# テータ級数によるヒルベルトカスプ形式の表示

埼玉大学理工学研究科　　小嶋　久祉

Hisashi Kojima
Graduate School of Science and Engineering,
Saitama University

本講演は坂田　裕氏（早稲田大学高等学院）との共同研究に基づく．

## 1　研究の背景.

$N, k$ は自然数とする．本講演を通じて

$$\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \Im(z) > 0\}, \quad \Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \middle| c \equiv 0 (\mathrm{mod}\, N) \right\},$$

$$S_k(N) = \left\{ f : \mathfrak{H} \text{ 上の正則関数} \;\middle|\; \begin{array}{l} (1)\ \text{任意の } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \text{ に対して} \\ \qquad f(g(z)) = f\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z). \\ (2)\ f \text{ は } \Gamma_0(N) \text{ の各 cusp で } 0 \text{ となる.} \end{array} \right\}$$

とする．$S_k(N)$ の元を重さ $k$，レベル $N$ の楕円 cusp 形式とよぶ.

**楕円 cusp 形式の具体例**. 正定値対称行列 $Q = (a_{ij}) \in M_m(\mathbb{Z})$ に付随する球関数 $P$ に対して，$Q$ と $P$ に付随する Theta 級数

$$\vartheta(z; Q, P) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} P(l) \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\, {}^t l Q l\right) \quad (z \in \mathfrak{H})$$

はある条件の下で楕円 cusp 形式である.

<u>基底問題</u>. $S_k(N)$ の各元が Theta 級数の 1 次結合で記述できるか.

<u>**Hecke の問題**</u>. Hecke は 1940 年に，素数 $p$ の場合の $S_2(p)$ に関する基底問題を提出.

<u>**M. Eichler の解答**</u>. M. Eichler は 1956 年に，$S_2(p)$ 上の Hecke 作用素 $T_2(n)$ と $\mathbb{Q}$ 上の四元数環に付随する Brandt 行列 $B(n)$ の跡を比較して Hecke の問題を肯定的に解決した．さらに M. Eichler は 1958 年，1973 年に Eichler-Selberg の跡公式を証明し，その応用として $k$ は 2 以上の，$N$ は平方因子を持たない自然数の場合の $S_k(N)$ に関する基底問題を肯定的に解決した．その後，基底問題は次の様に一般化されて解明されてきた；

(1) Hijikata，Pizer 等は Eichler-Selberg の跡公式を一般のレベルに拡張し，これを用いて任意の自然数 $N$ の場合の $S_k(N)$ に関する基底問題を肯定的に解決した.

(2) Jacquet-Langlands-Shimizu は保型表現を用いて $GL(2)$ 上の保型形式のなす空間に関する基底問題を肯定的に解決した.

(3) Waldspurger は 1979 年に，Zagier-Cohen による巧妙で興味深い解析的手法と Siegel の主定理を組み合わせて任意の自然数 $N$ の場合の cusp 形式のなす空間 $S_k(N)$ に関する基底問題を肯定的に解決した.

(4) Böcherer と Kuang は Garret の Siegel-Eisenstein 級数の pull back formula と Siegel-Weil の定理を用いて Siegel 保型形式のなす空間に関する基底問題を肯定的に解決した.

本研究目的. Waldspurger の基底定理を Hilbert cusp 形式の場合に一般化する.

**主定理 (定理 4.7(H. Kojima- H. Sakata)).** $F$ を狭義類数 1 の総実代数体とする．重さ $k$，任意レベル $N$ を持つ *Hilbert cusp* 形式の空間 $S_k((N))$ は球関数付き *Theta* 級数の *1* 次結合で張られる.

主定理の証明には解析的でデリケートな技巧が求められる．上記のアイデアは cusp 形式のなす空間を生成する cusp 形式を具体的に構成し，その Fourier 係数を計算して同じ Fourier 係数を持つ Theta 級数を見出すことである．その証明において，それら 2 つの保型形式はそれぞれ，Eisenstein 級数と同様，Fourier 係数が Non-archimedean part と archimedean part の積で記述出来ることが重要な鍵となる．特に主定理の証明において本質的で鍵となる命題は定理 2.1(A), (B) である.

杉山　真悟氏（金沢大学）から本講演後に貴重なコメントを頂いた．この場を借りて感謝致します.

## 2　記法等の準備.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ で自然数全体，有理整数環，有理数体，実数体，複素数体をそれぞれ表わす．$F$ は次数 $n$ の総実代数体，$\mathfrak{o}, \mathfrak{d}, D_F$ を $F$ の極大整環, $F$ の $\mathbb{Q}$ に対する共役差積，$F$ の判別式とする．$\boldsymbol{a} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ を $F$ の archimedean 素点全体とする．$v_i \in \boldsymbol{a}$ に対して $F_{v_i}$ を $F$ の $v_i$-完備化とし，$v_i$ を $F$ から $\mathbb{R}$ への埋め込みと見て $F_{v_i}$ と $\mathbb{R}$ を同一視する.

$E$ を $F$ の単数群とする．$\alpha \in F, v_i \in \boldsymbol{a}$ に対して $\alpha^{(i)} = v_i(\alpha), N(\alpha) = \prod_{i=1}^n \alpha^{(i)}$ とおく．本稿では $F$ の狭義類数を 1, または $[E : E^+] = 2^n$ と仮定する．但し，$E^+ = \{\alpha \in E \,|\, \alpha \gg 0\}$ とし，$\alpha \gg 0$ は全ての $i\,(1 \le i \le n)$ に対して $\alpha^{(i)} > 0$ を満たすことを表わす.

$(N) = N\mathfrak{o}$ は $F$ の整イデアルでかつ $N \gg 0$ とする．このとき，レベル $(N)$ の Hilbert modular 群を次で定義する；

$$\Gamma^0((N)) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(F) \;\middle|\; \begin{array}{l} a, d \in \mathfrak{o},\ b \in \mathfrak{d}^{-1}, \\ c \in \mathfrak{d}(N),\ \det g \gg 0 \end{array} \right\},$$
$$\Gamma((N)) = \left\{ g \in \Gamma^0((N)) \mid \det g = 1 \right\}.$$

$$g=(g_1,\cdots,g_n)\in GL_2^+(\mathbb{R})^n \quad \left(g_i=\begin{pmatrix}a_i & b_i\\ c_i & d_i\end{pmatrix}\in GL_2^+(\mathbb{R})=\{g\in GL_2(\mathbb{R})\mid \det g>0\}\right)$$

は $\mathfrak{H}^n$ に次の様に群作用する； $z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathfrak{H}^n$ に対して

$$g(z)=g(z_1,\cdots,z_n)=(g_1(z_1),\cdots,g_n(z_n)) \quad \left(g_i(z_i)=\frac{a_iz_i+b_i}{c_iz_i+d_i}.\right).$$

$k$ は 3 以上の自然数とする．$\mathfrak{H}^n$ 上の関数 $f(z)$ に対して

$$f||_kg(z)=\prod_{i=1}^n(\det g_i)^{\frac{k}{2}}(c_iz_i+d_i)^{-k}f(g(z)) \quad (z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathfrak{H}^n)$$

とおく．さらに埋め込み

$$g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\longmapsto (g^{(1)},\cdots,g^{(n)}) \quad \left(g^{(i)}=\begin{pmatrix}a^{(i)} & b^{(i)}\\ c^{(i)} & d^{(i)}\end{pmatrix}\ (1\le i\le n)\right)$$

により，$GL_2(F)$ を $GL_2(\mathbb{R})^n$ の部分群として見る．空間

$$M_k^0((N))=\left\{f:\mathfrak{H}^n\text{上の正則関数}\;\middle|\;\begin{array}{l}\text{(1) 任意の } g\in\Gamma^0((N)) \text{ に対して } f||_kg=f \text{ を満たす.}\\ \text{(2) } f \text{ は} \Gamma^0((N)) \text{ の各 cusp で正則.}\end{array}\right\}$$

の元 $f$ を $\Gamma^0((N))$ に関する重さ $k$ の Hilbert modular 形式とよぶ．さらに

$$S_k^0((N))=\left\{\,f\in M_k^0((N))\quad\middle|\quad f\text{ は}\Gamma^0((N))\text{ の全ての cusp で } 0\,\right\}$$

の元 $f$ を $\Gamma^0((N))$ に関する重さ $k$ の Hilbert cusp 形式とよぶ.

$S_k((N))$ の newform, oldform からなる空間をそれぞれ $S_k^{\mathrm{new}}((N))$, $S_k^{\mathrm{old}}((N))$ と置く.

$1\le r\le k-1$ を満たす整数 $r$ と $t,n\in\mathfrak{o}$ に対して

$$P_{k,r}(t,n)=\prod_{i=1}^nP_{k,r}(t^{(i)},n^{(i)}),$$

と定義する．ただし，$P_{k,r}(t,n)$ は関係式

$$(1-tx+nx^2)^{-r}=\sum_{k=r+1}^{\infty}P_{k,r}(t,n)x^{k-r-1}$$

から与えられるものとする．$s\in\mathbb{C}$ に対して $\Gamma_{\mathbb{R}}(s)=\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$, $\Gamma_{\mathbb{C}}(s)=2\cdot(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ とおく．$\Delta\in\mathfrak{o}$ と $\Re(s)>1$ を満たす $s\in\mathbb{C}$ に対して $L$ 関数を次で定義する；

$$L^{(N)}(s,\Delta)=\xi_F(s)N(N)^{-s}\sum_{\alpha\in\mathfrak{o}/E,\,\alpha\gg0}n^{(N)}(\alpha,\Delta)N(\alpha)^{-s}.$$

但し， $\xi_F(s)=\zeta_F(2s)\zeta_F(s)^{-1}$ ($\zeta_F(s)$ は $F$ の Dedekind zeta 関数) であり，

$$n^{(N)}(\alpha,\Delta)=\#\{x\in\mathfrak{o}/(2\alpha N)\,|\,x^2\equiv\Delta \mod (4\alpha N)\}.$$

このとき Euler 積表示 $L^{(N)}(s,\Delta)=\prod_{\wp}L_{\wp}^{(N)}(s,\Delta)$ が得られる.

$\Lambda = \{\widetilde{\lambda} = \{\lambda(m)\}_{m\in\mathfrak{o}, m\gg 0, (m,(N))=1}\}$，$\widetilde{\lambda}\in\Lambda$ に対して，

$$S_k((N);\widetilde{\lambda}) = \left\{ f\in S_k((N)) \;\middle|\; T(m)f = \lambda(m)f \;\; \Big((m,(N))=1,\; \widetilde{\lambda} = \{\lambda(m)\}\Big) \right\}.$$

$\mathcal{L} = \{\widetilde{\lambda}\in\Lambda \,|\, S_k((N);\widetilde{\lambda}) \neq 0\}$ とおけば，

$$S_k((N)) = \bigoplus_{\widetilde{\lambda}\in\mathcal{L}} S_k((N);\widetilde{\lambda}).$$

と正規直交分解出来る．$\widetilde{\lambda} = \{\lambda(m)\}\in\mathcal{L}$ に対して $a_1(f_{\widetilde{\lambda}}) = 1$ をみたす $f_{\widetilde{\lambda}}\in S_k((N))$ をとるとき，

$$a_\xi(f_{\widetilde{\lambda}}) = \lambda(m), \quad ((\xi) = (m),\; \xi\in\mathfrak{o},\; \xi\gg 0)$$

も成り立つ．$S_k((N);\widetilde{\lambda})$ の Hecke eigen form からなる正規直交基底 $\{f_{\widetilde{\lambda},i}\}_{i\in I_{\widetilde{\lambda}}}$ をとるとき，関数 $\varphi_s^N(z)$ を次の様に定義する；

$$\varphi_s^{(N)}(z) = (-1)^{\frac{nk}{2}}\gamma(s)^n \sum_{\widetilde{\lambda}\in\mathcal{L}} f_{\widetilde{\lambda}}(z)\left(\sum_{i\in I_{\widetilde{\lambda}}} \mathbf{D}_{f_{\widetilde{\lambda},i}}(s+k-1)\right).$$

ここで，$\gamma(s)$ は $\mathit{\Gamma}$ 因子

$$(4\pi)^{-1}\exp\left(\sqrt{-1}\pi(s-k+1)/2\right)\mathit{\Gamma}(k)\mathit{\Gamma}(s)^{-1}\mathit{\Gamma}(k-s)^{-1}$$

であり，また $i\in I_{\widetilde{\lambda}}$ に対して $\mathbf{D}_{f_{\widetilde{\lambda},i}}(s)$ は

$$\mathbf{D}_{f_{\widetilde{\lambda},i}}(s) = \left(\mathit{\Gamma}_{\mathbb{C}}(s)\mathit{\Gamma}_{\mathbb{R}}(s-k+2)\right)^n \xi_F(s-k+1)\sum_{\xi\in\mathfrak{o}/E, \xi\gg 0}\left|a_\xi(f_{\widetilde{\lambda},i})\right|^2 N(\xi)^{-s}$$

で定義される上の $s$ で pole を持たない関数である．

次の定理は本研究で最も基本となる命題の 1 つである；

**定理 2.1.** $k>2$, $r$ は奇数かつ $3\leq r\leq k-3$ であるとき，

**(A)** $S_k^{\mathrm{new}}((N)) \subset \cup_{(m,(N))=1}\mathbb{C}\cdot T(m)\varphi_r^{(N)}(z)$.

**(B)** $m$ が平方数でないとき，

$$a_m(\varphi_r^{(N)}(z)) = \frac{\left(2^{-r-2}\pi^{-1}(k-1)\right)^n}{N(\mathfrak{d})^r}\sum_{\substack{t\in\mathfrak{o}\\ t^2\ll 4m}} N(4m-t^2)^{r-\frac{1}{2}}L^{(N)}(r,t^2-4m)\prod_{i=1}^n P_{k,r}\left(t^{(i)},m^{(i)}\right).$$

この定理を示す前に次の命題を用意する（この命題は New form の理論から導かれる）．

**命題 2.2.** $s$ は $\Re(s)>1$ をみたす複素数か $s=1$ とするとき，$S_k^{\mathrm{new}}((N)) \subset \cup_{(m,(N))=1}\mathbb{C}\cdot T(m)\varphi_s^{(N)}(z)$.

さらに，$m\gg 0$ である $m\in\mathfrak{o}$, , $n>2$ である $k\in\mathbb{Z}$ および $z=(z_1,\cdots z_n)$, $z'\in(z'_1,\cdots z'_n)\in\mathfrak{H}^n$ に対して

$$\omega_m(z,z') = \sum_{(a,b,c,d)\in F^4}\prod_{i=1}^n\left(c^{(i)}z_iz'_i + d^{(i)}z'_i + a^{(i)}z_i + b^{(i)}\right)^{-k}$$

と置く．ただし，$(a,b,c,d) \in F^4$ は $a,d \in \mathfrak{o},\ d \in \mathfrak{d}^{-1},\ c \in \mathfrak{d}(N)$ かつ $ad-bc=m$ をみたしながら走るものとする．このとき，次を得る．

**補題 2.3.** $m \gg 0$, $(m,(N))=1$ である $m \in \mathfrak{o}$ に対して

$$\omega_m(z,z') = N(m)^{1-k} c_k^n \sum_{\widetilde{\lambda} \in \mathcal{L},\, i \in I_{\widetilde{\lambda}}} \lambda(m) f_{\widetilde{\lambda},i}(z) \overline{f_{\widetilde{\lambda},i}(-\overline{z'})}.$$

ただし，$c_k = 2^{-k+3}(-1)^{k/2}(k-1)^{-1}\pi$ でありかつ $\widetilde{\lambda} = \{\lambda(m)\}_{\substack{m\in\mathfrak{o}, m\gg 0,\\ (m,(N))=1}}$ である．

補題 2.3 の証明は Cauchy の積分公式と Hecke 作用素の性質を用いて証明出来る．命題 2.2 と補題 2.3 を用いて定理 2.1(A) が証明できる．

# 3 ある保型形式の Fourier 係数の計算

$$\mathcal{M}' = \left\{ (c,d) \in F^2 - \{(0,0)\} \,\middle|\, c \in \mathfrak{d}(N), d \in \mathfrak{o}, (c\mathfrak{d}^{-1}, d) = 1 \right\}.$$

に対して，2 つの Eisenstein 級数

$$H(z,s) = \sum_{(c,d)\in\mathcal{M}'/E} \prod_{i=1}^{n} \left| c^{(i)} z_i + d^{(i)} \right|^{-2s}, \quad \mathbf{E}(z,s) = \xi_F(s) H(z,s) \prod_{i=1}^{n} y_i^s \quad (s \in \mathbb{C})$$

を定義する．このとき，保型形式の Rankin convolution と Eisenstein 級数を用いて次の補題を得る．

**補題 3.1.**

$$a_m(\varphi_s^{(N)}(z)) = (-1)^{\frac{kn}{2}} \gamma(s)^n \left( N(m)^{1-k} c_k^n \right)^{-1} \int_{\Gamma((N))\backslash\mathfrak{H}^n} \omega_m(z,-\overline{z}) \mathbf{E}(z,s) \prod_{i=1}^{n} y_i^{k-2} dx_i dy_i.$$

次に，この式の右辺の積分を詳しく計算していく．

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a,d \in \mathfrak{o},\ b \in \mathfrak{d}^{-1},\ c \in \mathfrak{d}(N),\ a+d=t,\ ad-bc=m \right\}$$

の任意元 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に二次形式

$$q(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2; \quad A=c,\ B=d-a,\ C=-b$$

を対応させ，この $q(x,y)$ に対して，$z=(z_i)_{1\le i\le n} = \left(x_i + \sqrt{-1}y_i\right)_{1\le i\le n} \in \mathfrak{H}^n$ の関数

$$R_q(z,t) = \prod_{i=1}^{n} y_i^k \left( A^{(i)}|z_i|^2 + B^{(i)}x_i + C^{(i)} - \sqrt{-1}t^{(i)}y_i \right)^{-k}; \quad |q| = B^2 - 4AC = t^2 - 4m$$

を定義する．このとき，

$$\omega_m(z,-\overline{z}) \prod_{i=1}^{n} y_i^k = \sum_{t\in\mathfrak{o}} \sum_{|q|=t^2-4m} R_q(z,t).$$

ここで，$b_m(s)$ を

$$\sum_{t\in\mathfrak{o}}\int_{\Gamma((N))\backslash\mathfrak{H}^n}\sum_{|q|=t^2-4m}R_q(z,t)\xi_F(s)^{-1}\mathbf{E}(z,s)\prod_{i=1}^{n}\frac{dx_i dy_i}{y_i^2}$$

で定義すれば，定義より

$$b_m(s)=\sum_{t\in\mathfrak{o}}\int_{\Gamma((N))\backslash\mathfrak{H}^n}\sum_{|q|=t^2-4m}\ \sum_{(c,d)\in\mathcal{M}'/E}R_q(z,t)\prod_{i=1}^{n}\left|c^{(i)}z_i+d^{(i)}\right|^{-2s}\prod_{i=1}^{n}y_i^{s-2}dx_i dy_i$$

となる．$m,t\in\mathfrak{o}$ に対して集合

$$M(t,m)=\left\{(q,(c,d))\,\middle|\,\begin{array}{l}q(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2,\ A\in\mathfrak{d}(N),\\ B\in\mathfrak{o},\ C\in\mathfrak{d}^{-1},\ (c,d)\in\mathcal{M}'/E,\\ |q|=B^2-4AC=t^2-4m\end{array}\right\}.$$

を与えれば，$\Gamma((N))$ の元 $\gamma$ は $M(t,m)$ に次の様に作用する；

$$\gamma\cdot(q,(c,d))=({}^t\gamma q\gamma,(c,d)\gamma)\quad((q,(c,d))\in M(t,m)).$$

$M(t,m)$ のこの作用による同値類 $[(q,(c,d))]$ 全体を $M(t,m)/\sim$ とおく．このとき，

$$b_m(s)=\int_{\Gamma((N))\backslash\mathfrak{H}^n}\sum_{[q,(c,d)]\in M(t,m)/\sim}\ \sum_{\gamma\in\Gamma((N))}R_q(\gamma(z),t)\prod_{i=1}^{n}\left|c^{(i)}(\gamma^{(i)}(z_i))+d^{(i)}\right|^{-2s}$$
$$\times\Im(\gamma^{(i)}(z_i))^s\frac{dx_i dy_i}{y_i^2}.$$

$m,t\in\mathfrak{o}$ を固定して $\epsilon=(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n)\in\{\pm1\}^n$ をとり，

$$M^{(\epsilon)}(t,m)=\left\{(q,(c,d))\in M(t,m)\,\middle|\,\mathrm{sgn}(q(d,-c)^{(i)})=\epsilon_i\,(1\le i\le n)\right\}$$

$$\text{かつ}\quad M^{(0)}(t,m)=\left\{(q,(c,d))\in M(t,m)\,\middle|\,q(d,-c)=0\right\}$$

とおけば，$M(t,m)/\sim$ の直和分解

$$M(t,m)=\coprod_{\epsilon\in\{\pm1\}^n}\left(M^{(\epsilon)}(t,m)/\sim\right)\coprod\left(M^{(0)}(t,m)/\sim\right)$$

が得られる．従って，

$$b_m(s)=\sum_{\epsilon\in\{\pm1\}^n}\ \sum_{[q,(c,d)]\in M^{(\epsilon)}(t,m)/\sim}\int_{\mathfrak{H}^n}R_q(z,t)\prod_{i=1}^{n}\left|c^{(i)}z_i+d^{(i)}\right|^{-2s}y_i^{s-2}dx_i dy_i$$
$$+\sum_{[q,(c,d)]\in M^{(0)}(t,m)/\sim}\int_{\mathfrak{H}^n}R_q(z,t)\prod_{i=1}^{n}\left|c^{(i)}z_i+d^{(i)}\right|^{-2s}y_i^{s-2}dx_i dy_i.$$

そこで，

$$\xi_m^{(\epsilon)}(s)=\sum_{[q,(c,d)]\in M^{(\epsilon)}(t,m)/\sim}\int_{\mathfrak{H}^n}R_q(z,t)\prod_{i=1}^{n}\left|c^{(i)}z_i+d^{(i)}\right|^{-2s}y_i^{s-2}dx_i dy_i.$$

と置いて，この解析を進める．$\widetilde{\Delta} < (\widetilde{t})^2$ を満たす実数 $\widetilde{\Delta}, \widetilde{t}$ と $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$I_k(\widetilde{\Delta}, \widetilde{t}, s) = \int_{\mathfrak{H}} \left(|z|^2 - \sqrt{-1} \cdot \widetilde{t}y - \widetilde{\Delta}/4\right)^{-k} y^{k+s-2} dy \quad (z = x + \sqrt{-1}y \in \mathfrak{H})$$

と置く．$i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ と $R_q(z, t)$ に対して

$$R_{q^{(i)}}(z_i, t^{(i)}) = y_i^k \left(A^{(i)}|z_i|^2 + B^{(i)}x_i + C^{(i)} - \sqrt{-1}t^{(i)}y_i\right)^{-k} \quad (z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i \, (1 \le i \le n))$$

と置けば，

$$\begin{aligned} \xi_m^{(\epsilon)}(s) = \quad & \sum_{[q,(c,d)] \in M^{(\epsilon)}(t,m)/\sim} \prod_{i \in L(\Delta)} \int_{\mathfrak{H}} R_{q^{(i)}}(z_i, t^{(i)}) \left| c^{(i)} z_i + d^{(i)} \right|^{-2s} \\ & \times y_i^{s-2} dx_i dy_i \prod_{i \notin L(\Delta)} \int_{\mathfrak{H}} R_{q^{(i)}}(z_i, t^{(i)}) \left| c^{(i)} z_i + d^{(i)} \right|^{-2s} y_i^{s-2} dx_i dy_i. \end{aligned}$$

ただし，$L(\Delta) = \left\{ i \in \{1, 2, \cdots, n\} \,\middle|\, \Delta^{(i)} > 0 \right\}$. ここで，

$$q(x,\, y) = (x \;\; y) \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{に対して} \quad q^{(i)}(x,\, y) = (x \;\; y) \begin{pmatrix} A^{(i)} & \frac{B^{(i)}}{2} \\ \frac{B^{(i)}}{2} & C^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を考える．もし $q^{(i)}(d^{(i)}, -c^{(i)}) > 0$ ならば

$$g^{(i)} = \begin{pmatrix} d^{(i)} & -B^{(i)} d^{(i)}/2 + C^{(i)} c^{(i)} \\ -c^{(i)} & A^{(i)} d^{(i)} - B^{(i)} c^{(i)}/2 \end{pmatrix}$$

は $\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{H}$ への変換 $z_i \mapsto g^{(i)} z_i$ を与える．このとき，長い計算を通じて

$$\begin{aligned} & R_{q^{(i)}}(g^{(i)} z_i, t^{(i)}) \left| c^{(i)}(g^{(i)} z_i) + d^{(i)} \right|^{-2s} \left| \Im(g^{(i)} z_i) \right|^s \\ & \quad = \quad |q^{(i)}(d^{(i)}, -c^{(i)})|^{-s} \left( |z_i|^2 + \frac{4m^{(i)} - (t^{(i)})^2}{4} - \sqrt{-1}t^{(i)} y_i \right)^{-k} y_i^{s+k} \end{aligned}$$

となるため，

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{H}} R_{q^{(i)}}(z_i, t^{(i)}) \left| c^{(i)} z_i + d^{(i)} \right|^{-2s} y_i^{s-2} dx_i dy_i \\ & = |q^{(i)}(d^{(i)}, -c^{(i)})|^{-s} I_k \left( \Delta^{(i)}, -\mathrm{sgn}\left( q^{(i)}(d^{(i)}, -c^{(i)}) \right) t^{(i)}, s \right). \end{aligned}$$

また $q^{(i)}(d^{(i)}, -c^{(i)}) < 0$ ならば $R_{-q^{(i)}}(z_i, t^{(i)}) = R_{q^{(i)}}(z_i, -t^{(i)})$ に注意して同様の方法でこの計算を行うことが出来る．$(c, d) \in (\mathcal{M}'/E)/\sim$ に対して適当な $\gamma \in \varGamma((N))$ をとって $(c,\ d)\gamma = (0,\ 1)$ と出来るため，

$$M^{(\epsilon)}(t, m)/\!\sim = \left\{ (q, (0, 1)) \,\middle|\, \begin{array}{l} q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2, \\ A \in \mathfrak{d}(N),\, B \in \mathfrak{o},\, C \in \mathfrak{d}^{-1}, \\ B^2 - 4AC = t^2 - 4m,\ \mathrm{sgn}A = \epsilon \end{array} \right\} \Big/ \sim.$$

の代表系集合として

$$K^{(\epsilon)} = \left\{ (A, B) \,\middle|\, \begin{array}{l} \delta N | A,\ \mathrm{sgn}(A) = \epsilon,\ B \in \mathfrak{o}/2A\mathfrak{d}^{-1}, \\ B^2 \equiv t^2 - 4m \pmod{4A\mathfrak{d}^{-1}} \end{array} \right\}$$

がとれる．従って，

$$
\begin{aligned}
\xi_m(s) &= \sum_{\epsilon \in \{\pm 1\}^n} \xi_m^{(\epsilon)}(s) \\
&= \sum_{t \in \mathfrak{o}} \sum_{\substack{\epsilon=(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n) \\ \in \{\pm 1\}^n}} \sum_{\substack{(A,B) \\ \in K^{(\epsilon)}}} |N(A)|^{-s} \prod_{i=1}^n I_k\left((t^{(i)})^2 - 4m^{(i)}, -\epsilon_i t^{(i)}, s\right) \\
&= \xi_F(s)^{-1} N(\mathfrak{d})^{-s} \sum_{t \in \mathfrak{o}} L^{(N)}(s, t^2 - 4m) \sum_{\substack{\epsilon=(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n) \\ \in \{\pm 1\}^n}} \prod_{i=1}^n I_k\left((t^{(i)})^2 - 4m^{(i)}, -\epsilon_i t^{(i)}, s\right).
\end{aligned}
$$

さらに

$$
I_k\left((t^{(i)})^2 - 4m^{(i)}, \epsilon_i t^{(i)}, s\right) = \begin{cases} \epsilon_i I_k\left((t^{(i)})^2 - 4m^{(i)}, t^{(i)}, s\right) & \text{if } i \in L(\Delta) \\ I_k\left((t^{(i)})^2 - 4m^{(i)}, t^{(i)}, s\right) & \text{if } i \notin L(\Delta) \end{cases}
$$

に注意すれば，次の命題を得る．

**命題 3.2.** $m$ は $\mathfrak{o}$ の $m \gg 0$ かつ非平方な元とするとき，

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Gamma((N))\backslash \mathfrak{H}^n} \omega_m(z, -\bar{z}) \mathbf{E}(z, s) \prod_{i=1}^n y_i^{k-2} dx_i dy_i \\
&\qquad = N(\mathfrak{d})^{-s} \sum_{t \in \mathfrak{o}} L^{(N)}(s, t^2 - 4m) \sum_{\epsilon \in \{\pm 1\}^n} I_k\left(t^2 - 4m, \epsilon t, s\right).
\end{aligned}
$$

ただし $I_k\left(t^2 - 4m, \epsilon t, s\right) = \prod_{i=1}^n I_k\left((t^{(i)})^2 - 4m^{(i)}, \epsilon_i t^{(i)}, s\right)$ とする．

次にこの $I_k(\Delta, t, s)$ を詳しく調べる．積分公式

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \left(y^2 + \sqrt{-1}ty - \frac{\Delta}{4} + 2\sqrt{-1}y \cdot \frac{t^2 - \Delta}{4} u\right)^{-r-\frac{1}{2}} dy \\
&\qquad = \frac{\Gamma(r)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{t^2 - \Delta}{4}\right)^{-r} \left(1 + tu + \frac{t^2 - \Delta}{4} u^2\right)^{-r}
\end{aligned}
$$

の両側をそれぞれ $u$ に関する Taylar 展開して $u^{k-r-1}$ の係数を比較すれば，

$$
\begin{aligned}
&\frac{(-1)^{k-r-1}}{(k-r-1)!} \prod_{i=0}^{k-r-2} \left(\frac{2r + 2i + 1}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(y^2 + \sqrt{-1}ty - \frac{\Delta}{4}\right)^{-k+\frac{1}{2}} \left(2\sqrt{-1}y \cdot \frac{t^2 - \Delta}{4}\right)^{k-r-1} dy \\
&\qquad = \frac{\Gamma(r)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{t^2 - \Delta}{4}\right)^{-r} P_{k,r}\left(-t, \frac{t^2 - \Delta}{4}\right).
\end{aligned}
$$

ここで $P_{k,r}(s,t)$ は Gegenbauer 多項式，すなわち $(1 - sx + tx^2)^{-s}$ の $x = 0$ における Taylor 展開の $x^{k-s-1}$ の係数である．この左辺の積分に注目する．

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} \left(y^2 + \sqrt{-1}ty - \frac{\Delta}{4}\right)^{\frac{1}{2}-k} y^{k+(-s+1)-2} dy = I_{k,1-s}\left(\frac{\sqrt{-1}t}{2a}\right) \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)^{1-s-k}, \\
&I_{k,s}(z) = \int_0^{\infty} \frac{x^{k+s-2}}{(x^2 + 2xz + 1)^{k-\frac{1}{2}}} dx \quad (1 - k < \Re(s) < k,\ z \in \mathbb{C} - (-\infty, -1]).
\end{aligned}
$$

また，

$$I_{k,1-s}(z)=\frac{2^{1-k}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}\Gamma(k-s)\Gamma(k+s-1)(z^2-1)^{-\frac{k-1}{2}}P_{-(1-s)}^{1-k}(z)\qquad(z\in\mathbb{C}-(-\infty,1]).$$

ここで $P_\nu^\mu(z)$ は超幾何関数 $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ から与えられる第 1 種 Legendre 関数，すなわち

$$\begin{aligned}P_\nu^\mu(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}&\left(\frac{\Gamma(-\nu-1/2)}{2^{\nu+1}\Gamma(-\mu-\nu)}\frac{1}{(z^2-1)^{(\nu+1)/2}}F\left(\frac{\nu-\mu+1}{2},\frac{\nu+\mu+1}{2},\nu+\frac{3}{2};\frac{1}{1-z^2}\right)\right.\\&\left.\quad+\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}(z^2-1)^{\nu/2}F\left(\frac{\mu-\nu}{2},\frac{-\mu-\nu}{2},\frac{1}{2}-\nu;\frac{1}{1-z^2}\right)\right)\\&\left(2\nu\notin2\mathbb{Z}+1,\ |1-z^2|>1,\ z-1\notin\mathbb{R}_{\leq0}\right)\end{aligned}$$

である．これより $P_{-(1-s)}^{1-k}(z)$, すなわち $I_{k,1-s}(z)$ は偶関数になる．従って，

$$\int_0^\infty\left(y^2-\sqrt{-1}ty-\frac{\Delta}{4}\right)^{\frac{1}{2}-k}y^{k-s-1}dy=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty\left(y^2+\sqrt{-1}ty-\frac{\Delta}{4}\right)^{\frac{1}{2}-k}y^{k-s-1}dy.$$

これより，

$$\begin{aligned}I_k(\Delta,t,1-s)&=\frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(k)}\int_{-\infty}^\infty\left(y^2+\sqrt{-1}ty-\frac{\Delta}{4}\right)^{\frac{1}{2}-k}y^{k-s-1}dy\\&=\frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(k)}\frac{\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\Gamma(k-s)}{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{t^2-\Delta}{4}\right)^{1-k}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^{k-s-1}\\&\quad\times P_{k,s}\left(t,\frac{t^2-\Delta}{4}\right).\end{aligned}$$

従って，$4m-t^2\gg0$ のとき，

$$\begin{aligned}I_k(t^2-4m,t,s)&=\prod_{i=1}^nI_k((t^{(i)})^2-4m^{(i)},t^{(i)},s)\\&=2^{n(-k-s+1)}\pi^n(-1)^{\frac{n(k-s-1)}{2}}\left(\frac{\Gamma(k-s)\Gamma(s)}{\Gamma(k)}\right)^nN(m)^{1-k}|N(t^2-4m)|^{s-\frac{1}{2}}\\&\quad\times\prod_{i=1}^nP_{k,s}\left(t^{(i)},m^{(i)}\right).\end{aligned}$$

故に次を得る．

**命題 3.3.** $m$ は $m\gg0,(m,(N))=1$ を満たす $\mathfrak{o}$ の非平方元とする．$3\leq s\leq k-3$ をみたす奇数 $s$ に対して，

$$a_m(\varphi_s^{(N)}(z))=\left(2^{-s-2}\pi^{-1}(k-1)\right)^nN(\mathfrak{d})^{-s}\sum_{\substack{t\in\mathfrak{o}\\t^2\ll4m}}N(4m-t^2)^{s-\frac{1}{2}}L^{(N)}(s,t^2-4m)P_{k,s}(t,m).$$

ここで，$P_{k,s}(t,m)=\prod_{i=1}^nP_{k,s}\left(t^{(i)},m^{(i)}\right)$.

この命題から定理 2.1(B) を得る．

## 4 Theta 級数と主定理

$$ {}^tQ=Q,\ Q^{(i)}=(a_{ij}^{(i)})>0\ (1\leq i\leq n),\ a_{ii}\in 2\mathfrak{o}\ ((1\leq i\leq m),\ \det Q=D $$

を満たすレベル $N$ の行列 $Q=(a_{ij})\in M_m(\mathfrak{o})$ をとる．$k>\dfrac{m}{2}$ に対して，

$$ q^{(i)}(x)=\frac{{}^txQ^{(i)}x}{2}\quad (x\in\mathbb{R}^m),\qquad \langle x,y\rangle^{(i)}={}^txQ^{(i)}y\quad (x,y\in\mathbb{R}^m),\qquad r=\frac{m}{2}-1 $$

そして $P_k^{(i)}(x,y)=P_{k,r}\left(\langle x,y\rangle^{(i)},q^{(i)}(x)q^{(i)}(y)\right)$ と置く．$g$ を $Q$ の属する種とし，$\{Q_j\}\,(j\in I(g))$ を $g$ に属する全ての類の代表系とする．$q_j^{(i)}$ と $\langle,\rangle_j^{(i)}$ をそれぞれ $Q_j^{(i)}$ に属する二次形式と内積とする．

$$ w_j=\#\left\{U\in GL_m(\mathfrak{o})\,|\,{}^tUQ_jU=Q_j\right\},\quad M_g=\sum_{j\in I(g)}w_j^{-1},\quad \mathfrak{o}\ni d\gg 0 $$

に対して Theta 級数 $\vartheta_{g,d}(z)$ を

$$ \vartheta_{g,d}(z)=M_g^{-1}\left(\sum_{j\in I(g)}w_j^{-1}\sum_{\substack{x,y\in\mathfrak{o}^m\\ {}^tyQ_jy=d}}P_k^j(x,y)\mathrm{e}[zq_j(x)]\right) $$

で定義する．このとき，[5], [24] により次の結果が得られる．

**命題 4.1.** 上記仮定の元で $\vartheta_{g,d}(z)\subset S_k((N))$.

${}^tG=G,\,G^{(i)}>0\,(1\leq i\leq n)$ かつ $m'<m$ を満たす $M_{m'}(\mathfrak{o})$ の行列 $G$ と，$F$ の 素イデアル $\wp=(\pi)$ $(\pi\in\mathfrak{o})$ をとる． $a\geq 0$ を満たす整数 $a$ に対して，

$$ \begin{aligned} A(Q,G)&=\#\left\{X\in\mathfrak{o}_{m'}^m\ \mid\ {}^tXQX=G\right\},\\ A_{\pi^a}(Q,G)&=\#\left\{X\in(\mathfrak{o}/\pi^a\mathfrak{o})_{m'}^m\ \mid\ {}^tXQX\equiv G\mod \pi^a\right\},\\ \alpha_\pi(Q,G)&=\lim_{a\to\infty}N(\pi)^{a[m'(m'+1)/2-mm']}A_{\pi^a}(Q,G) \end{aligned} $$

と置く．ここで，$R_n^m$ は環 $R$-係数の $m\times n$ 行列全体とする．$\alpha_\pi(Q,G)$ は $(Q,G)$ の局所密度とよぶ．[26] と同じ方法で次の命題を示すことが出来る．

**命題 4.2.** $n\in\mathfrak{o}$ は $n\gg 0$ かつ $nd$ が非平方な元とする．$k>m/2$ に対して，$\vartheta_{g,d}(z)$ の $n$ 番目の *Fourier* 係数は次式で与えられる，

$$ a_n(\vartheta_{g,d}(z))=c_1(\det Q)^{-1}\sum_{\substack{t\in\mathfrak{o}\\ t^2\ll 4nd}}N(4nd-t^2)^{(m-3)/2}P_{k,r}(t,nd)\prod_\pi\alpha_\pi\left(Q,\begin{pmatrix}2d & t\\ t & 2n\end{pmatrix}\right). $$

ここで $c_1$ は $m$ にのみ依存する定数で，$\prod_\pi$ は $\mathfrak{o}\ni\pi\gg 0$ を満たす全ての素イデアル $(\pi)$ についての積とする．

命題 4.2 の証明は次の Siegel の主定理を用いて行う．

**定理 4.3 (Fractman[7], Corollary 4.4).** 上記仮定の下，

$$A(Q,G) = D_F^{m'(m'+1)/4-mm'/2}\left(\frac{\rho_m}{\rho_{m-m'}}\right)^n (\det Q)^{-\frac{m'}{2}} (\det G)^{\frac{m-m'-1}{2}} \prod_{(\pi)} \alpha_\pi(Q,G).$$

ここで $\rho_l = \prod_{s=1}^{l}\left(\pi^{s/2}/\Gamma(s/2)\right)$ とし，積 $\prod_{(\pi)}$ は $\mathfrak{o}$ の全ての素イデアル $(\pi)$ についての積とする．．

$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とし，$m$ は $m \equiv 0 \pmod 8$ を満たす正整数，$N$ は $N \gg 0$ である $\mathfrak{o}$ の元とする．次の命題は本結果の中での Key Proposition になる．

**命題 4.4.** $Q^{(i)} \gg 0\,(1 \le i \le n)$ を満たす $\mathfrak{o}$ 上の偶対称行列 $Q$ の中で，次を満たすものが存在する；$Q$ のレベルは $N$，$\det Q = N^{m-2}$ で $Q$ は $\mathfrak{o}_\wp$ 上次の行列と同値である；

$$Nf_1 \oplus \cdots \oplus Nf_1 \oplus f_1.$$

ここで，$\wp$ は $F$ の任意の素イデアルとし，$\mathfrak{o}_\wp$ は $\mathfrak{o}$ の $\wp$-完備化とする．

**命題 4.4 の証明のアウトライン.**

$\mathbb{Q}^m$ 上の二次形式 $f(x) = \sum_{i=1}^m x_i^2 \quad (x = {}^t(x_1,\cdots,x_m) \in \mathbb{Q}^m)$ を考える．$x, y \in \mathbb{R}^m$ に対して $\mathbb{R}^m$ の内積を以下で定める；

$$(x,y) = \sum_{i=1}^m x_i y_i \quad \left(x = {}^t(x_1,\cdots,x_m), y = {}^t(y_1,\cdots,y_m) \in \mathbb{R}^m\right).$$

次に $\mathbb{Q}^m$ の $\mathbb{Z}$-格子 $L$ を定義する；

$$L = \{x \in \mathbb{Z}^m \mid f(x) \equiv 0 \pmod 2\}.$$

$e = \left(\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2}\right)$ に対して $L_0 = L + \mathbb{Z}e$ とおく．このとき，$[L_0 : L] = 2$ で $f(L_0) \subseteq 2\mathbb{Z}$ となる．$\{a_1,\cdots,a_m\}$ を $L_0$ の $\mathbb{Z}$-基底とし，行列 $S = ((a_i,a_j))$ を考えると $\det S = 1$ が分かる．$e_1 = (1,0,\cdots,0),\cdots\ e_m = (0,\cdots,0,1)$ に対して $a_1 = e - (e_2 + \cdots + e_{m-1})$, $a_2 = e_1 + e_2$, $a_i = e_{i-1} - e_{i-2}\,(3 \le i \le m)$ とおく．このとき，$\{a_1,\cdots,a_m\}$ は $L_0$ の $\mathbb{Z}$-基底であることが分かる．故に $S$ は偶でかつ $\det S = 1$ となる．ここで

$$\widetilde{S} = \overbrace{f_1 \oplus \cdots \oplus f_1}^{\frac{m}{2}}.$$

とおくと，全ての素数 $p$ に対して $S, \widetilde{S}$ の Hasse 記号 $\epsilon_p(S)$, $\epsilon_p(S)$ は 1 に等しい．それ故に $S$ と $\widetilde{S}$ は $\mathbb{Q}$ 上同値となる．ここで，

$$\widetilde{L}_0 = \left\{a_1,\, a_2,\, a_3,\, \overbrace{Na_4,\, \cdots,\, Na_{\frac{m-2}{2}+4}}^{\frac{m-2}{2}},\, a_{\frac{m-2}{2}+5},\, \cdots,\, a_m\right\} = \{\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, \widetilde{a}_3, \cdots, \widetilde{a}_m\},$$
$$\widetilde{A} = ((\widetilde{a}_i, \widetilde{a}_j))$$

と置くと，

$$\widetilde{A} = {}^t XSX, \quad \text{ただし} \quad X = \mathrm{diag}\left(1,\,1,\,1,\,\overbrace{N,\,\cdots,\,N}^{\frac{m-2}{2}},\,1,\cdots,\,1\right).$$

このとき，$\widetilde{A}$ は偶でレベルは $N$ かつ $\det\widetilde{A} = N^{m-2}$ となり，$S$ は全ての $p$ で $\mathbb{Q}_p$ 上 hyperbolic になる．故に $\widetilde{A}$ も $\mathbb{Q}_p$ 上 hyperbolic になり，さらに $\widetilde{A}$ は次の様に分解する；

$$\widetilde{A} = {}^t M_\wp \begin{pmatrix} \widetilde{A}_1 & & & 0 \\ & \widetilde{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \widetilde{A}_{\frac{m}{2}} \end{pmatrix} M_\wp, \qquad M_\wp \in GL_m(\mathfrak{o}_\wp) \text{ かつ } \widetilde{A}_i \in M_2(\mathfrak{o}_\wp)\,(1 \le i \le m/2).$$

さらに $\widetilde{A}_i\,(1 \le i \le m)$ を詳しく分析することで，$F$ の全ての素イデアル $\wp$ に対して $\widetilde{M}_\wp \in GL_m(\mathfrak{o}_\wp)$ を適切にとって

$$\widetilde{A} = {}^t\widetilde{M}_\wp \begin{pmatrix} Nf_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & Nf_1 & \\ 0 & & & f_1 \end{pmatrix} \widetilde{M}_\wp$$

と出来る． □

[26] と同じ議論を行うことで次の結果が分かる．

**補題 4.5.** $Q$ は上記命題と同じ行列とする．$(n,d) = 1$, $t^2 - 4nd \neq 0$ を満たす $n, t, d \in \mathfrak{o}$ に対して，

$$\prod_{(\pi)} \alpha_\pi \left(Q, \begin{pmatrix} 2d & t \\ t & 2n \end{pmatrix}\right) = c_3 L^{(N)}(r, t^2 - 4nd).$$

ただし，$c_3$ は $N$ と $r$ のみに依存する定数である．

定理 2.1，命題 4.2，命題 4.4，補題 4.5 より次の結果を得ることが出来る．

**定理 4.6.** $n \gg 0,\, d \gg 0$ をみたす $n, d \in \mathfrak{o}$ をとる．$k > m/2$ に対して

$$a_n\left(\vartheta_{g,d}(z)\right) = c_4 a_n \left(T(d)\widetilde{\varphi}_r^{(N)}(z)\right).$$

ただし，$c_4$ は $N$ と $r$ のみに依存する 0 でない定数である．

この定理 4.6 より，次の結果が導かれる；

**定理 4.7.** $m \equiv 0 \pmod 8$ で $k$ は $k > m/2$ かつ $k > 2$ をみたす偶数とする．このとき，

$$S_k^{\mathrm{new}}((N)) \subset \Theta(m, k, N, N^2).$$

ここで，$\Theta(m, k, N, N^2) = S_k((N)) \cap \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\vartheta(lz, Q, P)\}_{l,Q,P}$ であり，$\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\vartheta(lz, Q, P)\}_{l,Q,P}$ は次の条件 *(*)* を満たす組 $(l, Q, P)$ から定まる球関数付き *Theta* 関数 $\vartheta(lz, Q, P)$ 全体で生成される $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間である．

*(*)* $Q$ は $\mathfrak{o}$ 上偶かつ総正でレベル $M$，$\det Q = M^2$ を満たし，$l$ は $l \gg 0$ な $\mathfrak{o}$ の元で $lM|N$ を満たす．また $P$ は $Q$ に付随する次数 $k - m/2$ の球関数である．

## 参考文献


[1] D. Blasius, Hilbert modular forms and the Ramanujan conjecture, *preprint*, math,NT/0511007v1, 1 November (2005).

[2] M. Eichler, Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, **63**, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg (1974).

[3] M. Eichler, Über die Darstellbarkeit von Modulformen durch Thetareihen, *J. reine angew. Math.*, **195** (1956), 156-171.

[4] M. Eichler, The basis problem for modular forms and the traces of Hecke operators, Modular functions of one variable I, *Lecture notes Math.*, **320**, Springer-Verlag, Berlin and New York (1972), 75-152 .

[5] M. Eichler, On theta functions of real algebraic number fields, *Acta Arith.*, **XXXIII** (1977), 269-292.

[6] A. Erdelyi et al, Higher Transcendental Functions, vol. I, McGraw-Hill, New York - Toronto - London (1953)

[7] G. Fractman, On the product formula for quadratic forms, Ph. D. thesis, *Princeton University* (1991).

[8] H. Hijikata, A. Pizer and T. Shemanske, The basis problem for modular forms on $\Gamma_0(N)$, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **82**, no. 418 (1989).

[9] H. Jacquet and R. P. Langlands, Automorphic forms on GL(2), *Lecture notes Math.*, **114**, Springer-Verlag, Berlin and New York (1970).

[10] S. Lang, Introduction to Modular Forms, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, **222**, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg (1976).

[11] W. Li, New forms and functional equation, *Math. Ann.*, **212** (1975), 285-315.

[12] K. Martin, The basis problem revisited, *Trans. of Amer. Math. Soc.*, **373** (2020), 4523-4559.

[13] O. T. O'Meara, Introduction to Quadratic Forms, *Classics in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg (1973).

[14] T. Miyake, On automorphic forms on $GL_2$ and Hecke operators, *Ann. of Math.*, **94** (1971), 174-189.

[15] T. Miyake, Modular Forms, *Springer Monographs in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg (1989).

[16] S. Mizumoto, On the second $L$-functions attached to Hilbert modular forms, *Math. Ann.*, **269** (1984), 191-216.

[17] S. Moriguchi et al., Mathematics Formula III - Special functions (in Japanese), Iwanami Shoten, Publishers (1996).

[18] A. Ogg, Modular Forms and Dirichlet Series, *Mathematics lecture note series*, W. A. Benjamin, Inc., New York (1969).

[19] J. P. Serre, Cours d'arithmétique, *Collection Le Mathématicien*, **2**, Presses universitaires de France, Paris (1970).

[20] C. L. Siegel, Gesammelte Abhandlungen I, *Springer Collected Works in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg (1966).

[21] H. Shimizu, Theta series and automorphic forms on GL(2), *J. Math. Soc. Japan*, **24** (1972), 638-683.

[22] H. Shimizu, Automorphic functions (in Japanese), *Iwanami on-demand books*, Iwanami Shoten, Publishers (2017).

[23] G. Shimura, The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms, *Duke Math. J.*, **45** (1978), 637-679.

[24] G. Shimura, On the transformation formulas of theta series, *Amer. J. Math.*, **115** (1993), 1011-1052.

[25] T. Shintani, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **23** (1976), 393-417.

[26] J-L. Waldspurger, Engendrement par des séries thêta de certains espaces de formes modulaires, *Invent. math.*, **50** (1979), 135-168.

[27] D. Zagier, Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta functions of quadratic fields, Modular functions of one variable VI, *Lecture notes Math.*, **627**, Springer-Verlag, Berlin and New York (1976), 105-169.

Department of Mathematics, Graduate school of Science and Engineering,
Saitama University
255 Shimo-Okubo, Sakura-ku, Saitama City, 338-8570
JAPAN
E-mail: `hkojima@rimath.saitama-u.ac.jp`