On the formula for the norms of Miyawaki lifts

国立台湾大学　伊藤　望
Nozomi Ito
National Taiwan University

1　序

本ノートは, プレプリント [9] の概説である.

Ikeda は [8] で, Ikeda リフト [7] の対角制限を核関数に用いたリフティングを導入した. このリフティングは Miyawaki が [13] で存在を予想したリフティングの実現を目指したものであり, Miyawaki リフトと呼ばれている. Ikeda は Miyawaki リフトが非消滅であるという仮定の下, Miyawaki リフトこそが Miyawaki の予想したリフティング（の一般化）であることを示した. しかし肝心の Miyawaki リフトの非消滅性については一般には (cf. [3], [11]) まだ分かっていない.

今日, Arthur 分類 [1] によって Miyawaki が予想したリフティングは一意的に存在することが分かっている ([2]). しかしながら, Miyawaki リフトの非消滅性を示し, Miyawaki が予想したリフティングの具体的実現が Miyawaki リフトであることを示すことには依然として意味があると言えるだろう.

Miyawaki リフトの非消滅性を調べる最も素朴な方法は, Miyawaki リフトのノルムの非消滅性を調べることである. Ikeda は [8] の中で, 数値計算に基づき Miyawaki リフトのノルムが満たす公式を予想している. それは L 関数の特殊値を用いて記述されるが, その意味するところは一見して不明に思われ, ただ降って湧いたように見える.

[9] はその謎めいた公式に一つの解釈を与える. 具体的に言うと, この公式は他の周期公式（例えば Ichino-Ikeda の精密化 Gan-Gross-Prasad 予想 [6]) と同じように, 良い素点に関する部分 L 関数の特殊値と悪い素点に関する局所積分（と大域 A パラメータに関係すると期待される項）の積の形に書き直すことができる. 証明には Ginzburg-Soudry の double descent [5] の局所的な結果が用いられ, このことは将来, double descent が公式証明の要となることを強く示唆する.

2　Miyawaki リフト

まずは [8] の内容を（[2] と組み合わせて）adelic な設定の下で概観する.

$k \in \mathbb{Z}_{>0}$ とし, $\sigma = \otimes_v \sigma_v$ を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約カスプ表現で

- 中心指標が自明,
- σ_p が任意の素数 p について不分岐,
- $\sigma_\infty|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ がウエイト $\pm 2k$ の（反）正則離散系列表現の直和

となるものとする．このとき Arthur 分類から, $k+m\in 2\mathbb{Z}$ なる $m\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $\mathrm{Sp}_{4m}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約カスプ表現 $\Sigma^m=\otimes_v\Sigma_v^m$ で,

- 大域 A パラメータが $\sigma[2m]\boxplus 1$ ($\sigma[2m]$ は σ と $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の $2m$ 次元既約代数的表現とのテンソル積表現を表す）,
- Σ_p^m が任意の素数 p について不分岐,
- Σ_∞^m がウエイト $k+m$ のスカラー型正則離散系列表現

となるものが一意的に存在する．このとき Σ^m の, $\prod_p \mathrm{Sp}_{4m}(\mathbb{Z}_p)$-不変で無限素点成分が Σ_∞^m の最小 $\mathrm{U}(2m)$-タイプの元であるようなベクトルをとると, これは Ikeda リフト（の adele 化）の定数倍に一致する．

続いて, $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $r\in\mathbb{Z}_{>0}$ を $k+n+r\in 2\mathbb{Z}$ を満たすものとし, $\pi=\otimes_v\pi_v$ を $\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約カスプ表現で

- π_p が任意の素数 p について不分岐,
- π_∞ がウエイト $k+n+r$ のスカラー型正則離散系列表現

となるものとし, π の大域 A パラメータを ψ_π と書く．このとき Arthur 分類から, $\mathrm{Sp}_{4n+2r}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約カスプ表現 $\Sigma^{n,\pi}=\otimes_v\Sigma_v^{n,\pi}$ で,

- 大域 A パラメータが $\sigma[2n]\boxplus\psi_\pi$,
- $\Sigma_p^{n,\pi}$ が任意の素数 p について不分岐,
- $\Sigma_\infty^{n,\pi}$ がウエイト $k+n+r$ のスカラー型正則離散系列表現

となるものが一意的に存在する．

$\mathbf{F}\in\Sigma^{n+r}$ を, $\prod_p \mathrm{Sp}_{4n+4r}(\mathbb{Z}_p)$-不変で無限素点成分が最小 $\mathrm{U}(2n+2r)$-タイプの元であるような非 0 ベクトルとする．$\mathbf{g}\in\pi$, $\mathbf{h}\in\Sigma^{n,\pi}$ も同様にとる．そして, $\mathrm{Sp}_{4n+2r}(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{Sp}_{4n+2r}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ 上の関数 $\mathbf{F_g}$ を,

$$\mathbf{F_g}(g)=\int_{\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})}\mathbf{F}|_{\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})\times\mathrm{Sp}_{4n+2r}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})}(h,g)\overline{\mathbf{g}(h)}dh$$

で定める（dh は Tamagawa 測度）．このとき, Ikeda は次のことを示した．

定理 1 ([8, Theorem 1.1])**.** *$\mathbf{F_g}$ は $\mathbf{h}$ の定数倍である．*

以後, Tamagawa 測度に関する L^2 内積を（群を問わず）$(-,-)$ と書く．簡単のため, 以後 $\mathbf{F}$ 及び $\mathbf{g}$ は $(-,-)$ によるノルムが 1 になるように正規化されているものとする．このとき, Ikeda は次の公式を予想した．

予想 2 ([8, Conjecture 5.1])**.** *$n=0$ のとき $c=1$, $n>0$ のとき $c=0$ とする．このとき,*

$$(\mathbf{F_g},\mathbf{F_g})=2^{-(r^2-r+2rn+c)}\frac{\Delta_{\mathrm{Sp}_{4n+4r}}}{\Delta_{\mathrm{Sp}_{2r}}\Delta_{\mathrm{Sp}_{4n+2r}}}\frac{L(n+1/2,\psi_\pi\times\sigma)}{L(n+r+1/2,\sigma)\prod_{i=1}^r L(2n+2i-1,\sigma,\mathrm{Sym}^2)\xi(2n+2i)}$$

が成り立つ．ただし, $\Delta_{\mathrm{Sp}_{2d}}:=\xi(2)\xi(4)\dots\xi(2d)$ ($\xi(s)$ は完備ゼータ関数).

注意 3. この公式は, Ikeda のオリジナルの公式を Katsurada-Kawamura による Ikeda リフトのノルム公式 [10] で割り, その結果を adelize したものである.

$\mathcal{L}(s)$ を

$$\mathcal{L}(s)=\frac{\xi(s+2)\xi(s+4)\dots\xi(s+4n+4r)}{\xi(s+2)\xi(s+4)\dots\xi(s+2r)\times\xi(s+2)\xi(s+4)\dots\xi(s+4n+2r)}$$
$$\times\frac{L(s+n+1/2,\psi_\pi\times\sigma)}{L(s+n+r+1/2,\sigma)\prod_{i=1}^{r}L(s+2n+2i-1,\sigma,\mathrm{Sym}^2)\xi(s+2n+2i)}$$

と定義し, $\mathcal{L}(s)=\prod_v\mathcal{L}_v(s)$ を $\mathrm{Re}s\gg 0$ における Euler 積表示とする. そして $\mathcal{L}=\mathcal{L}(0),\mathcal{L}_v=\mathcal{L}_v(0)$ とし, $\mathbb{Q}$ の素点の有限集合 S に対して $\mathcal{L}^S=\mathcal{L}\prod_{v\in S}\mathcal{L}_v^{-1}$ とする.

3 局所積分

局所積分を導入し, 主定理を述べる.

ユニタリ表現の内積を（表現を問わず）いつも $(-,-)$ と書き, $\mathbf{F}=\otimes_v\mathbf{F}_v$ を $(\mathbf{F}_v,\mathbf{F}_v)=1$ となる factorization とする. $\mathbf{g}=\otimes_v\mathbf{g}_v$ も同様にする. そして I_v を $(\Sigma_v^{n+r}(-)\mathbf{F}_v,\mathbf{F}_v)|_{\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{Q}_v)}$ と $(\pi_v(-)\mathbf{g}_v,\mathbf{g}_v)$ の「内積」, つまり

$$I_v=\int_{\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{Q}_v)}(\Sigma_v^{n+r}(g_v)\mathbf{F}_v,\mathbf{F}_v)\overline{(\pi_v(g_v)\mathbf{g}_v,\mathbf{g}_v)}dg_v$$

と, 収束する限り定義する. ただしここで dg_v は,

$$\mathrm{vol}(\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{R}),dg_\infty)=\zeta(2)\zeta(4)\dots\zeta(2r),$$
$$\mathrm{vol}(\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{Z}_p),dg_p)=(\Delta_{\mathrm{Sp}_{2r}})_p^{-1}(=\zeta_p(2)^{-1}\zeta_p(4)^{-1}\dots\zeta_p(2r)^{-1})\ (p<\infty)$$

なる測度とする（このとき, $\prod_v dg_v$ は $\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の Tamagawa 測度）.

以上の設定の下, 次を示した.

定理 4 ([9, Theorem 3.2]). 等式

$$I_\infty=2^{-(r^2-r+2rn)}\mathcal{L}_\infty$$

が成り立つ. また, $p<\infty$ について, π_p が緩増加ならば I_p を定義する積分は絶対収束し,

$$I_p=\mathcal{L}_p$$

である. 特に予想 2 の等式は, π が緩増加という仮定の下, ∞ を含むような $\mathbb{Q}$ の素点の有限集合 S に対して

$$(\mathbf{F_g},\mathbf{F_g})=2^{-c}\mathcal{L}^S\prod_{v\in S}I_v$$

と書ける.

4　証明の概略

証明の概略を述べる．$v=\infty$ とそれ以外では証明は大幅に異なる．

4.1　$v=\infty$ について

定義から $(\Sigma_\infty^{n+r}(-)\mathbf{F}_\infty,\mathbf{F}_\infty)|_{\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{R})}=(\pi_\infty(-)\mathbf{g}_\infty,\mathbf{g}_\infty)$ は殆ど明らかである．それゆえ，I_∞ は π_∞ の dg_∞ に関する形式次数 $\deg(\pi_\infty,dg_\infty)$ の逆数になる．この値は良く知られている ([12, Proposition A.1], [14, (148)] 参照).

4.2　$v=p<\infty$ について

記号をいくつか導入する．

- $\mathbb{Q}_p^\times$ の正規化された絶対値を $|\cdot|_p$ と書く．
- μ_i を $\mathrm{GL}_{m_i}(\mathbb{Q}_p)$ の表現としたとき $(i=1,2)$, $P=\{\begin{pmatrix} g_1 & * \\ & g_2 \end{pmatrix}\mid g_i\in\mathrm{GL}_{m_i}(\mathbb{Q}_p)\}$ として，

  $$\mu_1\times\mu_2=\mathrm{Ind}_P^{\mathrm{GL}_{m_1+m_2}(\mathbb{Q}_p)}\mu_1\boxtimes\mu_2$$

  と定める（Ind は正規化された誘導表現を意味する）．

  $$(\mu_1\times\mu_2)\times\mu_3\simeq\mu_1\times(\mu_2\times\mu_3)$$

  であるため, 3 つ以上の表現のテンソル積の誘導表現を考えるとき括弧は省略する．
- μ を $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}_p)$ の表現, η を $\mathrm{Sp}_{2l}(\mathbb{Q}_p)$ の表現としたとき，

  $$Q=\{\begin{pmatrix} g & * & * \\ & h & * \\ & & * \end{pmatrix}\in\mathrm{Sp}_{2m+2l}(\mathbb{Q}_p)\mid g\in\mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}_p),\ h\in\mathrm{Sp}_{2l}(\mathbb{Q}_p)\}$$

  として，

  $$\mu\rtimes\eta=\mathrm{Ind}_Q^{\mathrm{Sp}_{2m+2l}(\mathbb{Q}_p)}\mu\boxtimes\eta$$

  と定める（注意：本ノートにおける symplectic group Sp_{2m} を定義する交代行列は常に $\begin{pmatrix} & J_m \\ -J_m & \end{pmatrix}$ である（$J_m=\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$)).

  $$(\mu_1\times\mu_2)\rtimes\eta\simeq\mu_1\times(\mu_2\rtimes\eta)$$

  であるため, こちらも適宜括弧は省略する．

以後の便宜のため, σ_p を $\mathbb{Q}_p^\times$ の不分岐ユニタリ指標 χ を用いて $\sigma_p=\chi\times\chi^{-1}$ と書いておく．また, $\mathrm{Sp}(\sigma_p,m)=\chi(\det_m)\times\chi^{-1}(\det_m)$ と定義する（Speh 表現）．

4.2.1 不分岐 doble descent

証明に向け, まずは局所的な double descent の結果を用意する.

ψ_p を $\mathbb{Q}_p$ の order 0 の加法的指標とする. $U = \{\begin{pmatrix} 1_{2m} & * & * \\ & 1_{4m} & * \\ & & 1_{2m} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{4m}(\mathbb{Q}_p)\}$ とし, U の指標 ψ_U を

$$\psi_U(\begin{pmatrix} 1_{2m} & X & * \\ & 1_{4m} & * \\ & & 1_{2m} \end{pmatrix}) = \psi(\mathrm{Tr}X \begin{pmatrix} 1_m & 0_m \\ 0_m & 0_m \\ 0_m & 0_m \\ 0_m & 1_m \end{pmatrix})$$

で定める. また, $(g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, h) \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{Q}_p)$ を $\begin{pmatrix} g & & & & \\ & a & & b & \\ & & \iota h \iota^{-1} & & \\ & c & & d & \\ & & & & * \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{8m}(\mathbb{Q}_p)$ $(\iota = \begin{pmatrix} & 1_m \\ 1_m & \end{pmatrix})$ と同一視する. このとき, $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{Q}_p)$ は ψ_U を stablize するので, 捻り付き Jacquet 加群 $J_{\psi_U^{-1}}$ は $\mathrm{Sp}_{8m}(\mathbb{Q}_p)$ の表現を $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{Q}_p)$ の表現へ送る.

以上の設定の下, 次が成り立つ.

命題 5 ([5, Theorem 12.3])**.** $\mathrm{Sp}_{8m}(\mathbb{Q}_p)$ の不分岐表現 ρ_m^0 を,

$$\rho_m^0 = \chi(\det{}_{3m}) \times \chi(\det{}_m) \rtimes 1_{\mathrm{Sp}_0}$$

と定める. このとき,

$$J_{\psi_U^{-1}}(\rho_m^0) \simeq (\chi(\det{}_m) \rtimes 1_{\mathrm{Sp}_0}) \boxtimes (\chi(\det{}_m) \rtimes 1_{\mathrm{Sp}_0})$$

である.

この命題は次のように用いる：まず,

$$\Sigma_p^{n+r} \simeq \chi(\det{}_{2n+2r}) \rtimes 1_{\mathrm{Sp}_0} \simeq (\chi(\det{}_{2n+2r}) \rtimes 1_{\mathrm{Sp}_0})^\vee$$

($^\vee$ は反傾表現を意味する）であることに注意する. ρ_{2n+2r}^0 は $\mathrm{Sp}(\sigma_p, 4n+4r)|\det|_p^{-n-r} \rtimes 1_{\mathrm{Sp}_0}$ の部分表現である. そこで, 線型写像

$$L : \mathrm{Sp}(\sigma_p, 4n+4r)|\det|_p^{-n-r} \rtimes 1_{\mathrm{Sp}_0} \to \mathbb{C}$$

で, $J_{\psi_U^{-1}}(\mathrm{Sp}(\sigma_p, 4n+4r)|\det|_p^{-n-r} \rtimes 1_{\mathrm{Sp}_0})$ を経由し, かつ $\Delta\mathrm{Sp}_{4n+4r}(\mathbb{Q}_p)$-不変なものがあれば ($\Delta\mathrm{Sp}_{4n+4r}(\mathbb{Q}_p)$ は $\mathrm{Sp}_{4n+4r}(\mathbb{Q}_p)$ の $\mathrm{Sp}_{4n+4r}(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{Sp}_{4n+4r}(\mathbb{Q}_p)$ への対角埋め込み）, $\mathrm{Sp}(\sigma_p, 4n+4r)|\det|_p^{-n-r} \rtimes 1_{\mathrm{Sp}_0}$ の不分岐ベクトル ϕ に対して $L(\phi(\cdot(-,1)))$ は, 定数倍を除き $(\Sigma_p^{n+r}(-)\mathbf{F}_p, \mathbf{F}_p)$ に一致する.

4.2.2 Twisted doubling zeta

上に述べた写像を実現するため, (局所)twisted doubling zeta [4] を考える.

$\psi_p \circ \mathrm{tr}$ を $V_m = \{\begin{pmatrix} 1_m & * \\ & 1_m \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{Q}_p)\} \simeq \mathrm{Mat}_m(\mathbb{Q}_p)$ の指標とみなすと, $\mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{Q}_p)$-同変な埋め込み $\mathrm{Sp}(\sigma_p, m) \hookrightarrow \mathrm{Ind}_{V_m}^{\mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{Q}_p)} \psi_p \circ \mathrm{tr}$ は定数倍を除いて一意的. そこでこの埋め込みの像を $\mathcal{W}_{\mathrm{Sh}}(\mathrm{Sp}(\sigma_p, m))$ と書く（Shalika モデル）.

各 $s \in \mathbb{C}$ に対し $\phi_s \in \mathcal{W}_{\mathrm{Sh}}(\mathrm{Sp}(\sigma_p, 2m))|\det|_p^s \rtimes 1_{\mathrm{Sp}_0}$ を, $\phi_s|_{\mathrm{Sp}_{8m}(\mathbb{Z}_p)} = \phi_0|_{\mathrm{Sp}_{8m}(\mathbb{Z}_p)}$ であるように取る. そして $g, h \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{Q}_p)$ に対して $\mathcal{F}(\phi_s)(g,h)$ を, $\mathrm{Re} s \gg 0$ で

$$\mathcal{F}(\phi_s)(g,h) = \int_{U_0} \phi_s(\begin{pmatrix} & 1_{4m} \\ -1_{4m} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{2m} & & & \\ & 1_{2m} & 1_{2m} & \\ & & 1_{2m} & \\ & & & 1_{2m} \end{pmatrix} u_0(g,h)) \psi_U(u_0) du_0$$

なる有理型関数と定義する. ただし, $U_0 = \{\begin{pmatrix} 1_{4m} & * \\ & 1_{4m} \end{pmatrix} \in U\}$. そして, $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{Q}_p)$ の任意の（既約）表現 η の行列係数 Φ_η に対し, $Z(\phi_s, \Phi_\eta)$ は $\mathrm{Re} s \gg 0$ で

$$Z(\phi_s, \Phi_\eta) = \int_{\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{Q}_p)} \mathcal{F}(\phi_s)(g_p, 1) \overline{\Phi_\eta(g_p)} dg_p$$

なる有理型関数と定義する.

注意 6. 不分岐な設定下では次の様になっている：$\mathcal{W}_{\mathrm{Sh}}(\mathrm{Sp}(\sigma_p, 2m))|\det|_p^s \rtimes 1_{\mathrm{Sp}_0}$ を $\phi_s^m|_{\mathrm{Sp}_{8m}(\mathbb{Z}_p)} \equiv 1$ なるものとし, η が既約不分岐表現で Φ_η が不分岐ベクトルに関する行列係数だとすると,

$$Z(\phi_s, \Phi_\eta) = \Phi_\eta(1) \Delta_{\mathrm{Sp}_{2m}}^{-1} \frac{L(s+1/2, \eta_{\mathrm{GL}} \times \sigma_p)}{L(s+m+1/2, \sigma) \prod_{i=1}^m L(2s+2i-1, \sigma, \mathrm{Sym}^2) \zeta(2s+2i)}$$

となる. ここで, η_{GL} は η の L パラメータの標準的埋め込みに対応する $\mathrm{GL}_{2m+1}(\mathbb{Q}_p)$ の不分岐既約表現である.

注意 7. $\mathcal{F}(\phi_s)$ は, $u \in U, g \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{Q}_p)$ に対し

$$\mathcal{F}(\phi_s(\cdot u))(g,g) = \psi_U^{-1}(u) \mathcal{F}(\phi_s)(1,1)$$

を満たす. 故に, $F_s^m(g) := \mathcal{F}(\phi_s^m)(g,1)$ と定義すると, 先の議論から, $F_{-m/2}^m$ は $\chi(\det{}_m) \rtimes 1_{\mathrm{Sp}_0}$ の, 不分岐ベクトルに関する行列係数である. 特に $F_{-n-r}^{2n+2r}(1)(\Sigma_p^{n+r}(-)\mathbf{F}_p, \mathbf{F}_p) = F_{-n-r}^{2n+2r}$ である.

F_s^m は以下のような帰納的な性質を持つ.

命題 8. $m_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ が $m - m_0 \geq 0$ を満たすとする. このとき, $g \in \mathrm{Sp}_{2(m-m_0)}(\mathbb{Q}_p)$ に対して,

$$F_s^m(\mathrm{diag}(1_{m_0}, g, 1_{m_0})) = F_{s+m_0}^{m-m_0}(g) \zeta_p(4s+2m+2)^{-1} \zeta_p(4s+2m+4)^{-1} \dots \zeta_p(4s+2m+2m_0)^{-1}$$

である. 特に $F_{-m/2}^m(1) = (\Delta_{\mathrm{Sp}_{2m}})_p^{-1}$ である.

上記の命題は, 難しくは無いがかなり煩雑な直接的計算の末に得ることができる. 証明はここでは紹介しない.

4.2.3 結論

以上の事実を組み合わせると,

$$\begin{aligned} I_p &= (\Delta_{\mathrm{Sp}_{4n+4r}})_p (\Delta_{\mathrm{Sp}_{4n+2r}})_p^{-1} \int_{\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{Q}_p)} F_n^r(g) \overline{(\pi_v(g_v)\mathbf{g}_v, \mathbf{g}_v)} dg_v \\ &= \frac{(\Delta_{\mathrm{Sp}_{4n+4r}})_p}{(\Delta_{\mathrm{Sp}_{4n+2r}})_p (\Delta_{\mathrm{Sp}_{2r}})_p} \frac{L(n+1/2, (\psi_\pi)_p \times \sigma_p)}{L(n+r+1/2, \sigma) \prod_{i=1}^r L(2n+2i-1, \sigma_p, \mathrm{Sym}^2) \xi(2n+2i)} \\ &= \mathcal{L}_p \end{aligned}$$

を得る.

参考文献

[1] J. Arthur. *The Endoscopic Classification of Representations: Orthogonal and Symplectic Groups*, volume 61. American Mathematical Society Colloquium Publications, 2013.

[2] H. Atobe. Applications of arthur's multiplicity formula to siegel modular forms. preprint, 2018. arXiv:1810.09089.

[3] Hiraku Atobe. A theory of Miyawaki liftings: the Hilbert-Siegel case. *Math. Ann.*, 376(3-4):1467–1535, 2020.

[4] Yuanqing Cai, Solomon Friedberg, David Ginzburg, and Eyal Kaplan. Doubling constructions and tensor product l-functions: the linear case. *Inventiones mathematicae*, 217(3):985–1068, 2019.

[5] David Ginzburg and David Soudry. Double descent in classical groups. *J. Number Theory*, 235:1–156, 2022.

[6] Atsushi Ichino and Tamutsu Ikeda. On the periods of automorphic forms on special orthogonal groups and the Gross-Prasad conjecture. *Geom. Funct. Anal.*, 19(5):1378–1425, 2010.

[7] Tamotsu Ikeda. On the lifting of elliptic cusp forms to Siegel cusp forms of degree $2n$. *Ann. of Math. (2)*, 154(3):641–681, 2001.

[8] Tamotsu Ikeda. Pullback of the lifting of elliptic cusp forms and Miyawaki's conjecture. *Duke Math. J.*, 131(3):469–497, 2006.

[9] N. Ito. On the formula for the norms of Miyawaki lifts. preprint. arXiv:2311.08209.

[10] Hidenori Katsurada and Hisa-aki Kawamura. Ikeda's conjecture on the period of the Duke-Imamoḡlu-Ikeda lift. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 111(2):445–483, 2015.

[11] Henry H. Kim and Takuya Yamauchi. Non-vanishing of Miyawaki type lifts. *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.*, 89(2):117–134, 2019.

[12] Andrew Knightly and Charles Li. On the distribution of Satake parameters for Siegel modular forms. *Doc. Math.*, 24:677–747, 2019.

[13] Isao Miyawaki. Numerical examples of Siegel cusp forms of degree 3 and their zeta-functions. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A*, 46(2):307–339, 1992.

[14] Ameya Pitale, Abhishek Saha, and Ralf Schmidt. On the standard L-function for $\mathrm{GSp}_{2n} \times \mathrm{GL}_1$ and algebraicity of symmetric fourth L-values for GL_2. *Ann. Math. Qué.*, 45(1):113–159, 2021.