17, Proposition 3.2][2]), グラフ理論の一般論より $\lambda_1 = 0 < \lambda_2,\ \lambda_H < 2$ が従う．

このとき,

「第二固有値 λ_2 の下からの評価を明示的に与えよ」

という問を考える．そして, その答えとして, モジュラー形式に関する Ramanujan bound を用いた評価を次節以降で与える．その際に鍵となるのが Eichler 対応と Deuring 対応である．

2.3. **重さ 2 のモジュラー形式.** 重さ 2, レベル $\Gamma_0(p)$ である自明指標をもつ (楕円) モジュラー形式全体のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間を $M_2(\Gamma_0(p))$ と記す．$M_2(\Gamma_0(p))$ の元は上半空間 $\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ 上の正則関数 $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ であり, 定義から無限遠点 $\sqrt{-1}\cdot\infty = \lim_{t\to+\infty} \sqrt{-1}\cdot t$ の周りで $f(\tau) = \displaystyle\sum_{n=0}^{n} a_n q^n,\ q := e^{2\pi\sqrt{-1}\tau},\ \tau \in \mathbb{H}$ の形にフーリエ展開される[3]．この空間の次元は $H = |SS_1(p)|$ と一致し, さらに, Eisenstein 級数 $E_{2,p}(\tau) = \dfrac{p-1}{24} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{d|n\\ p\nmid d}} d\Big)q^n$ とカスプ形式の成す空間 $S_2(\Gamma_0(p))$ によって $M_2(\Gamma_0(p)) = \langle E_{2,p}\rangle \oplus S_2(\Gamma_0(p))$ と分解される．また, よく知られているように, この空間は q の係数が 1 であるように正規化された, すべての Hecke 作用に関する同時固有基底 $f_1 := E_{2,p}, f_2, \ldots, f_H$ を持ち, 特に ℓ での Hecke 作用素 T_ℓ に関して, 各基底は

- $T_\ell E_{2,p} = (\ell+1)E_{2,p}$;
- $T_\ell f_i = \alpha_i f_i,\ \alpha_i \in \mathbb{R}\cap\overline{\mathbb{Z}},\ |\alpha_i| \le 2\sqrt{\ell}\ (2 \le i \le H)$

[2]代数群 SL_2 の Bruhat-Tits 理論による解釈からわかる．栗原 章氏は志村曲線の悪い還元での特殊ファイバーの連結性を主張しているが, 双対を考えることで当該グラフの連結性と同値であることがわかる．

[3]記号 q は無限遠点 $\sqrt{-1}\cdot\infty$ の局所変数.

を満たす．二番目の主張の内, $\alpha_i \in \mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Z}}$ であることは [28, (7.5.9),(7.5.10), p.185] から従い, 後半は Ramanujan bound である (cf. [7, 定理 4.5.17, p.169])[4].

$M_2(\Gamma_0(p))$ の元であって $\tau = \sqrt{-1}\infty$ におけるフーリエ展開がすべて有理数であるもの全体の成す $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $M_2(\Gamma_0(p))_{\mathbb{Q}}$ と記す．$M_2(\Gamma_0(p)) = M_2(\Gamma_0(p))_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ となることが知られている (次節で述べる Eichler の basis problem, または Hecke 環, Eichler-Shimura 同型を用いた議論から従う [28, Theorem 3.52, p.85 または Chapter 8]).

2.4. **Brandt 射と Eichler 対応.** この節の基本文献は [23] である．D を $\mathbb{Q}$ 上の四元数体であって p と ∞ でのみ分岐するものとする．N を D のノルムとする．D の極大整環を $\mathcal{O}$ とする．D の格子 I であって, 任意の有理素数 q に対して, $I_q = \mathcal{O}_q a_q,\ a_q \in D_q^{\times}$ をみたすとき, I を D の左 $\mathcal{O}$-イデアルという．ただし, $I_q = I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_q,\ \mathcal{O}_q = \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_q,\ D_q = D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_q$ とおく．二つの左 $\mathcal{O}$-イデアル I, J が $I = Ja,\ a \in D^{\times}$ を満たすとき, I, J は同じ類に属す, という．左 $\mathcal{O}$-イデアル I の逆イデアルを $I^{-1} = \{x \in D \mid IxI \subset I\}$ とし, ノルム $N(I)$ を $\langle N(x) \mid x \in I \rangle_{\mathbb{Z}}$ の非負生成元によって定義する．同じ類のものは同一視することで, 左 $\mathcal{O}$-イデアルの類全体が成す集合を考え (これは有限集合になる), これらを基底とする自由加群を $\mathfrak{M}$ とする．$\mathfrak{M}$ の階数は明示的に与えられており (cf. [23, Theorem 1.12]), $H = |SS_1(p)|$ と一致する．$\mathfrak{M}$ の左 $\mathcal{O}$-イデアルの類からなる基底を $I_1, \ldots, I_H$ とする．このとき, Eichler の basis problem ([8]) により, Brandt 射

$$\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}} \times \mathfrak{M}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow M_2(\Gamma_0(p))_{\mathbb{Q}},\ (I_i, I_j) \mapsto \theta_{i,j},$$

$$\theta_{i,j} := \frac{1}{|I_j^{\times}|} \sum_{x \in I_j^{-1} I_i} q^{N(x)N(I_j)/N(I_i)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{ij}(n) q^n$$

は全射である．非負整数 n に対して, $B(n) = (b_{ij}(n))_{1 \le i,j \le H}$ を第 n-Brandt 行列という．このとき, Brandt 射は $\mathbb{Q}$-線形同型

$$\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}} := \mathfrak{M} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq M_2(\Gamma_0(p))_{\mathbb{Q}} \tag{2.1}$$

であって, 第 ℓ-Brandt 行列 $B(\ell)$ と第 ℓ-Hecke 作用素 T_ℓ が, $\mathbb{Q}$-線形同型を除いて, 整合的になるものを引き起こす[5]．特に, 固有値の情報は保存されることに注意する．ただし, 同型 (2.1) は,

「j を固定して, i を動かしたときにできる対応 $I_i \mapsto \theta_{i,j}$ のことではない!」

ことに注意されたい．実際, j を任意に止めたとき, $\{\theta_{i,j} - \theta_{1,j}\}_{2 \le i \le H}$ が $S_2(\Gamma_0(p))_{\mathbb{Q}}$ を張るかどうか?という Hecke の問いが成立するのは $p \le 31, p = 41, 47, 59, 71$ の時に限る ([23, Remark 2.16, p.355]).

上記の同型を **Eichler 対応**と呼ぶ.

---

[4] [5, Theorem 2.1] により, $|\alpha_i| < 2\sqrt{\ell}$ であることが知られている.

[5] これは各 $I_i,\ (1 \le i \le H)$ に対して, ある j_i が存在して, $I_i \mapsto \theta_{ij_i}$ として定義される．それ故に非標準的な同型であるが $\mathbb{Q}$-線形同型を除いて Hecke 作用素が整合的であるところがポイントである.

2.5. **Duering 対応.** 記号は前節の通りとする．$SS_1(p)$ の (代表) 元 E_0 を任意に固定する．よく知られているように $D = \mathrm{End}(E_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ は p と ∞ でのみ分岐する四元数体であり, $\mathcal{O} = \mathrm{End}(E_0)$ は D の極大整環となる ([6])．各 $SS_1(p)$ の (代表) 元 E に対して同種写像 $\varphi : E_0 \longrightarrow E$ が存在する．組 (E, φ) の同型類全体のなす集合を $SS_1(p; E_0)$ とおくとき, $|SS_1(p)| = |SS_1(p; E_0)|$ が成り立つ．さらに, 集合 $SS_1(p; E_0)$ から左 $\mathcal{O}$-イデアルの類全体が成す集合への対応

$$(E, \varphi) \mapsto \mathrm{Hom}(E, E_0)\varphi$$

は全単射を与える． これを Deuring 対応という． $SS_1(p; E_0)$ に対しても $(\ell + 1)$-正則有限グラフ $G_1(p, \ell; E_0)$ が構成され, さらに, そこから得られる有限次元ヒルベルト空間を $l^2(G_1(p, \ell; E_0))$ と記す.

2.6. **Pizer の主結果とその解釈.** Pizer は, 左 $\mathcal{O}$-イデアルの類 $I_1, \ldots, I_H$ を頂点とし, 辺を第 ℓ-Brandt 行列 $B(\ell)$ が隣接行列となるように定めることで $(\ell+1)$-正則有限グラフを定義した ([24],[25]). このグラフの有限次元ヒルベルト空間は $\mathfrak{M} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ と自然に同一視され, グラフラプラシアン ($\mathfrak{M}$ の上記自由基底に関する表現行列) は $1_H - \dfrac{B(\ell)}{\ell+1}$ に対応する．さらに Eichler 同型により, この作用素は $M_2(\Gamma_0(p))$ 上で $\mathrm{id} - \dfrac{T_\ell}{\ell+1}$ に対応する．従って, 2.3 節より, これらの固有値は

$$0,\ 1 - \frac{\alpha_i}{\ell+1},\ i = 2, \ldots, H$$

となり, Ramanujan bound から

$$1 - \frac{2\sqrt{\ell}}{\ell+1} \leq \lambda_i \leq 1 + \frac{2\sqrt{\ell}}{\ell+1},\ 2 \leq i \leq H \tag{2.2}$$

を得る.

正確に述べると Pizer は上記を被約自己同型群を自明化するためにレベル構造付きの超特異楕円曲線のモジュライからなる同種グラフを考察した．定義より Ramanujan graph は無向グラフなためそのような設定で採ったと思われる (頂点が非自明な自己同型群を持つ場合はグラフは有向となる)．そうすることで, ℓ を止めて p を動かくすことで Ramanujan graph の族 (a family of expander graphs の系統的例) を構成した[6].

Pizer の結果は Deuring 対応を経由することで ℓ 同種グラフのグラフラプラシアンの固有値の評価を与えていると解釈できる．実際, Deuring 対応を上記考察に合わせると

$$l^2(G_1(p, \ell)) \simeq l^2(G_1(p, \ell; E_0)) \overset{\text{Deuring 対応}}{\simeq} \mathfrak{M}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \overset{\text{Eichler 対応}}{\simeq} M_2(\Gamma_0(p))$$

が得られ, 左辺のグラフラプラシアンは $M_2(\Gamma_0(p))$ 上の作用素 $\mathrm{id} - \dfrac{T_\ell}{\ell+1}$ に対応する．よって, (2.2) と同じ固有値の評価を得る.

[6]ある不定符号四元数体から定まるケーリーグラフを用いた Ramanujan graph の構成に関する先駆的な仕事 [19] も参照されたい.

3. $g \geq 2$ の場合

本節の内容が [1] の主結果である．$g=1$ のときのようなモジュラー形式を用いた議論が $g \geq 2$ の場合は, 現時点では確立されていないため, 同種グラフの有限ヒルベルト空間を幾何群論を用いて調べる設定に持ち込み Property (T) や Kazhdan 定数を用いてグラフラプラシアンの第二固有値を解析するというのが大まかな流れである．この節では $g \geq 2$ を仮定し, 前節と同様に p, ℓ は異なる素数とする.

アーベル多様体に関する基本事項は [20],[21] を超特殊アーベル多様体に関しては [14],[18] を参照せよ．本節におけるアーベル多様体はすべて $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上定義されているとする.

3.1. **超特殊アーベル多様体のモジュライとマーキング.** $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の次元 g のアーベル多様体 A が超特殊であるとは A が g 個の超特異楕円曲線の積と同型となるときをいう．そのような A は任意に固定した超特異楕円曲線 E_0 の g 個の積と同型であることが知られている ([18, Section 1.6,17])．主偏極付き超特殊アーベル多様体 $(A, \mathcal{L})$ の主偏極付きアーベル多様体としての同型類全体の成す集合を $SS_g(p)$ で表す．主偏極付き超特殊アーベル多様体は偏極構造を忘れると E_0^g と同型なので, $SS_g(p)$ を考えることと E_0^g 上の主偏極構造のモジュライを考えることは同じである．Mass 公式から漸近挙動 $|SS_g(p)| = O(p^{\frac{g(g+1)}{2}})$ がわかる．$g=2$ の時の明示公式については [12] を参照.

$\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の主偏極付きアーベル多様体 $(A, \mathcal{L})$ に対して, 主偏極 $\mathcal{L}$ が定める同型を $\phi_{\mathcal{L}} : A \longrightarrow \widehat{A} := \mathrm{Pic}^0(A),\ x \mapsto t_x^*(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{L}^{-1}$ とする．ここで, $t_x : A \longrightarrow A,\ P \mapsto P + x$. また $\phi_{\mathcal{L}}$ を用いて各素数 $\ell \neq p$ に対して, $\mathcal{L}$ に付随する Weil pairing $\langle *, * \rangle_{\mathcal{L}} : A[\ell] \times A[\ell] \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ が定まる ([20, Section 16])．これは非退化交代形式である ($\ell = 2$ のときは交代的であることは条件 $\langle x, x \rangle_{\mathcal{L}} = 0,\ x \in A[\ell]$ によって定める)．二つの主偏極付きアーベル多様体 $(A_1, \mathcal{L}_1), (A_2, \mathcal{L}_2)$ の間の射を準同型 $f : A_1 \longrightarrow A_2$ であって, $\phi_{\mathcal{L}_1} = \widehat{f} \circ \phi_{\mathcal{L}_2} \circ f$ を満たすものとして定義する. ただし, $\widehat{f} : \mathrm{Pic}^0(A_2) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(A_1)$ は f の dual であり, 直線束の f による引き戻しによって定義される.

Definition 3.1. (1) 主偏極付きアーベル多様体の射 $f : (A_1, \mathcal{L}_1) \longrightarrow (A_2, \mathcal{L}_2)$ が $(\ell)^g$**-同種**であるとは $\mathrm{Ker}(f)$ が $A_1[\ell] \simeq (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{2g}$ の $\mathcal{L}$ に付随する Weil pairing $\langle *, * \rangle_{\mathcal{L}}$ に関する最大等方部分群でありかつ $f^*\mathcal{L}_2 \simeq \mathcal{L}_1^{\otimes \ell}$ が成立するときをいう．$A_1[\ell] \simeq (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{2g}$ の $\mathcal{L}$ に付随する Weil pairing $\langle *, * \rangle_{\mathcal{L}}$ に関する最大等方部分群は

$$N_g(\ell) := \prod_{i=1}^{g} (\ell^g + 1) \tag{3.2}$$

個あることを注意しておく.

(2) 主偏極付きアーベル多様体の同種射 $f : (A_1, \mathcal{L}_1) \longrightarrow (A_2, \mathcal{L}_2)$ が ℓ**-マーキング**であるとはある非負整数 m に対して, $f^*\mathcal{L}_2 \simeq \mathcal{L}_1^{\otimes \ell^m}$ が成り立つときを言う.

Remark 3.1. $(A_0, \mathcal{L}_0)$ を主偏極付き超特殊アーベル多様体とする．このとき, 主偏極付き超特殊アーベル多様体 $(A, \mathcal{L})$ に対して, ℓ-マーキング $\phi_A : (A_0, \mathcal{L}_0) \longrightarrow (A, \mathcal{L})$ が存在する. そのような ℓ-マーキングは $(\mathrm{End}(A_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\frac{1}{\ell}])^\times$ の差を除いて一意である.

主偏極付き超特殊アーベル多様体 $(A_0, \mathcal{L}_0)$ を固定し, 主偏極付き超特殊アーベル多様体 $(A, \mathcal{L})$ と ℓ-マーキングとの組 $(A, \mathcal{L}, \phi_A)$ の同型類全体のなす集合を $SS_g(p, \ell, A_0, \mathcal{L}_0)$ とする．ℓ-マーキングを忘れるという射は全単射 $SS_g(p, \ell, A_0, \mathcal{L}_0) \longrightarrow SS_g(p)$ を与える．さらに, 各 $SS_g(p, \ell, A_0, \mathcal{L}_0) \longrightarrow SS_g(p)$ の (代表) 元 $(A, \mathcal{L}, \phi_A)$ に対して, 必要なら ℓ-マーキングを取り換えることで, ϕ_A の核はある $n \geq 0$ に対して, $A_0[\ell^n]$ の最大等方部分群となっているとしてよい．このとき, $T_\ell(A)$ を ℓ-マーキングにより $V_\ell(A_0) = T_\ell(A_0) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ に引き戻すことで, symplectic 構造を保つ $V_\ell(A_0)$ の $\mathbb{Z}_\ell$ 格子が得られる．また, 上記 Remark 3.1 でも述べたように ℓ-マーキングによる取り換えのズレは

$$\Gamma := (\mathrm{End}(A_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\frac{1}{\ell}])^\times \tag{3.3}$$

によって与えられる．よって, 同一視 $\mathrm{Aut}(V_\ell(A_0), \langle *, * \rangle_{\mathcal{L}_0}) \simeq \mathrm{GSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$ により (Γ も右辺の部分群と同一視する), 全単射

$$SS_g(p, \ell, A_0, \mathcal{L}_0) \longrightarrow \Gamma \backslash \mathrm{GSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)/Z(\mathbb{Q}_\ell)\mathrm{GSp}_g(\mathbb{Z}_\ell) \tag{3.4}$$

を得る．ただし, $Z(\mathbb{Q}_\ell) \simeq \mathbb{Q}_\ell^\times$ は $\mathrm{GSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$ の中心である．

以上をまとめると同一視

$$SS_g(p) \longleftarrow SS_g(p, \ell, A_0, \mathcal{L}_0) \longrightarrow \Gamma \backslash \mathrm{GSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)/Z(\mathbb{Q}_\ell)\mathrm{GSp}_g(\mathbb{Z}_\ell) \tag{3.5}$$

を得たことになる．左と中央の集合には ℓ における Hecke 作用素がそれぞれ幾何的に定義される．また右の集合にも $\begin{pmatrix} 1_g & 0_g \\ 0_g & \ell \cdot 1_g \end{pmatrix}$ から定まるヘッケ作用素 T_ℓ が自然に定まり ([1, Section 2.6]), これらの作用素は同一視と整合的であることが示される ([1, Theorem 2.8]).

3.2. **3 つのグラフの比較.** 以上の準備のもと, $SS_g(\ell)$ から $(\ell)^g$-同種グラフ $Gr_g(p, \ell)$ を頂点集合を $SS_g(\ell)$, 頂点を結ぶ辺を $(\ell)^g$-同種とすることで定める．これは $N_g(\ell)$-正則有向有限グラフであり, $g \geq 2$ の場合は Jordan-Zaytman [15] によって考察された対象である．$(\ell)^g$-同種グラフ $\mathcal{G}^{SS}(p, \ell)$ は連結であり, かつ, bipartite ではないことが知られている[7].

同様に, $SS_g(p, \ell, A_0, \mathcal{L}_0)$ から ℓ-マーク付き $(\ell)^g$-同種グラフ $\mathcal{G}_g^{SS}(p, \ell)$ を頂点集合を $SS_g(\ell)$, 頂点を結ぶ辺を単に $(\ell)^g$-同種と定めるが, その際 ℓ-マーキングとの交換性の条件は Γ の差をのぞいて自明な条件となるので, 定義に課さなくても問題はない.

最後に, グラフ $\mathrm{BTQ}_g^1(p, \ell)$ を頂点集合は $\Gamma \backslash \mathrm{GSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)/Z(\mathbb{Q}_\ell)\mathrm{GSp}_g(\mathbb{Z}_\ell)$, 辺をマルコフ作用素が T_ℓ になるように定義する.

このとき 3 つのグラフは同一視 (3.5) により, 互いに同型であることがわかる ([1, Section 3])．これにより, それぞれのグラフラプラシン達が整合的である有限ヒルベルト空間の間の同型を得る．以上により, $l^2(Gr_g(p, \ell))$ および $l^2(\mathcal{G}_g^{SS}(p, \ell))$ のグラフラプラシンの第 2 固有値を解析をするためには $l^2(\mathrm{BTQ}_g^1(p, \ell))$ のそれを調べればよいことになる．ところが, Γ の等質空間 $\mathcal{S}_g$ への作用は非自明である．従って, 直接的に固有値を解析するのは困難であるため, 等質空間 $\mathcal{S}_g$ の l^2-空間に現れるユニタリ表現の固有値の評価に問題を帰着し, Property (T) や Hee Oh による Kazhdan 定数の明示的評価を適用する.

[7] この周辺の結果については [15] の Section B, p.4-5 を参照せよ．連結性について歴史的背景を伊吹山先生にご教示頂きましたこと感謝致します.

3.3. $PGSp_n$ **の Bruhat-Tits building.** この節の基本事項に関する参考文献は [11] である．$V = \mathbb{Q}_\ell^{2g}$ とし，$\langle *, * \rangle$ を $J = \begin{pmatrix} 0_g & 1_g \\ -1_g & 0_g \end{pmatrix}$ が定める V 上の非退化交代形式とする．これを V の $\mathbb{Z}_\ell$ 格子に制限したものも $\langle *, * \rangle$ で表すことにする．$PGSp_g$ に対する Bruhat-Tits building を説明するために幾つかの用語を復習する．

Definition 3.6. (1) V の $\mathbb{Z}_\ell$ 格子 Λ が primitive であるとは
$$\langle \Lambda, \Lambda \rangle \subset \mathbb{Z}_\ell$$
を満たしかつ V の非退化交代形式 $\langle *, * \rangle$ が $\Lambda/\ell\Lambda$ 上の非退化交代形式を誘導するときをいう．

(2) V の二つの $\mathbb{Z}_\ell$ 格子 Λ_1, Λ_2 が homothetic であるとはある $\alpha \in \mathbb{Q}_\ell^\times$ があって，$\Lambda_1 = \alpha\Lambda_2$ となるときをいう．$\mathbb{Z}_\ell$ 格子 Λ の homothety 類を $[\Lambda]$ で表す．

(3) $\mathbb{Z}_\ell$ 格子の homothety 類のある代表元 Λ に対し，ある primitive な $\mathbb{Z}_\ell$ 格子 Λ_0 が存在して $\ell\Lambda_0 \subset \Lambda \subset \Lambda_0$ かつ $\langle \Lambda, \Lambda \rangle \subset \ell\mathbb{Z}_\ell$ をみたすようなものを考える．そのような $\mathbb{Z}_\ell$ 格子の homothety 類全体のなす集合を $\mathbb{L}_g$ で表す．定義より，$\Lambda/\ell\Lambda_0$ は $\Lambda_0/\ell\Lambda_0$ の等方部分群となる．

(4) $[\Lambda_1], [\Lambda_2] \in \mathbb{L}_g$ が隣接関係を満たす (隣接関係にある) とは，$[\Lambda_i], i = 1, 2$ の代表元 Λ_i であって $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ または $\Lambda_2 \subset \Lambda_1$ を満たすものが存在し，かつある primitive Λ_0 に対して，
$$\ell\Lambda_0 \subset \Lambda_i \subset \Lambda_0,\ i = 1, 2$$
を満たすときをいう．

Definition 3.7. (1) Sp_g に対する Bruhat-Tits building $\mathcal{B}_g$ を頂点集合を $\mathbb{L}_g$ とするクリーク複体として定義する．つまり，複体 $\mathcal{B}_g$ は任意の 2 元が隣接関係にある部分集合 $\sigma = \{[\Lambda_0], \ldots, [\Lambda_r]\} \subset \mathbb{L}_g$ が張る r 単体が $\mathcal{B}_g$ の単体を定める．連接関係式長さは最大で g まで起こりうるので $\mathcal{B}$ の次元は g であることがわかる．

(2) $\mathcal{B}_g$ の $g+1$ 個の頂点 $[\Lambda_0], \ldots, [\Lambda_g]$ であって，Λ_0 が primitive かつ
$$\ell\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \cdots \subset \Lambda_g \subset \Lambda_0$$
を満たし，さらに $\{0\} \subset \Lambda_1/\ell\Lambda_0 \subset \cdots \subset \Lambda_g/\ell\Lambda_0 \subset \Lambda_0/\ell\Lambda_0 \simeq \mathbb{F}_\ell^g$ が maximal flag となっているものが定める単体 (最大次元もつ単体) を chamber (部屋) という．次の頂点に対する chamber $\mathcal{C}_0$ を fundamental chamber という:
$$\Lambda_0 = \ell(\mathbb{Z}_\ell^{2g}) \subset \cdots \subset \Lambda_i := \mathbb{Z}_\ell^i \oplus \ell(\mathbb{Z}_\ell^{2g-i}) \subset \cdots \subset \mathbb{Z}_\ell^{2g},\ (1 \le i \le g).$$

Definition 3.8. $[\Lambda] \in \mathbb{L}_g$ に対して，$\Lambda = g\mathbb{Z}_\ell^{2g}$ を満たす $g \in \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Q}_\ell)$ をとり，$\mathbf{lab}_g : \mathbb{L}_g \longrightarrow \mathbb{Z}/2g\mathbb{Z}$ を
$$\mathbf{lab}_g([\Lambda]) := \mathrm{ord}_\ell(\det(g)) \bmod 2g$$
と定めたものを頂点 $[\Lambda]$ のラベルという．$\det(\alpha g) = \alpha^{2g}\det(g),\ \alpha \in \mathbb{Q}_\ell^\times$ かつ $\mathrm{ord}_\ell(\det(k)) = 0,\ k \in \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}_\ell)$ なので $\mathbf{lab}_g$ は well-defined である．

Remark 3.2. (1) $\mathrm{Sp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$ は $\mathbb{L}_g$ に $\gamma[\Lambda] := [\gamma\Lambda],\ \gamma \in \mathrm{Sp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$ によって作用し，$\mathcal{B}_g$ や chamber 全体のなす集合にも作用を誘導する．$\mathrm{Sp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$ は chamber 全体のなす集合

には transitive に作用するが, $\mathbb{L}_g$ には transitive に作用しない ($\mathrm{Sp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$ の元は行列式 1 よりラベルを変えないことからわかる).

一方, chamber 全体への作用の transitivity と作用はラベルを変えないことから,

$$\mathrm{Im}(\mathbf{lab}_g) = \{g, g+1, \ldots, 2g\} \bmod 2g \tag{3.9}$$

がわかる.

(2) $\mathrm{GSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$ は上記のように線形変換によっては $\mathbb{L}_g$ には作用しない. 実際, $\Lambda_1 = \mathrm{diag}(1, \overbrace{\ell, \ldots, \ell}^{2g-1})\mathbb{Z}_\ell^{2g}$ は fundamental chamber の頂点に対応する $\mathbb{Z}_\ell$ 格子であるが, $t_\ell := \begin{pmatrix} 1_g & 0_g \\ 0_g & \ell \cdot 1_g \end{pmatrix}$ に対して, $t_w\Lambda_1 = \mathrm{diag}(1, \overbrace{\ell, \ldots, \ell}^{g-1}, \overbrace{\ell^2, \ldots, \ell^2}^{g})\mathbb{Z}_\ell^{2g}$ となり, ラベルをみると $g-1$ となるため, (3.9) から $t_w\Lambda_1 \notin \mathbb{L}_g$ がわかる.

上記の Remark 3.2 より, $\mathrm{GSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$ は $\mathcal{B}_g$ には (線形変換としては) 作用しない. また, $\mathrm{Sp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$ は $\mathcal{B}_g$ に transitive に作用しないため, 群に対して, 空間 $\mathcal{B}_g$ は大きすぎるのである. 一方, 等質空間 $\mathrm{GSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)/Z(\mathbb{Q}_\ell)\mathrm{GSp}_g(\mathbb{Z}_\ell) = \mathrm{PGSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)/\mathrm{PGSp}_g(\mathbb{Z}_\ell)$ には $\mathrm{GSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$(または PGSp_g) が自然に左から作用するため, $\mathrm{GSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$ が transitive に作用する $\mathcal{B}_g$ の部分空間であって $\mathrm{GSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)/Z(\mathbb{Q}_\ell)\mathrm{GSp}_g(\mathbb{Z}_\ell)$ と関連するものを探したい. それが special 1-complex である.

Definition 3.10. Special 1-complex $\mathcal{S}_g$ を $\mathcal{B}_g$ の 1 次元 sub-complex (1-skelton) であって頂点集合 $\mathrm{Ver}(\mathcal{S}_g)$ が

$$\mathrm{Ver}(\mathcal{S}_g) := \{[\Lambda] \in \mathbb{L}_g \mid \mathbf{lab}_g([\Lambda]) \in \{g, 2g\}\}$$

となるものとして定義する. このとき, $\mathrm{GSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$(または PGSp_g) は $\mathrm{Ver}(\mathcal{S}_g)$ に transitive に作用する. また,

$$\mathrm{Ver}(\mathcal{S}_g)^+ := \{[\Lambda] \in \mathbb{L}_g \mid \mathbf{lab}_g([\Lambda]) = 2g\} = \mathrm{Sp}_g(\mathbb{Q}_\ell)[\Lambda_0],$$

$$\mathrm{Ver}(\mathcal{S}_g)^- = \{[\Lambda] \in \mathbb{L}_g \mid \mathbf{lab}_g([\Lambda]) = g\} = \mathrm{Sp}_g(\mathbb{Q}_\ell)[t_\ell\Lambda_0]$$

が成り立つ. 特に頂点集合は

$$\mathrm{Ver}(\mathcal{S}_g) = \mathrm{Ver}(\mathcal{S}_g)^+ \coprod \mathrm{Ver}(\mathcal{S}_g)^-$$

と分解され, t_ℓ により双方は移りあうので, $\mathcal{S}_g$ は bipartite グラフである. Special 1-complex は連結グラフであることが知られている (cf. [1, Proposition 4.4]).

$\mathrm{Ver}(\mathcal{S}_g)$ の元 $[\Lambda]$ は $\Lambda = \gamma\Lambda_0,\ \gamma \in \mathrm{GSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$ と書けるため, 対応 $[\Lambda] \mapsto \gamma$ により $\mathrm{Ver}(\mathcal{S}_g)$ と $\mathrm{GSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)/Z(\mathbb{Q}_\ell)\mathrm{GSp}_g(\mathbb{Z}_\ell) = \mathrm{PGSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)/\mathrm{PGSp}_g(\mathbb{Z}_\ell)$ とは同一視される.

以上により, 等質空間 $\mathrm{GSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)/Z(\mathbb{Q}_\ell)\mathrm{GSp}_g(\mathbb{Z}_\ell) = \mathrm{PGSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)/\mathrm{PGSp}_g(\mathbb{Z}_\ell)$ に対応するグラフ $\mathcal{S}_g$ が得られたので, グラフおよびそれに付随するヒルベルト空間そしてそこに作用する $\mathrm{GSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$ または $\mathrm{PGSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$ のユニタリ表現を解析していく.

3.4. **Property (T).** 位相群 G とそのユニタリ表現 $(\pi, \mathcal{H})$ を考える．ただし, $\mathcal{H}$ は複素ヒルベルト空間とする．G の任意のコンパクト部分集合 Q に対して,

$$\kappa(G, Q, \pi) := \inf\Big\{ \max_{s \in Q} ||\pi(s)v - v|| \mid v \in \mathcal{H},\ ||v|| = 1 \Big\},$$

とし, $\kappa(G, Q) := \inf\{\kappa(G, Q, \pi) \mid \pi \in \widehat{G}\}$ とおく．ただし, $\widehat{G}$ は G のユニタリ双対である．$\kappa(G, Q)$ のことを組 (G, Q) に対する**最適 Kazhdan 定数 (the optimal Kazhdan constant)** と呼ぶ.

Definition 3.11. 位相群 G に対して, G のあるコンパクト部分群 Q が存在して $\kappa(G, Q) > 0$ を満たすとき, 「G は Property (T) をもつ」という.

Property (T) の基本性質を紹介する (cf. [3] を参照):

- G が Property (T) をもつことと, ユニタリ双対 $\widehat{G}$ において, 単位表現が Fell 位相[8]に関して孤立点であることは同値である.
- $G = \mathbb{Z}$ に離散位相を入れて位相群とみる．このとき, $\mathbb{Z}$ は Property (T) を持たない.
- 位相群の間の全射準同型 $G \longrightarrow H$ があるとき, G が Property (T) を持つなら, H も Property (T) をもつ (Property (T) は商に伝播する).
- 局所体 F 上の**階数が 2 以上**の半単純代数群 G に対して, $G(F)$ は Property (T) を持つ.
- 局所体 F 上の**階数が 1** の半単純代数群 G に対して, $G(F)$ は Property (T) を持たない．特に, $F^\times$ や $\mathrm{SL}_2(F)$ は Property (T) を持たない.
- **(大事な性質)** G が Property (T) をもつとき, G のコンパクト部分集合 Ω が半群として G 全体を生成するとき, $\kappa(G, \Omega) > 0$ が成り立つ.

$\mathrm{GSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$ に対して, その similitude character $\mathrm{GSp}_g(\mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell^\times$ と「Property (T) は商に伝播する」という性質に鑑みると, $\mathrm{GSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$ は Property (T) を持たないことがわかる．他方, $g \geq 2$ のときは PGSp_g は階数が 2 以上の半単純代数群なので Property (T) をもつ.

3.5. **ランダムウォーク作用素と $\mathcal{S}_g$ に付随するユニタリ表現.** Subsection 3.3 のグラフ $\mathcal{S}_g$ に対して,

$$l^2(\mathcal{S}_g) := \Big\{ f : \mathrm{Ver}(\mathcal{S}_g) \longrightarrow \mathbb{C} \;\Big|\; \sum_{v \in \mathrm{Ver}(\mathcal{S}_g)} |f(v)|^2 < \infty \Big\}$$

とおき, その上に内積

$$\langle f_1, f_2 \rangle := \sum_{v \in \mathrm{Ver}(\mathcal{S}_g)} f_1(v)\overline{f_2(v)},\ f_1, f_2 \in l^2(\mathcal{S}_g)$$

を定める．$G = \mathrm{PGSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$ が右移動により, $l^2(\mathcal{S}_g)$ に作用し, 明らかに内積を不変にするので, この作用に関して $l^2(\mathcal{S}_g)$ は G のユニタリ表現となる.

$K = \mathrm{PGSp}_g(\mathbb{Z}_\ell)$ とおき, $\mathrm{Sp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$ の Weyl 群の位数 2 の生成元 $\xi_i,\ 1 \leq i \leq g+1$(reflection 達) を $\mathrm{PSp}_g(\mathbb{Q}_\ell) \subset \mathrm{PGSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$ の元として実現しておく．ξ_0 を $\mathrm{PGSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$ の単位元とし,

[8] [30]

$\mathrm{PGSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$ のコンパクト集合

$$\Omega := \{k\xi_i t_\ell k',\ k(\xi_i t_\ell)^{-1}k \mid k, k' \in K,\ 0 \le i \le g+1\},\ t_\ell := \begin{pmatrix} 1_g & 0_g \\ 0_g & \ell \cdot 1_g \end{pmatrix}$$

と有限集合

$$\Omega_0 := \{\xi_i t_\ell,\ (\xi_i t_\ell)^{-1} \mid 0 \le i \le g+1\}$$

を考える．定義より, $\Omega = K\Omega_0 K$ であり, $\Omega,\ \Omega_0$ は逆元を取る操作に関して閉じている．

ここで, $G := \mathrm{PGSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$ 上の Ω をサポートに持つ確率測度 μ を以下の様に定義する．ν を G のハール測度で $\nu(K) = 1$ となるものとする．また, G 上の Ω_0 に関する一様分布測度を

$$\mathrm{Unif}_{\Omega_0} := \frac{1}{2(g+2)} \sum_{i=0}^{g+1} \sum_{i=0}^{g+1} (\delta_{\xi_i t_\ell} + \delta_{(\xi_i t_\ell)^{-1}})$$

を考える．ただし, δ_x は $x \in G$ でのディラック測度．このとき, μ を

$$\mu := \nu * \mathrm{Unif}_{\Omega_0} * \nu$$

として定義する．ただし, $*$ は測度の畳み込みであり, ふたつの測度 μ_1, μ_2 と μ-可測集合 A に対して, $\mu_1 * \mu_2(A) = (\mu_1 \times \mu_2)(\{(a_1, a_2) \in G \times G \mid a_1 a_2 \in A\})$ と定める．測度 μ は右 K 不変なので, $\mathcal{S}_g = \mathrm{PGSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)/K$ 上の測度を誘導しそれを再び μ で表す．このとき, $l^2(\mathcal{S}_g)$ に作用素を

$$\mathcal{A}_\mu : l^2(\mathcal{S}_g) \longrightarrow l^2(\mathcal{S}_g), f \mapsto \left[h \mapsto \int_G f(h\gamma) d\mu(\gamma)\right]$$

と定めるとこれは自己共役作用素となる．また, (3.3) の離散群 Γ に対して, この作用素は Γ 同変であることがわかり, 有限ヒルベルト空間 $l^2(\Gamma\backslash\mathcal{S}_g)$ 上の正規化されたマルコフ作用素 $\mathcal{A}_{\Gamma,\mu}$ と一致することがわかる ([1, Section 5])．また, $l^2(\Gamma\backslash\mathcal{S}_g) = l^2(\mathrm{BTQ}_g^1(p,\ell))$ における定数関数全体の成す直交補空間を $l_0^2(\Gamma\backslash\mathcal{S}_g)$ とすると, ここには $G = \mathrm{PGSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$ が右移動により作用し, $l_0^2(\Gamma\backslash\mathcal{S}_g)$ は G のユニタリ表現となる．これを $(\pi_0, l_0^2(\Gamma\backslash\mathcal{S}_g)) \in \widehat{G}$ と記す．一方, $l^2(\Gamma\backslash\mathcal{S}_g)$ のグラフラプラシンは $\Lambda_{\Gamma,\mu} := \mathrm{id} - \mathcal{A}_{\Gamma,\mu}$ であり, これの第二固有値を $\lambda_2(\Lambda_{\Gamma,\mu})$ とするとき, 任意の $f \in l_0^2(\Gamma\backslash\mathcal{S}_g),\ ||f|| = 1$ に対して,

$$\langle \Lambda_{\Gamma,\mu} f, f\rangle \ge \frac{1}{4(g+2)} \sum_{\gamma\in\Omega_0} ||\pi_0(\gamma)f - f||^2 \ge \frac{1}{4(g+2)} \max_{\gamma\in\Omega_0} ||\pi_0(\gamma)f - f||^2$$

$$\ge \frac{1}{4(g+2)} \kappa(G, \Omega, \pi_0)^2 \ge c_g := \frac{1}{4(g+2)} \kappa(G, \Omega)^2$$

が成立するので,

$$\lambda_2(\Lambda_{\Gamma,\mu}) \ge c_g$$

を得る．Ω は半群として $\mathrm{PGSp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$ を生成するので, Property (T) の性質から $\kappa(G, \Omega) > 0$, よって, $c_g > 0$ を得る．これによりスペクトラルギャップの定性的な下からの評価を得た

ことになる. また, Hee Oh の結果 ([22, Theorem 8.4]) を $\mathrm{Sp}_g(\mathbb{Q}_\ell)$ に適用し, 若干の議論により,

$$\kappa(G,\Omega) \geq \frac{\ell-1}{2(\ell-1)+3\sqrt{2\ell(\ell+1)}}$$

となることが分かるので, 次の主結果を得る:

Theorem 3.3. ([1, Theorem 1.1])

$$\begin{aligned}\lambda_2(Gr_g(p,\ell)) = \lambda_2(\mathcal{G}_g^{SS}(p,\ell)) = \lambda_2(\mathrm{BTQ}_g^1(p,\ell)) \\ = \lambda_2(\Lambda_{\Gamma,\mu}) \geq \frac{1}{4(g+2)}\Big(\frac{\ell-1}{2(\ell-1)+3\sqrt{2\ell(\ell+1)}}\Big)^2\end{aligned}$$

4. 保型形式 (表現) 論からの SPECULATION

本節の内容は [1] の published 版では紙数の都合により削除されたが Arxiv 版には残っているのそちらの 6 節を参照されたい. 以下, $\mathbb{A}$ を $\mathbb{Q}$ のアデール環とし, $\mathbb{A}_f$ をその有限部分とする.

4.1. **強近似定理と代数的保型形式.** 2.4 節の p,∞ で分岐する四元数体 D の極大整環 $\mathcal{O}$ を用いて定まる GSp_n の内部形式 $G_g = GUSp_g$ を考える ([1, Section 2.3] を参照). また, principal genus に属する $\mathcal{O}$-格子 $\mathcal{O}^g$(cf. [14, Section 2.1]) の $G_g(\mathbb{A}_f)$ における stabilizer を $K(\mathcal{O}^g)$ とすると, 強近似定理より

$$\begin{aligned} G_g(\mathbb{Q})\backslash G_g(\mathbb{A}_f)/K(\mathcal{O}^g) &\simeq G_g(\mathbb{Q})\backslash (G_g(\mathbb{Q})(K(\mathcal{O}^g)^{(\ell)}\times G_g(\mathbb{Q}_\ell)))/K(\mathcal{O}^g) \\ &= G_g(\mathbb{Z}[1/\ell])\backslash GSp_g(\mathbb{Q}_\ell)/Z(\mathbb{Q}_\ell)GSp_g(\mathbb{Z}_\ell) \\ &\simeq \Gamma\backslash \mathrm{Ver}(\mathcal{S}_g)\end{aligned}$$

を得る. これより, $l^2(\Gamma\backslash\mathcal{S}_g)$ は $G_g(\mathbb{A})$ 上の重さ 0, レベルが $K(\mathcal{O}^g)$ である代数的保型形式のなす空間 $M_0(K(\mathcal{O}^g))$ と同一視さる. $M_0(K(\mathcal{O}^g))$ 上の $t_\ell := \begin{pmatrix}1_g & 0_g \\ 0_g & \ell\cdot 1_g\end{pmatrix}$ に付随する Hecke 作用素 T_ℓ を考えと, $l^2(\Gamma\backslash\mathcal{S}_g)$ のグラフラプラシアンは $M_0(K(\mathcal{O}^g))$ 上の作用素 $\mathrm{id}-\frac{T_\ell}{N_g(\ell)}$ に対応する. よって, グラフラプラシアンの第二固有値の解析は T_ℓ の固有値の解析に帰着される.

4.2. **Jacquet-Langlands 対応と Arthur の保型形式の分類.** $M_0(K(\mathcal{O}^g))$ の Hecke 同時固有関数は次数 g の重さが $g+1$, レベルが p の外不分岐である Hecke 同時固有正則ジーゲル保型形式と Hecke 作用素の固有値が保存されるように対応するであろうと期待されている. また重さが $g+1$ である Hecke 同時固有正則ジーゲル保型形式は Arthur の分類を用いれば記述は可能である. Hecke 作用素 T_ℓ の固有値は表現の佐武パラメーターで記述され, これは Arthur の分類を用いて解析されることが期待できる.

上記の期待される対応については $g=1$ の場合は Jacquet-Langlands 対応でありすでに確立されている. $g=2$ の場合は伊吹山氏による次元公式の計算に基づいた, 対応するジーゲル保型形式のレベルの特定も含めた, 精密な予想がある ([13, Conjecture 3.3]). しかし, principal genus に属する格子に対するレベルに対しては, Jacquet-Langlands 対応に必要な

trace formula に関する種々の量の計算が難しく, Jacquet-Langlands 対応を確立しようとすると保型形式そのものに, (少なくとも現時点での技術では) 強い条件を課さなければならず本稿の目的には有用な設定ではない. 最近, Rösner と Weissauer が [26] において Jacquet-Langlands 対応を証明したが, endoscopic や CAP 形式を除いている上に weak transfer であるため我々の目的には適わない. 他方, van Hoften ([32]) によって non-princiapl genus に属す格子から定まるコンパクト群をレベルに持つ $GUSp_2(\mathbb{A})$ 上の代数的保型形式と $\mathrm{GSp}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式でパラモジュラーレベルを持つものとの間の Jacquet-Langlands 対応が確立されたが, これは我々の設定とは違うことに注意しておく. しかし, この場合でも超特殊アーベル多様体のモジュライ空間の代わりに別のモジュライ空間を考えればこの設定に合う同種グラフが構成できる. これについては後述する.

4.3. **Speculation (not being Ramanujan is not necessary fared).** [15] では幾つかの同種グラフのグラフラプラシアンの固有値を計算機を用いて計算し, Ramanujan bound を満たしていないことを観測している. しかし, 保型形式の専門家にとってはこのような現象が起こり得ることは既知であり, CAP 形式 (Saito-Kurokawa lifts や Ikeda lifts などがその一例) が存在するためである. しかし, 保型形式をレベルや重さで族とみるときその中では CAP 形式たちの占める割合は少ないことが期待される. 実際 $GSp_2 \subset GL_4$ の場合, その期待が正しいことが [16] で示されてる.[9]

それを受けて以下を期待するのは自然である. まず, $\{X_i\}_{i\in I}$ を d-正則グラフの族とし, I は順序集合であって $\lim_{i\to\infty}|X_i| = \infty$ を満たすものとする. また, $\lambda^{\mathrm{abs}}_{\mathrm{mean}}(X_i)$ を X_i の隣接行列 (我々の設定の T_ℓ に対応) の固有値の絶対値の平均とする. ある素数 ℓ, 代数群 $G/\mathbb{Z}$ と離散群 $\Gamma_i \subset G(\mathbb{Z})$ が存在して, 各 $i \in I$ に対して X_i の頂点集合は $\Gamma_i\backslash G(\mathbb{Q}_\ell)/Z_G(\mathbb{Q}_\ell)G(\mathbb{Z}_\ell)$ と同一視され, マルコフ作用の d 倍が ℓ での Hecke 作用素と一致するものとする. この時次の概念を導入する.

Definition 4.1. 族 $\{X_i\}_{i\in I}$ が asymptotically relatively Ramanujan であるとは

$$\limsup_{i\to\infty} \lambda^{\mathrm{abs}}_{\mathrm{mean}}(X_i) \le \rho(\mathcal{B}^1(G^{\mathrm{der}}))$$

を満たす時をいう. ただし, $\mathcal{B}^1(G^{\mathrm{der}})$ は G^{der} の Bruhat-Tits building の 1-skelton の部分グラフであって, G が推移的に作用するものとする. また, $\rho(\mathcal{B}^1(G^{\mathrm{der}}))$ はそのスペクトル半径を表す.

我々の設定で記述すると, ℓ を固定し $p \neq \ell$ に関する族 $\{Gr_g(p,\ell)\}_{p\neq\ell}$ と考えていることになる. また, $G = GSp_g$, $G^{\mathrm{der}} = Sp_g$ であり, $\mathcal{B}^1(Sp_g) = \mathcal{S}_g$ のスペクトル半径は $\rho(\mathcal{S}_g) = 2^g\ell^{\frac{g(g+1)}{4}}$ となることが Setyadi によって計算されている ([27, Proposition 2.6]). これより, 次が期待される:

Conjecture 4.1. $d_{g,p} := \mathrm{dim} M_0(K(\mathcal{O}^g))$ とおく. このとき, 各素数 ℓ と族 $\{Gr_g(p,\ell)\}_{p\neq\ell}$ に対して, 次が成り立つ*:*

$$\limsup_{p\to\infty} \lambda^{\mathrm{abs}}_{\mathrm{mean}}(Gr_g(p,\ell)) \le \rho(\mathcal{S}_g) = 2^g\ell^{\frac{g(g+1)}{4}}.$$

[9]ただしレベル側面に関しては主合同部分群を採用しているためそのまま結果が適用できるというわけではなく, 状況証拠としてそういう結果があるということを理解されたい.

この予想は重さ $g+1$ の non-CAP Hecke 固有正則ジーゲル尖形式の ℓ での佐武パラメーター (cf. [31, Section 19]) の評価と整合的であることに注意しておく[10].

5. 今後の展望と進行中の研究について

以下の研究が進行中である.

(1) 族 $\{Gr_g(p,\ell)\}_{p\neq\ell}$ の cut off 現象の解析.

(2) non-principal genus に対する同種グラフとその固有値の解析.

(1) は lazy 版ランダムウォーク (コイン投げして確率 $\frac{1}{2}$ でランダムウォーク) を任意の頂点からスタートして何回行えば点がグラフ全体に一様分布するかという問題である. ある回数から先に行くと一気に定常状態に近づく速さが一定になりその見極めが cut off 現象の研究となる. Sarnak-Xu の密度予想とも関係しているが設定は異なる. また関連して保型表現の行列係数の明示的評価なども必要となり様々な数学が交わる分野である. Sarnak Xu 予想関連の文献は [9] を参照.

(2) は桂 利行先生 (東京大学) との共同研究である. 超特殊アーベル多様体にあるレベル構造を導入すると, non-principal genus に付随する格子と関係がつく. これは supersingular locus の既約成分と集合として 1 対 1 であるが, 我々の対象は付加構造付き超特殊アーベル多様体であり, モジュライそのものが異なる. この設定だと van Hoften の結果が適用でき, $g=1$ の場合と同様に次数 2, 重さ 3, パラモジュラーレベル p のジーゲル尖点保型形式を用いた詳細な解析が可能である.

6. 謝辞

講演の機会を与えてくださいましたオーガナイザーの青木 宏樹 氏および 並川 健一 氏に感謝申し上げます. また, 講演後興味をもって質問をくださった, 桂田 英典先生, 杉山 真吾氏, 都築 正男氏に感謝申し上げます.

References

[1] Y. Aikawa, R. Tanaka, and T. Yamauchi, Isogeny graphs on superspecial abelian varieties: eigenvalues and connection to Bruhat–Tits buildings, Canad. J. Math. 2023, pp. 1–26.

[2] J. Arthur, The endoscopic classification of representations. Orthogonal and symplectic groups. American Mathematical Society Colloquium Publications, 2013.

[3] B. Bekka, P. de la Harpe, and A. Valette. *Kazhdan's Property (T)*, volume 11 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[4] D-X. Charles, K. Lauter, and E-Z. Goren, Cryptographic hash functions from expander graphs. J. Cryptology 22 (2009), no. 1, 93-113.

[5] R-F. Coleman and B. Edixhoven, On the semi-simplicity of the U_p-operator on modular forms. Math. Ann. 310 (1998), no. 1, 119–127.

[6] M. Deuring, Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper. Abh. Math. Sem. Hansischen Univ. 14 (1941), 197–272.

[7] 土井 公二 三宅 敏恒, 保型形式と整数論, 紀伊国屋数学叢書 7, 紀伊国屋書店, 1976.

[10] 予想に現れる量 $2^g\ell^{\frac{g(g+1)}{4}}$ の意味は次の通り. 先ず, 2^g は最小 K-type ($K=U(g)$) が $\det^{g+1}$ である $\mathrm{Sp}_g(\mathbb{R})$ の正則離散系列表現の L-packet の濃度. $\ell^{\frac{g(g+1)}{4}}$ の指数はジーゲル多様体の次元が $\frac{g(g+1)}{2}$ なのでその中間次数エタールコホモロジーの純重さ $\frac{g(g+1)}{4}$ に他ならない.

[8] M. Eichler, The basis problem for modular forms and the traces of the Hecke operators. Modular functions of one variable, I, pp. 75–151, Lecture Notes in Math., Vol. 320, 1973.
[9] S. Evra, M. Gerbelli-Gauthier, H.P.A. Gustafsson, The Cohomological Sarnak-Xue Density Hypothesis for SO_5, arXiv.2309.12413.
[10] E. Florit and B. Smith, Automorphisms and Isogeny Graphs of Abelian Varieties, with Applications to the Superspecial Richelot Isogeny Graph. In Arithmetic, Geometry, Cryptography, and Coding Theory 2021, 779:103-32.
[11] P. Garrett, *Buildings and classical groups.* Chapman & Hall, London, 1997. xii+373 pp.
[12] K. Hashimoto and T. Ibukiyama, On class numbers of positive definite binary quaternion Hermitian forms. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 27 (1980), no. 3, 549–601.
[13] T. Ibukiyama, Conjectures on correspondence of symplectic modular forms of middle parahoric type and Ihara lifts. Res. Math. Sci. 5 (2018), no. 2, Paper No. 18, 36 pp.
[14] T. Ibukiyama, T. Katsura, and F. Oort, Supersingular curves of genus two and class numbers. Compositio Math. 57 (1986), no. 2, 127-152.
[15] B-W. Jordan and Y. Zaytman, Isogeny graphs of superspecial abelian varieties and Brandt matrices, arXiv:2005.09031 [math.NT].
[16] H. H. Kim, S. Wakatsuki, and T. Yamauchi, An equidistribution theorem for holomorphic Siegel modular forms for GSp_4 and its applications. J. Inst. Math. Jussieu 19 (2020), no. 2, 351–419.
[17] A. Kurihara, On some examples of equations defining Shimura curves and the Mumford uniformization. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 25 (1979), no. 3, 277–300.
[18] K-Z. Li, and F. Oort, Moduli of supersingular abelian varieties. Lecture Notes in Mathematics, 1680. Springer-Verlag, Berlin, 1998. iv+116 pp.
[19] A. Lubotzky, R. Phillips, and P. Sarnak, Ramanujan graphs. Combinatorica 8 (1988), no. 3, 261-277.
[20] J-S. Milne, Abelian varieties. Arithmetic geometry, 103–150, Springer, New York, 1986.
[21] D. Mumford, Abelian varieties. Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, 1970.
[22] H. Oh, Uniform pointwise bounds for matrix coefficients of unitary representations and applications to Kazhdan constants. Duke Math. J. 113 (2002), no. 1, 133-192.
[23] A-K. Pizer, An algorithm for computing modular forms on $\Gamma_0(N)$. J. Algebra 64 (1980), no. 2, 340-390.
[24] A-K. Pizer, Ramanujan graphs and Hecke operators. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 23 (1990), no. 1, 127-137.
[25] A-K. Pizer, Ramanujan graphs. Computational perspectives on number theory (Chicago, IL, 1995), 159–178, AMS/IP Stud. Adv. Math., 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
[26] M. Rösner and R. Weissauer, Global liftings between inner forms of $GSp(4)$. J. Number Theory 263 (2024), 79–138.
[27] A. Setyadi, Expanders and the affine building of Sp_n. Ars Combin. 109 (2013), 497-510.
[28] G. Shimura, Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Iwanami Shoten Publishers, Tokyo; Princeton University Press, Princeton, NJ, 1971. xiv+267 pp.
[29] J-H. Silverman, The arithmetic of elliptic curves. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 106. Springer, Dordrecht, 2009. xx+513 pp.
[30] 辰馬 伸彦, 位相群の双対定理 (紀伊國屋数学叢書 32).
[31] G. van der Geer, Siegel modular forms and their applications. The 1-2-3 of modular forms, 181–245, Universitext, Springer, Berlin, 2008.
[32] P. van Hoften, A geometric Jacquet-Langlands correspondence for paramodular Siegel threefolds. Math. Z. 299 (2021), no. 3-4, 2029–2061.

山内卓也
東北大学大学院 理学研究科
e-mail: yamauchi@math.tohoku.ac.jp