Rosser 証明可能性述語に基づく局所反映原理*

神戸大学大学院システム情報学研究科 小暮 晏佳 †
Haruka Kogure
Graduate School of System Informatics,
Kobe University

神戸大学大学院システム情報学研究科 倉橋 太志 ‡
Taishi Kurahashi
Graduate School of System Informatics,
Kobe University

1 はじめに

Rosser 証明可能性述語は Rosser [23] が Gödel の第 1 不完全性定理を改良する際に用いた手法に基づいて定められる，標準的ではない証明可能性述語の一つである．Rosser 証明可能性述語に対しては第 2 不完全性定理が成立しないことが Kreisel [12] によって指摘されており，日本においてこの事実は教科書 [27] の中で「クライゼルの注意」として取り上げられたために，よく知られている．この事実は Rosser 証明可能性述語が第 2 不完全性定理の成立の限界を分析するために有用であることを示唆しており，したがって Rosser 証明可能性述語がどのような性質を有するのか，また標準的な証明可能性述語と比べてどのような違いがあるのか，という問いが例えば Kreisel and Takeuti [14] などによって提起された．こうした文脈の中で，Rosser 証明可能性述語および Rosser 文に関する体系的な研究が Guaspari and Solovay [6] によって始められ，現在も継続的に行われている．10 年前の Rosser 証明可能性述語に関するサーベイ論文 [26] 以降も，著者らは第 2 不完全性定理や様相論理に関連する研究の一環で Rosser 証明可能性述語の分析を行っており，いろいろな進展があった ([9, 10, 11, 15, 16, 17, 18, 19])．

第 2 不完全性定理は理論の無矛盾性を表す文 Con_T に関する定理であるが，形式的証明可能性の研究においては，Con_T だけではなく，理論の健全性を表す局所反映原理

$$\mathrm{Rfn}_T = \{\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi \mid \varphi \text{ は } T \text{ の言語の文}\}$$

も重要な分析対象である．局所反映原理に関しては Kreisel and Lévy [13] による unboundedness theorem や，Beklemishev [2] による保存性定理が一般的な性質として知られている．Rosser 証明可能性述語と標準的な証明可能性述語の性質を比較する一連の研究の中で，Goryachev [5] は Rosser 証明可能性述語に基づく局所反映原理の研究を開始し，Con_T の場合とは異なり Rfn_T については Rosser 型のものが標準的なものと等しくなりうることを示した．これに続き，Kurahashi

*本研究は JSPS 科研費 (課題番号: JP19K14586，JP23K03200) の助成を受けたものである．
†kogure@stu.kobe-u.ac.jp
‡kurahashi@people.kobe-u.ac.jp

[16] は Rosser 型の局所反映原理が標準的なものとは異なりうること，Rosser 型の局所反映原理に対しても unboundedness theorem が成立することなどを示した．更に最近では Kogure and Kurahashi [10] において Rosser 型の局所反映原理に対する Beklemishev の保存性定理に注目する研究を行っている．

本稿はこうした Rosser 型の局所反映原理に関する研究を中心に，Rosser 文などの関連する話題などについても合わせて，Rosser 証明可能性述語に関してこれまでに知られている結果を紹介することを目的とするものである．第 2 節では証明可能性述語と局所反映原理を導入し，それらの基本的な事実を紹介する．第 3 節において Rosser 証明可能性述語を導入し，Rosser 文や Rosser 型の Henkin 文，そして Rosser 証明可能性述語に対する導出可能性条件について，これまでに知られている結果について紹介する．最後に第 4 節において，Rosser 型の局所反映原理に関してこれまでに得られている諸結果を紹介する．

2 証明可能性述語と局所反映原理

本節では証明可能性述語と局所反映原理を導入し，これらに関する基本的な事実を紹介する．以降，$\mathcal{L}_A$ を一階算術の言語とし，T をペアノ算術 PA の無矛盾かつ計算可能な拡大理論を表すとする．一階算術や不完全性定理に関する基本的な事項は Hájek and Pudlák [7] や Lindström [21] を参照されたい．

定義 2.1 (証明可能性述語)**.** 全ての $\mathcal{L}_A$-文 φ に対して $T \vdash \varphi \iff \mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を満たす Σ_1 論理式 $\mathrm{Pr}_T(x)$ を T の**証明可能性述語**という．

Gödel は不完全性定理の証明の中で証明可能性述語を自然に構成したが，この標準的な証明可能性述語を以降では $\mathrm{Prov}_T(x)$ と表すことにする．また，以降では Con_T を $\neg\mathrm{Prov}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ の略記とする．

$\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n \mid n \geq 1\}$ について，T が **Γ-健全**であるとは，T において証明できる Γ 文が全て標準モデル $\mathbb{N}$ において真であることをいう．次で定める局所反映原理 $\mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Pr}_T)$ は T の Γ-健全性を形式化したものである．

定義 2.2 (局所反映原理)**.** $\mathrm{Pr}_T(x)$ を T の証明可能性述語とするとき，$\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n \mid n \geq 1\}$ について

- $\mathrm{Rfn}(\mathrm{Pr}_T) := \{\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi \mid \varphi$ は $\mathcal{L}_A$ 文 $\}$
- $\mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Pr}_T) := \{\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi \mid \varphi$ は Γ 文 $\}$

をそれぞれ $\mathrm{Pr}_T(x)$ に基づく**局所反映原理**，Γ **局所反映原理**という．

文の集合 X に対して，全ての $\varphi \in X$ について $T \vdash \varphi$ となるとき，$T \vdash X$ と表す．まず，Π_1 局所反映原理は一般に証明不可能である．

命題 2.3. T の任意の証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ について，$T \nvdash \mathrm{Rfn}_{\Pi_1}(\mathrm{Pr}_T)$ である．

証明. $T \vdash \mathrm{Rfn}_{\Pi_1}(\mathrm{Pr}_T)$ と仮定して矛盾を導く．不動点定理を用いて $\mathsf{PA} \vdash \pi \leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \pi \urcorner)$ を満たす Π_1 文 π を取る．仮定より $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \pi \urcorner) \to \pi$ となる．他方 π の取り方より $T \vdash \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \pi \urcorner) \to \pi$ なので，$T \vdash \pi$ となる．したがって $\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \pi \urcorner)$ であり，再び π の取り方より $\mathsf{PA} \vdash \neg\pi$ を得る．これは T の無矛盾性に反する． $\square$

T の無矛盾性と Π_1-健全性は同値なので，命題 2.3 は第 2 不完全性定理の一種だともいえる．他方，Σ_1 局所反映原理は証明できる場合がある．

命題 2.4. T が Σ_1-健全なら，T の証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ が存在して，$\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathrm{Pr}_T)$ となる．

証明. T は Σ_1-健全とする．$\mathrm{Pr}_T(x)$ を Σ_1 論理式 $\mathrm{Prov}_T(x) \land \big(\neg\Sigma_1(x) \lor \mathrm{True}_{\Sigma_1}(x)\big)$ と定める．ここで $\Sigma_1(x)$ は "x が Σ_1 文の Gödel 数" を自然に表現する $\Delta_1(\mathsf{PA})$ 論理式，$\mathrm{True}_{\Sigma_1}(x)$ は任意の Σ_1 文 σ について $\mathsf{PA} \vdash \sigma \leftrightarrow \mathrm{True}_{\Sigma_1}(\ulcorner \sigma \urcorner)$ を満たす Σ_1 論理式である（Kaye [8] および Hájek and Pudlák [7] を参照）．

まずは $\mathrm{Pr}_T(x)$ が T の証明可能性述語であることを確認する．$\mathcal{L}_A$-文 φ を任意にとる．$\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ なら $\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Prov}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ なので $T \vdash \varphi$ を得る．他方，$T \vdash \varphi$ なら $\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Prov}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ である．ここで φ が Σ_1 でなければ $\mathsf{PA} \vdash \neg\Sigma_1(\ulcorner \varphi \urcorner)$ である．他方 φ が Σ_1 であれば T の Σ_1-健全性より $\mathbb{N} \models \varphi$ であり，Σ_1-完全性より $\mathsf{PA} \vdash \varphi$ だから $\mathsf{PA} \vdash \mathrm{True}_{\Sigma_1}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ となる．いずれにせよ $\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ が成り立つ．

最後に σ を任意の Σ_1 文とすれば $\mathsf{PA} \vdash \Sigma_1(\ulcorner \sigma \urcorner)$ なので $\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \sigma \urcorner) \to \mathrm{True}_{\Sigma_1}(\ulcorner \sigma \urcorner)$ となり，$\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \sigma \urcorner) \to \sigma$ が従う．以上より $\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathrm{Pr}_T)$ である． □

第 2 不完全性定理の成立のための十分条件として，導出可能性条件 **D2** と **D3** がよく知られているが，それらに合わせて，**D2** より弱い単調性条件 **M** と，**D3** より強い Σ_1-完全性条件 $\mathbf{\Sigma_1 C}$ も導入しておく．

定義 2.5 (導出可能性条件)**.**

D2：任意の $\mathcal{L}_A$-文 φ, ψ について，$\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$.

D3：任意の $\mathcal{L}_A$-文 φ について，$\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$.

M：任意の $\mathcal{L}_A$-文 φ, ψ について，$T \vdash \varphi \to \psi$ ならば $\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$.

$\mathbf{\Sigma_1 C}$：任意の Σ_1 文 σ について，$\mathsf{PA} \vdash \sigma \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \sigma \urcorner)$.

定理 2.6 (Löb の定理 [22])**.** $\mathrm{Pr}_T(x)$ が **D2** と **D3** を満たすならば，任意の $\mathcal{L}_A$-文 φ について，$T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi$ ならば，$T \vdash \varphi$ となる．

Löb の定理は第 2 不完全性定理の一般化であり，**D2** と **D3** を満たす証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ について，Löb の定理における φ として $0 = 1$ をとれば $T \nvdash \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ が得られる．特に Gödel による証明可能性述語 $\mathrm{Prov}_T(x)$ は導出可能性条件のすべてを満たしていて，したがって $T \nvdash \mathrm{Con}_T$ が成立する．他方，導出可能性条件を満たさない $\mathrm{Pr}_T(x)$ に対しては Löb の定理が成立しないこともある（例えば命題 2.4 の $\mathrm{Pr}_T(x)$ など）．このように証明可能性述語がいくつかの導出可能性条件を満たすかどうかは局所反映原理の性質に影響を及ぼすことがある．

命題 2.7. $\mathrm{Pr}_T(x)$ が **D2** と $\mathbf{\Sigma_1 C}$ を満たすならば，$\neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ と $\mathrm{Rfn}_{\Pi_1}(\mathrm{Pr}_T)$ は T 上で同値である．

証明. $0 = 1$ は Π_1 文なので $T + \mathrm{Rfn}_{\Pi_1}(\mathrm{Pr}_T) \vdash \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ である．他方，Π_1 文 π を任意にとれば $\mathsf{PA} \vdash \neg\pi \leftrightarrow \sigma$ となる Σ_1 文 σ がとれる．特に $\mathsf{PA} \vdash \sigma \to (\pi \to 0 = 1)$ なので，条件 **D2** より $\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \sigma \urcorner) \to \big(\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \pi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)\big)$ となる．条件 $\mathbf{\Sigma_1 C}$ より $\mathsf{PA} \vdash \sigma \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \sigma \urcorner)$ なので，$\mathsf{PA} \vdash \neg\pi \to \big(\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \pi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)\big)$ を得る．したがって $T + \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \pi \urcorner) \to \pi$ が得られた． □

系 2.8. $\mathrm{Pr}_T(x)$ が $\mathbf{D2}$ と $\mathbf{\Sigma_1 C}$ を満たすならば，$T + \mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathrm{Pr}_T) \vdash \mathrm{Rfn}_{\Pi_1}(\mathrm{Pr}_T)$ である．

更にこのとき $T + \mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathrm{Pr}_T)$ が $T + \mathrm{Rfn}_{\Pi_1}(\mathrm{Pr}_T)$ より真に強いことが，Kreisel and Lévy の unboundedness theorem ([13, Theorem 16]) を階層化した次の定理によって得られる．以降，$\Gamma = \Sigma_n$ (resp. Π_n) のとき，$\Gamma^d = \Pi_n$ (resp. Σ_n) とする．

定理 2.9 (Lindström [21, Exercise 4.1] を参照)**.** $\mathrm{Pr}_T(x)$ は $\mathbf{D2}$ と $\mathbf{D3}$ を満たすとする．$\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n \mid n \geq 1\}$ とし，X を Γ^d 文の *c.e.* 集合で $T + X$ が無矛盾とすれば，$T + X \nvdash \mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Pr}_T)$ である．

証明. このような X に対して，Γ^d 文 φ が存在して $T + \varphi$ は無矛盾かつ $T + \varphi \vdash X$ となることが知られている (Lindström [20, Theorem 5])．いま $T + X \vdash \mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Pr}_T)$ と仮定すると，$T + \varphi \vdash \mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Pr}_T)$ であり，$\neg\varphi$ は Γ 文 (と同値) なので，$T + \varphi \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg\varphi \urcorner) \to \neg\varphi$ となるため，$T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg\varphi \urcorner) \to \neg\varphi$ である．$\mathrm{Pr}_T(x)$ の $\mathbf{D2}$ と $\mathbf{D3}$ から Löb の定理が成立するので，$T \vdash \neg\varphi$ となり $T + \varphi$ の無矛盾性に反する． $\square$

$\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_{n+1} \mid n \geq 1\}$ のとき，$\mathrm{Rfn}_{\Gamma^d}(\mathrm{Pr}_T)$ は Γ^d 文からなる c.e. 集合なので，次の系を得る．

系 2.10. $\mathrm{Pr}_T(x)$ は $\mathbf{D2}$ と $\mathbf{D3}$ を満たすとする．$\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_{n+1} \mid n \geq 1\}$ のとき，$T + \mathrm{Rfn}_{\Gamma^d}(\mathrm{Pr}_T)$ が無矛盾ならば $T + \mathrm{Rfn}_{\Gamma^d}(\mathrm{Pr}_T) \nvdash \mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Pr}_T)$ である．

他方，次の Beklemishev の定理は $T + \mathrm{Rfn}(\mathrm{Pr}_T)$ が $T + \mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Pr}_T)$ と比べて大きく離れた強さを持つわけではないことを示している．理論 S, T について，全ての Γ 文 φ について $S \vdash \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$ が成り立つとき，S **は** T **上** Γ**-保存的**であるという．

定理 2.11 (Beklemishev [2, Theorem 1])**.** $\mathrm{Pr}_T(x)$ が $\mathbf{D2}$ と $\mathbf{D3}$ を満たすならば，各 $\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_{n+1} \mid n \geq 1\}$ について，$T + \mathrm{Rfn}(\mathrm{Pr}_T)$ は $T + \mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Pr}_T)$ 上 Γ-保存的である．

Beklemishev は定理 2.11 の証明を，様相論理 $\mathbf{GL}$ の算術的健全性を経由して行っている．最近，$\mathbf{GL}$ を経由しない直接的な証明を与えることで，定理 2.11 を次のように改良できた．

定理 2.12 (Kogure and Kurahashi [10, Theorem 3.1])**.** $\mathrm{Pr}_T(x)$ が $\mathbf{D2}$ を満たすならば，各 $\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_{n+1} \mid n \geq 1\}$ について，$T + \mathrm{Rfn}(\mathrm{Pr}_T)$ は $T + \mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Pr}_T)$ 上 Γ-保存的である．

3 Rosser 証明可能性述語

本節は Rosser 証明可能性述語を導入し，その諸性質を紹介する．

3.1 Rosser 証明可能性述語と Rosser 文

定義 3.1 (Rosser 証明可能性述語)**.** $\mathrm{Prf}_T(x, y)$ を $\mathsf{PA} \vdash \forall x \left(\exists y \, \mathrm{Prf}_T(x, y) \leftrightarrow \mathrm{Prov}_T(x)\right)$ を満たす $\Delta_1(\mathsf{PA})$ 論理式としたとき，

$$\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x) \equiv \exists y \left(\mathrm{Prf}_T(x, y) \land \forall z \leq y \, \neg \mathrm{Prf}_T(\dot{\neg} x, z)\right)$$

を T の **Rosser 証明可能性述語**という．

ここで $\dot{\neg} x$ は φ の Gödel 数から $\neg\varphi$ の Gödel 数を計算する原始再帰的関数に対応する項，またはその関数を表現する論理式を用いた省略表現である．T の Rosser 証明可能性述語は T の証明可能性述語であることが確認できる．定義より $\mathsf{PA} + \mathrm{Con}_T \vdash \forall x \left(\mathrm{Prov}_T(x) \leftrightarrow \mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)\right)$ であるが，しかし $\mathrm{Prov}_T(x)$ と $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ は PA 上では同値ではない．Rosser 証明可能性述語は標準的な証明可能性述語では成立しない次の性質を持つ．

命題 3.2. 任意の $\mathcal{L}_A$-文 φ について，$T \vdash \neg\varphi$ ならば $\mathsf{PA} \vdash \neg\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ となる．

特に φ として $0 = 1$ をとれば $\mathsf{PA} \vdash \neg\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ となり，$\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ に対して第 2 不完全性定理が成立しないことが分かる．

$\mathsf{PA} \vdash \varphi_R \leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(\ulcorner \varphi_R \urcorner)$ を満たす文 φ_R を $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ の（もしくは T の）**Rosser 文**という．Rosser 文 φ_R が，T から証明も反証もできないことは命題 3.2 を用いて容易に確認できる．また Rosser 文 φ_R は Con_T より真に弱い，すなわち $\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Con}_T \to \varphi_R$ だが $T \nvdash \varphi_R \to \mathrm{Con}_T$ である (例えば Boolos [4] を参照)．更に $\mathsf{PA} \vdash \varphi_R \leftrightarrow \left(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(\ulcorner \varphi_R \urcorner) \to \varphi_R\right)$ であることに注意すれば，特に後者の主張は次のように一般化できる．

命題 3.3 (Goryachev [5, Lemma 3]; Kurahashi [16, Theorem 2.7])**.** 任意の $\mathcal{L}_A$-文 φ について，$T \nvdash (\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi) \to \mathrm{Con}_T$ である．

更に $T + \mathrm{Rfn}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T) \vdash \mathrm{Con}_T$ かどうかは $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ の取り方に依存することが分かっている．

定理 3.4.

1. (Goryachev [5]; Kurahashi [16, Theorem 6.8]) $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ と $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ の Π_1 Rosser 文 φ_0，φ_1 および Σ_1 文 σ_0, σ_1 が存在して，次が成立する：
   - $\mathsf{PA} \vdash \varphi_0 \land \varphi_1 \leftrightarrow \mathrm{Con}_T$,
   - $\mathsf{PA} \vdash (\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(\ulcorner \sigma_0 \urcorner) \to \sigma_0) \land (\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(\ulcorner \sigma_1 \urcorner) \to \sigma_1) \to \mathrm{Con}_T$.

   特にこのとき $T + \mathrm{Rfn}_{\Pi_1}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T) \vdash \mathrm{Con}_T$ かつ $T + \mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T) \vdash \mathrm{Con}_T$ である．

2. (Kurahashi [16, Corollary 5.3]) $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ が存在して，$T + \mathrm{Rfn}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T) \nvdash \mathrm{Con}_T$ となる．

$T + \mathrm{Rfn}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T) \vdash \mathrm{Con}_T$ が成立するための十分条件も得られている．

C1: 任意の $\mathcal{L}_A$-文 φ について，$\mathsf{PA} \vdash \neg\mathrm{Con}_T \to \mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \lor \mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(\ulcorner \neg\varphi \urcorner)$.

命題 3.5 (Kogure and Kurahashi [10, Proposition 3.6])**.** $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ が条件 **C1** を満たすならば，$T + \mathrm{Rfn}_{\Sigma_1 \cup \Pi_1}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T) \vdash \mathrm{Con}_T$ となる．

Smoryński [25, Application 5] は T の Σ_1-健全性と $T + \mathrm{Con}_T$ が T 上 Σ_1-保存的であることの同値性を示している．この結果は次のように拡張できる．

定理 3.6 (Švejdar ([21, Exercise 5.2] を参照))**.** φ_R を T の任意の Π_1 Rosser 文としたとき，以下は同値である：

1. T は Σ_1-健全である．
2. $T + \varphi_R$ は T 上 Σ_1-保存的である．

$T + \mathrm{Rfn}_{\Pi_1}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}) \vdash \varphi_R$ なので，定理 3.6 より $T + \mathrm{Rfn}_{\Pi_1}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ が T 上 Σ_1-保存的であることもまた T の Σ_1-健全性と同値であることが分かる．更に $\mathrm{Rfn}_{\Pi_1}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ は $\mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ に置き換えてもよい．

定理 3.7 (Kurahashi [16, Theorem 6.2])**.** 任意の $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ について，次は同値である：

1. T は Σ_1-健全である．

2. $T + \mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ は T 上 Σ_1-保存的である．

$\mathrm{Prov}_T(x)$ の Gödel 文は全て Con_T と PA 上で同値であり，したがって相異なる Gödel 文は全て PA 上で同値であることが知られている．他方，定理 3.4.1 の Rosser 文 φ_0 と φ_1 は，命題 3.3 より T 上で同値になりえない．同値でない Rosser 文を持つ $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ の存在を最初に示したのは Guaspari and Solovay [6, Theorem 6.1] である．一般に，Rosser 文の同値性は $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ の取り方に依存する．

定理 3.8.

1. (Guaspari and Solovay [6, Theorem 6.2]) 全ての Rosser 文が PA 上で同値である $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ が存在する．

2. (Shavrukov [24, Theorem 4.4]) $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ が存在して，$\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ の任意の相異なる Rosser 文 φ_0, φ_1 について，$\mathsf{PA} \nvdash \varphi_0 \leftrightarrow \varphi_1$ となる．

Rosser 文は Gödel 文とは異なる性質をもち，特に Con_T は T の Rosser 文にはなりえない．文が Rosser 文となるための必要十分条件が Arai によって与えられている．

定義 3.9 (Rosser 対)**.** 次を満たす Σ_1 文の組 (σ_+, σ_-) を T の **Rosser 対**という：

1. $\mathsf{PA} \vdash \neg(\sigma_+ \land \sigma_-)$.
2. $\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Prov}_T(\ulcorner \sigma_+ \urcorner) \leftrightarrow \mathrm{Prov}_T(\ulcorner \neg\sigma_+ \urcorner)$.
3. $\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Prov}_T(\ulcorner \sigma_- \urcorner) \leftrightarrow \mathrm{Prov}_T(\ulcorner \neg\sigma_- \urcorner)$.
4. $\mathsf{PA} \vdash \sigma_+ \lor \sigma_- \leftrightarrow \neg\mathrm{Con}_T$.

定理 3.10 (Arai [1])**.** 任意の $\mathcal{L}_A$-文 φ について，以下は同値である：

1. $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ が存在して，φ は $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ の Rosser 文である．

2. T の Rosser 対 (σ_+, σ_-) が存在して，$\mathsf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\sigma_+$ となる．

3.2 Rosser 型の Henkin 文

$\mathsf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \mathrm{Prov}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を満たす文 φ を T の **Henkin 文**という．Löb の定理より，Henkin 文は全て T において証明可能である．同様に，$\mathsf{PA} \vdash \varphi_H \leftrightarrow \mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(\ulcorner \varphi_H \urcorner)$ を満たす文 φ_H を $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ の（もしくは T の）**Rosser 型 Henkin 文**という．定理 3.10 と同様に，Rosser 型 Henkin 文の特徴づけを与えることができる．

定義 3.11 (Henkin 対)**.** 次を満たす Σ_1 文の組 (σ_+, σ_-) を **Henkin 対**という：

1. $\mathsf{PA} \vdash \neg(\sigma_+ \wedge \sigma_-)$.

2. $\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Prov}_T(\ulcorner \sigma_+ \urcorner) \vee \mathrm{Prov}_T(\ulcorner \sigma_- \urcorner) \to \sigma_+ \vee \sigma_-$.

定理 3.12 (Kurahashi [16, Theorem 3.5])**.** 任意の $\mathcal{L}_A$-文 φ について，次は同値である：

1. $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ が存在して，φ は $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ の Rosser 型 Henkin 文である．

2. $\mathsf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \sigma_+$ となる Henkin 対 (σ_+, σ_-) が存在する．

定理 3.12 を用いることで，Rosser 型 Henkin 文にならない文の存在が示される．

命題 3.13 (Kurahashi [16, Proposition 3.9])**.**

1. $T \nvdash \neg\mathrm{Con}_T$ ならば，$\neg\mathrm{Con}_T$ は T の Rosser 型 Henkin 文にならない．

2. $T \vdash \neg\mathrm{Con}_T$ ならば，$\Delta_1(T)$ でない任意の Σ_1 文は T の Rosser 型 Henkin 文にならない．

任意の Rosser 対 (σ_+, σ_-) は Henkin 対であることが確かめられる．このことに定理 3.10 および定理 3.12 を適用することで次の系が得られる．

系 3.14. 任意の Rosser 文 φ_R に対して，ある $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ が存在して，$\neg\varphi_R$ は $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ の Rosser 型 Henkin 文となる．

$\mathsf{PA} \vdash \varphi$ なら任意の $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ について $\mathsf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ であり，φ は T の Rosser 型 Henkin 文である．同様に $\mathsf{PA} \vdash \neg\varphi$ のときも命題 3.2 より φ は T の Rosser 型 Henkin 文であることが分かる．しかし，逆に T の Rosser 型 Henkin 文が必ずしも PA や T において証明または反証ができるとは限らない．実際，系 3.14 は T において独立な Rosser 型 Henkin 文を持つ $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ の存在を示している．他方，T において独立な Rosser 型 Henkin 文が存在するかどうかは $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ の取り方に依存する．

定理 3.15 (Kurahashi [16, Theorem 4.2])**.** $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ が存在して，任意の $\mathcal{L}_A$-文 φ について，$T \vdash \mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$ または $T \vdash \neg\varphi$ となる．

Henkin 対の条件を弱めることで，文 φ が $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$ という形の文と同値となるための必要十分条件が得られる．

定理 3.16 (Kurahashi [19, Corollary 4.5])**.** 任意の $\mathcal{L}_A$-文 φ について，以下は同値である：

1. $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ と $\mathcal{L}_A$-文 ψ が存在して，$\mathsf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$ となる．

2. $\mathsf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \sigma_+$ かつ $\mathsf{PA} \vdash \neg(\sigma_+ \wedge \sigma_-)$ かつ $\mathsf{PA} \vdash \neg\mathrm{Con}_T \to \sigma_+ \vee \sigma_-$ となる Σ_1 文の組 (σ_+, σ_-) が存在する．

定理 3.16 を用いて，命題 3.13 の強化版が得られる．

命題 3.17 (Kurahashi [19, Proposition 4.8])**.** Σ_1 文 σ が存在して，全ての $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ と全ての $\mathcal{L}_A$-文 ψ について $\mathsf{PA} \nvdash \sigma \leftrightarrow \mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$ となる．

Σ_1 文 σ について，σ_+ と σ_- をそれぞれ Σ_1 文 $\sigma \vee \neg\mathrm{Con}_T$ と $0 = 1$ とすれば，定理 3.16 より次の系が得られる．

系 3.18 (Kurahashi [19, Corollary 4.6])**.** 任意の Σ_1 文 σ に対して，$\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ と $\mathcal{L}_A$-文 ψ が存在して，$\mathsf{PA} \vdash (\sigma \vee \neg\mathrm{Con}_T) \leftrightarrow \mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$ となる．

系 3.18 から，次の FGH 定理が直ちに導ける．

系 3.19 (FGH 定理 ([19] を参照))**.** 任意の Σ_1 文 σ に対して，$\mathcal{L}_A$-文 ψ が存在して，$\mathsf{PA} + \mathrm{Con}_T \vdash \sigma \leftrightarrow \mathrm{Prov}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$ となる．

3.3 Rosser 証明可能性述語と導出可能性条件

Rosser 証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ に対して第 2 不完全性定理が成立しないため，$\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ は **D2** と **D3** の少なくとも一方を満たさないことが分かる．Kreisel and Takeuti [14] は $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ が **D2** を満たすか，という問いを提起したが，Guaspari and Solovay [6] もしくは Shavrukov [24] によって整備された様相論理の技術を用いれば，**D2** と **D3** を共に満たさない $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ の存在を容易に示すことができる．更に，全ての Rosser 証明可能性述語に共通して成立する性質は命題 3.2 の規則 $\dfrac{\neg\varphi}{\neg\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(\ulcorner\varphi\urcorner)}$ のみであることが分かっている (Kurahashi [15, Theorem 6.4])．一方で，**D2** と **D3** のそれぞれを満たす $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ も存在し，したがって **D2** と **D3** の成立は $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ の取り方に依存する．

定理 3.20 (Bernardi and Montagna [3, Example 3]; Arai [1])**.** **D2** を満たす $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ が存在する．

定理 3.21 (Arai [1])**.** **D3** を満たす $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ が存在する．

これらの定理により，**D2** と **D3** の一方だけでは第 2 不完全性定理が導けないことが分かる．このように，いくつかの導出可能性条件を満たす Rosser 証明可能性述語を作ることで第 2 不完全性定理の限界を探ることができるため，Rosser 証明可能性述語は第 2 不完全性定理という観点からも有用である．

Kurahashi [18] は **D2** に加えていくつかの条件を満たす Rosser 証明可能性述語の存在を示し，第 2 不完全性定理と導出可能性条件の関係について論じている．**D2** を満たす $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ に対応する様相論理 $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ は **KD** を含む正規様相論理であり，Kurahashi [17] において分析が行われている．次の条件は命題 3.2 を $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ を用いて形式化したものである：

C2: 任意の $\mathcal{L}_A$-文 φ について，$\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(\ulcorner\neg\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)$.

KD に公理 $\Box\neg A \to \Box\neg\Box A$ を加えることで得られる正規様相論理を **KDR** と書くことにすると，次が成立する．

定理 3.22 (Kurahashi [17])**.**

1. (Theorem 3.1) $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}) = \mathbf{KD}$ となる $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ が存在する．
2. (Theorem 4.6) $\mathbf{KDR} \subseteq \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ となる $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ が存在する．
3. (Proposition 4.5) $\mathbf{KDR} \subseteq \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ となる $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ は **C1** を満たさない．

問題 3.23 (Kurahashi [17, Problem 4.14])**.** $\mathbf{KDR} = \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ となる $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ は存在するか？

Kikuchi and Kurahashi [9] では，**D2** を満たす $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ を算術のモデルの観点から分析している．

定義 3.24. T の Rosser 証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ と PA のモデル M に対して，

$$\mathrm{Th}(M; \mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}) := \{\varphi \mid \varphi \text{ は } \mathcal{L}_A\text{-文で } M \models \mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(\ulcorner\varphi\urcorner)\}$$

とする．

このとき，**D2** をモデルを用いてある意味で特徴づけることができる．

命題 3.25 (Kikuchi and Kurahashi [9, Proposition 3.3])**.**

1. $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ が **D2** を満たすなら，任意の $M \models \mathsf{PA}$ について $\mathrm{Th}(M; \mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ は無矛盾である．
2. $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ が **C1** を満たし，任意の $M \models \mathsf{PA}$ について $\mathrm{Th}(M; \mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ が無矛盾なら，$\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ は **D2** を満たす[1]．

[1]論文 [9] はこの主張を **C1** より強い仮定を用いて述べているが，**C1** で十分であることは容易に確かめられる．

命題 3.2 の逆の含意の成立を主張する次の条件を考える．例えば定理 3.15 の $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ はこの条件を満たす．

C3: 任意の $\mathcal{L}_A$-文 φ について，$T \vdash \neg \mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ ならば $T \vdash \neg \varphi$.

次の定理は算術のモデルに対して良い振る舞いをする Rosser 証明可能性述語の存在を示すものである（論文 [9] ではこのような $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ をユニバーサルな Rosser 証明可能性述語と呼んでいる）．

定理 3.26 (Kikuchi and Kurahashi [9])**.**

1. (Proposition 3.4; Theorem 4.7) $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ が **D2** と **C3** を満たすなら，T の任意の無矛盾完全拡大理論 U に対して，$M \models T$ が存在して，任意の $\mathcal{L}_A$-文 φ について $U \vdash \varphi \iff \varphi \in \mathrm{Th}(M; \mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T)$ となる．
2. (Theorem 4.2) **D2** と **C3** を満たす $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ が存在する．

D3 を満たす $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ の様相論理については Kurahashi [15] や Kogure and Kurahashi [11] において議論を行っている．Rosser 証明可能性述語は **D2** と **D3** を共に満たすことはないが，**D2** を **M** に弱めることで次が成り立つ．

定理 3.27 (Kurahashi [18, Theorem 11])**.** **M** と **D3** と **C1** を満たす $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ が存在する[2]．

したがって，**M** と **D3** だけでは第 2 不完全性定理が導けないことが分かる．しかしこれらの条件はまだ，ある形の無矛盾性の証明不可能性を導く強さを持っている．

定義 3.28. T の証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ に対し，T の無矛盾性を表す図式 $\mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{Pr}_T}$ を次で定める：

$$\mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{Pr}_T} := \{\neg\big(\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \land \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg\varphi \urcorner)\big) \mid \varphi \text{ は } \mathcal{L}_A\text{-文}\}.$$

定理 3.29 (Kurahashi [18, Theorem 4])**.** $\mathrm{Pr}_T(x)$ が **M** と **D3** を満たすならば $T \nvdash \mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{Pr}_T}$ である．

定理 3.27 と定理 3.29 を合わせることで，$T \nvdash \mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T}$ を満たす $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ の存在が分かる．またこのことから，一般に $\neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ と $\mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{Pr}_T}$ が同値ではないことが従う．ただし，**D2** を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ についてはこれらは同値であり，このことと定理 3.29 から，**D2** と **D3** を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ について $T \nvdash \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ となるという第 2 不完全性定理（Löb の定理の帰結）を導くこともできる．

次の定理から，Rosser 証明可能性述語は $\mathbf{\Sigma_1 C}$ を満たす証明可能性述語の分析に用いることはできない．

定理 3.30 (Kurahashi [18, Proposition 4])**.** $\mathbf{\Sigma_1 C}$ を満たす $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ は存在しない．

4 Rosser 型の局所反映原理

本節では Rosser 型の局所反映原理 $\mathrm{Rfn}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T)$ について，Goryachev [5]，Kurahashi [16] そして Kogure and Kurahashi [10] において得られている結果について紹介する．

[2]論文 [18] において **C1** を明記はしていないが，証明を読めば **C1** を満たすことが分かる．

4.1 Rosser 型の局所反映原理の諸性質

Rosser 証明可能性述語に基づく局所反映原理 $\mathrm{Rfn}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ の分析は Goryachev [5] によって始められたが，特に Goryachev は $\mathrm{Rfn}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ と $\mathrm{Rfn}(\mathrm{Prov}_T)$ との比較に注目した．まず任意の $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ について，$\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x) \to \mathrm{Prov}_T(x)$ なので $\mathsf{PA} + \mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Prov}_T) \vdash \mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ である．他方 $\mathsf{PA} + \mathrm{Con}_T \vdash \mathrm{Prov}_T(x) \to \mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ なので，Goryachev の分析を階層化した次の結果が成り立つ．

命題 4.1. 任意の $\Gamma \in \{\Pi_n, \Sigma_n \mid n \geq 1\}$ と Rosser 証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ について，以下は同値である：

1. $T + \mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}) \vdash \mathrm{Con}_T$.
2. $\mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Prov}_T)$ と $\mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ は T 上で同値である．

命題 4.1 を定理 3.4.1 と合わせれば次が成り立つ．

系 4.2. $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ が存在して，全ての $\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n \mid n \geq 1\}$ について $\mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Prov}_T)$ と $\mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ は T 上で同値である．

他方，$\mathrm{Rfn}(\mathrm{Prov}_T)$ と $\mathrm{Rfn}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ が T 上で同値でない $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ の存在が命題 4.1 を定理 3.4.2 と合わせれば従う．したがって，$\mathrm{Rfn}(\mathrm{Prov}_T)$ と $\mathrm{Rfn}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ の同値性は $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ の取り方に依存することが分かる．では，$\mathrm{Rfn}(\mathrm{Prov}_T)$ と $\mathrm{Rfn}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ が同値ではない場合に，標準的な $\mathrm{Rfn}(\mathrm{Prov}_T)$ が有しているどのような性質が $\mathrm{Rfn}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ に引き継がれる，または失われるのだろうか．

まず，unboundedness theorem (定理 2.9) は Rosser 証明可能性述語に対しても成立する．

定理 4.3 (Kurahashi [16, Theorem 6.5])**.** $\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n \mid n \geq 1\}$ とする．Γ^d 文の *c.e.* 集合 X について，$T + X$ が無矛盾ならば，任意の $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ について，$T + X \nvdash \mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ となる．

系 4.4. $\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_{n+1} \mid n \geq 1\}$ とする．任意の $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ について，$T + \mathrm{Rfn}_{\Gamma^d}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ が無矛盾ならば，$T + \mathrm{Rfn}_{\Gamma^d}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}) \nvdash \mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ である．更に，任意の $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ について，$T \nvdash \mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ である．

命題 2.8 は $\mathbf{D2}$ と $\mathbf{\Sigma_1 C}$ を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ が $T + \mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathrm{Pr}_T) \vdash \mathrm{Rfn}_{\Pi_1}(\mathrm{Pr}_T)$ となるという主張であり，このことは $\mathrm{Prov}_T(x)$ に対しても成立する．もちろん系 4.2 の $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ については $T + \mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}) \vdash \mathrm{Rfn}_{\Pi_1}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ である．他方，次の定理より $T + \mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ が $\mathrm{Rfn}_{\Pi_1}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ を証明できるかどうかは $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ の取り方に依存することが分かる．

定理 4.5 (Kurahashi [16, Theorem 6.16])**.** $T + \mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}) \nvdash \mathrm{Rfn}_{\Pi_1}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ となる $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ が存在する．

4.2 Rosser 型の局所反映原理と Beklemishev の保存性定理

本稿の最後の話題として，Rosser 型の局所反映原理に対する Beklemishev の保存性定理 (定理 2.11) の成立状況に関する諸結果を紹介する．任意の Rosser 型の局所反映原理 $\mathrm{Rfn}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ に対して Beklemishev の保存性定理と同様の主張は成立するだろうか．まず，定理 2.11 と命題 4.1，および定理 2.12 より，次は明らかである．

命題 4.6. $\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_{n+1} \mid n \geq 1\}$ とする．もし $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ が次の二つの条件の少なくとも一方を満たすとすれば，$T + \mathrm{Rfn}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ は $T + \mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ 上 Γ-保存的である：

1. $T + \mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T) \vdash \mathrm{Con}_T$.

2. $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ は **D2** を満たす.

系 4.2 でとれる $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ や，定理 3.20 でとれる **D2** を満たす $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ について，全ての $\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_{n+1}\}$ について，$T + \mathrm{Rfn}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T)$ が $T + \mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T)$ 上 Γ-保存的である．

条件 **C1** は $T + \mathrm{Rfn}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T) \vdash \mathrm{Con}_T$ となるための十分条件であった (命題 3.5)．定理 3.22 から **D2** を満たすが **C1** を満たさない $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ の存在が従うが，更に次が成立する．

定理 4.7 (Kogure and Kurahashi [10, Theorem 3.8])**.** **D2** を満たすが $T + \mathrm{Rfn}(\mathrm{Pr}_T) \nvdash \mathrm{Con}_T$ となる $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ が存在する．

定理 4.7 は定理 3.4.2 の改良版である．他方，定理 3.27 の $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ は **C1** を満たすが **D2** を満たさないことが分かる．したがって, 特に命題 4.6 に関連する 2 つの条件 “$T + \mathrm{Rfn}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T) \vdash \mathrm{Con}_T$” と **D2** は互いに比較不能である．

ここまでは保存性定理が成立する $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ に関する話題であったが, 保存性定理は全ての Rosser 証明可能性述語に対して成立するわけではない．次の定理はより強く, 全ての $\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n \mid n \geq 1\}$ に対して一様に Π_1-保存性が成り立たない $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ の存在を示している．

定理 4.8 (Kogure and Kurahashi [10, Theorem 4.2])**.** $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ が存在して, 各 $\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n \mid n \geq 1\}$ について $T + \mathrm{Rfn}_{\Gamma^d}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T)$ は $T + \mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T)$ 上 Π_1-保存的でない.

定理 4.8 の $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ は命題 4.6 より $T + \mathrm{Rfn}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T) \nvdash \mathrm{Con}_T$ であり，また **D2** を満たさないことが分かる．よって定理 4.8 は定理 3.4.2 の改良でもある．更に，Γ を固定すれば Π_1-保存性が不成立であることの証拠を Π_1 文 Con_T でとることもできる．したがって，$T + \mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T) \vdash \mathrm{Con}_T$ となる Γ を自由にコントロールすることができる．

定理 4.9 (Kogure and Kurahashi [10, Theorem 4.1])**.** 各 $\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n \mid n \geq 1\}$ に対して，$\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ が存在して，$T + \mathrm{Rfn}_{\Gamma^d}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T) \vdash \mathrm{Con}_T$ かつ $T + \mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T) \nvdash \mathrm{Con}_T$ である．

定理 4.8 と定理 4.9 は $\Gamma \supseteq \Pi_1$ について Γ-保存性が一般には成立しないことを示しているが, Σ_1-保存性については次の定理が成立する．

定理 4.10 (Kogure and Kurahashi [10, Theorem 5.6])**.** 次は同値である：

1. T は Σ_1-健全である．

2. 任意の $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ と任意の $\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n \mid n \geq 1\}$ に対して，$T + \mathrm{Rfn}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T)$ は $T + \mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T)$ 上 Σ_1-保存的である．

3. 任意の $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ に対して, $\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n \mid n \geq 1\}$ が存在して, $T + \mathrm{Rfn}_{\Gamma^d}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T)$ は $T + \mathrm{Rfn}_\Gamma(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T)$ 上 Σ_1-保存的である．

謝辞

本稿に対して多くの改善点をコメントしてくださった神戸大学の畑中直之氏に感謝いたします．

参考文献

[1] Toshiyasu Arai. Derivability conditions on Rosser's provability predicates. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 31(4):487–497, 1990.

[2] Lev D. Beklemishev. Notes on local reflection principles. *Theoria*, 63(3):139–146, 1997.

[3] Claudio Bernardi and Franco Montagna. Equivalence relations induced by extensional formulae: classification by means of a new fixed point property. *Fundamenta Mathematicae*, 124:221–233, 1984.

[4] George Boolos. Reflection principles and iterated consistency assertions. *The Journal of Symbolic Logic*, 44:33–35, 1979.

[5] S. V. Goryachev. Arithmetic with a local reflection principle for Rosser provability formulas. *Mathematical Notes*, 46(3):689–694, 1989.

[6] David Guaspari and Robert M. Solovay. Rosser sentences. *Annals of Mathematical Logic*, 16(1):81–99, 1979.

[7] Petr Hájek and Pavel Pudlák. *Metamathematics of first-order arithmetic*. Perspectives in Mathematical Logic. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[8] Richard Kaye. *Models of Peano arithmetic*, volume 15 of *Oxford Logic Guides*. Oxford: Clarendon Press, 1991.

[9] Makoto Kikuchi and Taishi Kurahashi. Universal Rosser predicates. *The Journal of Symbolic Logic*, 82(1):292–302, 2017.

[10] Haruka Kogure and Taishi Kurahashi. On the conservation results for local reflection principles. *Journal of Logic and Computation*. 受理.

[11] Haruka Kogure and Taishi Kurahashi. Arithmetical completeness theorems for monotonic modal logics. *Annals of Pure and Applied Logic*, 174(7):Paper No. 103271, 2023.

[12] Georg Kreisel. Ordinal logics and the characterization of informal concepts of proof. In *Proc. Internat. Congress Math. 1958*, pages 289–299. Cambridge Univ. Press, New York, 1960.

[13] Georg Kreisel and Azriel Lévy. Reflection principles and their use for establishing the complexity of axiomatic systems. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 14:97–142, 1968.

[14] Gerog Kreisel and Gaisi Takeuti. Formally self-referential propositions for cut free classical analysis and related systems. *Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne)*, 118, 1974.

[15] Taishi Kurahashi. The provability logic of all provability predicates. *Journal of Logic and Computation*. 受理.

[16] Taishi Kurahashi. Henkin sentences and local reflection principles for Rosser provability. *Annals of Pure and Applied Logic*, 167(2):73–94, 2016.

[17] Taishi Kurahashi. Rosser provability and normal modal logics. *Studia Logica*, 108(3):597–617, 2020.

[18] Taishi Kurahashi. Rosser provability and the second incompleteness theorem. In *Advances in mathematical logic*, volume 369 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 77–97. Springer, Singapore, 2021.

[19] Taishi Kurahashi. Some observations on the FGH theorem. *Studia Logica*, 111(5):749–778, 2023.

[20] Per Lindström. On partially conservative sentences and interpretability. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 91(3):436–443, 1984.

[21] Per Lindström. *Aspects of incompleteness*, volume 10 of *Lect. Notes Log.* Natick, MA: Association for Symbolic Logic, 2nd edition, 2003.

[22] Martin Hugo Löb. Solution of a problem of Leon Henkin. *The Journal of Symbolic Logic*, 20(2):115–118, 1955.

[23] Barkley Rosser. Extensions of some theorems of Gödel and Church. *The Journal of Symbolic Logic*, 1:87–91, 1936.

[24] V. Yu. Shavrukov. On Rosser's provability predicate. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 37(4):317–330, 1991.

[25] Craig Smoryński. Calculating self-referential statements. *Fundamenta Mathematicae*, 109:189–210, 1980.

[26] 倉橋太志. Rosser 可証性述語について. **科学基礎論研究**, 41(2):13–21, 2014.

[27] 前原昭二. **数学基礎論入門（復刊版）**. 朝倉書店, 2006.