中間述語論理における
否定論理式に制限したExistence Property
に関する予備的覚書*

静岡大学　理学部数学教室　鈴木信行
Nobu-Yuki Suzuki
Department of Mathematics, Faculty of Science, Shizuoka University

2024年5月10日

概 要

Existence property (EP) と disjunction property (DP) は、所謂 "構成性" を端的に表す性質として知られ、重要な研究対象である。∃ と ∨ の直感的な対応から、EP と DP は関連があるだろうと推察され、実際、種々の算術的体系では密接に関連していることが知られている。一方、中間述語論理においては、これらは互いに独立な性質である。とはいえ、単に無関係とは思えないわけであり、ここを端緒として、述語論理の量化子の性質を理解することをもくろみ、このところ EP の弱い亜種を考察している。その一環として、否定に注目した弱い EP を考えてみた。本稿は、現時点の途中経過報告である。

1　はじめに

Existence property (EP) と disjunction property (DP) は、所謂 "直観主義的システムの構成性" を端的に表す性質[1]としてよく知られており、数理論理学の黎明期から今日に至るまで重要な研究対象である[2]。その名から察せられる通り、それぞれ ∃ と ∨ に関する性質である。ここで EP と DP とは何かをざっくりと書いておこう。システム $\mathcal{S}$ が EP を持つとは、次が成り立つことである:

$$\exists x A(x) \text{ が } \mathcal{S} \text{ で証明可能} \Rightarrow \text{ ある } v \text{ が存在して } A(v) \text{ が } \mathcal{S} \text{ で証明可能。}$$

*A preliminary note on existence property for negated formulas in intermediate predicate logics 本研究は JSPS 科研費 JP20K03716, JP21H00694 の助成を受けたものです。本稿は、筆者の現在進行中の研究の要旨です。This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Numbers JP20K03716 and JP21H00694. This article is an extended abstract of the author's work in progress.

[1] Wikipedia の記事 [21] でも、"hallmarks" と紹介されている。(*cf.* Rathjen[16])

[2] 文献を幾つか挙げておくと、古くは Gödel[7], Gentzen[6], Rasiowa[15], Kleene[8] といった著名な先達が並ぶ。比較的最近でも Kurahashi[10] などがある。包括的な紹介は浅学の筆者の手に余るので、読者各位の興味に応じて検索してみてほしい。

$\mathcal{S}$ が DP を持つとは、次が成り立つことである:

$$A \vee B \text{ が } \mathcal{S} \text{ で証明可能} \Rightarrow A \text{ が } \mathcal{S} \text{ で証明可能 または } B \text{ が } \mathcal{S} \text{ で証明可能。}$$

なるほど、見るからに「構成性」を示していると言ってよいように思われる。ここで注意してほしいのだが、EP と DP は「構成性」を示す特徴であって、「直観主義論理であること」の特徴付けにはなっていない。実際、直観主義論理に公理型を付加して得られる中間述語論理のなかに EP と DP を持つものが無限個存在することが知られている[3] (Ferrari-Miglioli[2], S.[17, 20])。その文脈では、EP と DP はそれぞれ、量化子 $\exists$ と論理結合子 $\vee$ の「構成性」を示す特徴と考えられる。

実際に研究されている EP や DP は、興味を持っている観点や対象となる $\mathcal{S}$ などにの文脈に依存して少しずつ異なる形態になる。例えば、$\exists x A(x)$ や $A \vee B$ や v に対する制限といった違いがある。そうした違いはさておくとして、これらふたつの性質の相互関係は、算術にかかわるところでは同値になる現象が多く報告されている (Friedman[3], Friedman-Shard[4], Kurahashi[10] など)。一方、中間述語論理では、これらは互いに独立であることが知られている (Minari[11], Nakamura[12], S.[19])。これは何らかの不調和にも見える。この「いっけんすると不調和」を理解することを端緒にして、pure な述語論理の理解、就中、存在量化子 ($\exists$) の理解につながって行くものと考えて研究を進めている。

上記で「中間述語論理では、これら (EP と DP) は互いに独立である」と書いたが、少し仮定を加えれば近づけることもできる。その様子を見てみよう。

定義 1.1. (S[19]) 次の推論規則を $(Z\mathrm{R})$ と呼ぶ:

$$\frac{A \vee (p(x) \to p(y))}{A}(Z\mathrm{R})$$

ここで、p は 1 変数述語変数、x と y は相異なる個体変数で、どれも A に出現しないものある。中間述語論理 $\mathbf{L}$ は、$(Z\mathrm{R})$ について閉じているとき、**Z-正規** (Z-normal) であるという。

Z-正規性は弱い DP であり、意味論的にも自然な性質である[4]。次を見てほしい。

命題 1.2 (S[19])**.** (1) 中間述語論理が *DP* を持てば、それは Z 正規である。

(2) *Kripke bases (i.e., partially ordered sets)* のクラスによって特徴付けされる中間述語論理は、すべて Z-正規である。

(3) 完備 *Heyting* 代数のクラスによって特徴付けされる中間述語論理は、すべて Z-正規である。

---

[3]例えば、公理型 $MP: \forall x(A(x) \vee \neg A(x)) \wedge \neg\neg\exists x A(x) \to \exists x A(x)$ を直観主義述語論理に加えて得られる中間述語論理は EP と DP を持つ。この論理では、$\exists$ の性質が直観主義論理のものから拡張されているように見える。そしてそこでの $\exists$ も EP を維持している。

[4]もちろん、自明な性質ではない。Z-正規でない中間述語論理も無限個存在する。

Z-正規性を仮定すると、EP は DP を導く。すなわち:

命題 1.3 (S[19]). 中間述語論理 **L** は Z-正規であるとする。**L** が *EP* をもてば *DP* を持つ。

この命題は、EP に弱い DP を付け足してすこし DP 側に押して (nudge) やれば、DP を持つようになる、と言っているようにも見える。

では、DP に弱い EP を付け足すことで、同じような現象は起こらないだろうか？

このような観点から、弱い EP を幾つか考察することを始めた。そのうえで、DP(およびその仲間) と組み合わせみて、どんな状況なのを調べて行きたい。本稿はその一環として、否定記号付きの論理式 (negated formulas、本稿では仮に否定論理式と呼ぶことにする) に制限した EP を考えてみた、という話の始まりのところの報告である。とはいえ、めぼしい進捗があるとは言い難い。いや、さっぱり進んでいないのが正直なところである。諸賢のご寛恕を願う次第である。また、助言やコメントを歓迎する。

本稿の構成について:

中間述語論理およびその Kripke 意味論に関する基本事項は、講究録の既出記事 ([23, 24]) で紹介しており、これらの記事はネットで容易に入手できるので省略する。留意してほしい点がふたつ。中間述語論理で使用される言語が、いわゆる pure first-order language (*cf.* Church[1]) で、関数記号も個体定数記号も持たず、等号も持たないこと[5]。よって、項 (terms) は個体変数のみであり、等号公理も無い。また、項 (個体変数) の代入の際に個体変数の「衝突」を避ける工夫として、合同な論理式という概念が (厳密な議論をするためには) 必要であること。本稿では、煩瑣になるのを避けるために、簡略な記述で済ませる。以下では特に断らない限り、中間述語論理を単に「論理」と呼ぶ。

第 2 節で、これまで導入してあった弱い EP とその周辺事項について簡略に紹介する。そして、本稿で扱う弱い EP(否定論理式に制限された EP, EPneg) を導入する。第 3 節で現在わかっていることを述べる。第 4 節では、まとめと今後の研究に向けてのコメントを述べる。

2 弱い Existence Properties

まず、中間述語論理の EP と、すでに導入してある EP のふたつの弱い亜種である wEP と sEP の定義を紹介しておこう。それらの簡単な解説の後に、本稿で取り扱う (と言うか、現在研究中であるがさっぱり進んでいない) 弱い EP を導入する。

定義 2.1. (1) 論理 **L** が *existence property* (EP) を持つとは、**L** で証明可能な任意の $\exists x A(x)$ に対して、ある個体変数記号 w が存在して、$A(w)$ が **L** で証明可能であることとする。

[5] 公理型を記述する言語と考えておけばわかりやすいであろう。

(2) (*cf.* Prawitz[14], Komori[9]) 論理 **L** が *weak existence property* (wEP) を持つとは、**L** で証明可能な任意の $\exists x A(x)$ に対して、$A(w) \vee A(v_{i_1}) \vee \cdots \vee A(v_{i_n})$ が **L** で証明可能であることとする。ここで、w は $\exists x A(x)$ に出現しない個体変数で、$\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}\}$ は $\exists x A(x)$ の自由変数の全体である。

(3) (S.[23, 18]) 論理 **L** が *sentential existence property* (sEP) を持つとは、**L** で証明可能な任意の sentence $\exists x A(x)$ に対して、$\exists x A(x)$ に出現しない個体変数 v が存在して、$A(v)$ が **L** で証明可能であることとする。

wEP や sEP を持つ論理で Kripke frame で定義できる例を挙げておこう (S.[23])。

例 2.2. (1) Kripke base が線形順序集合である Kripke frames で特徴づけられる論理 **Lin** は wEP を持つ。

(2) Kripke base が $\mathbf{2} = \{0, 1\}$、domain が $D(0) = \{0\}$, $D(1) = \omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ で決まる Kripke frame $(\mathbf{2}, D)$ で特徴づけられる論理 **LV** は sEP を持つ。

定義から自明であるが、弱い EP のひとつである wEP を仮定すれば、DP は EP を導く[6]。EP、wEP、sEP の三者の相互導出関係は、まず自明に:

- EP を持てば wEP を持つ
- wEP を持てば sEP を持つ

ことがわかる。それぞれの逆については、次のようになっている (S.[23], *cf.* [18])。

命題 2.3. (1) 例 *2.2(1)* の **Lin** は *wEP* を持ち、*EP* を持たない。すなわち、*wEP* は *EP* を導かない。

(2) 例 *2.2(2)* の **LV** は *sEP* を持ち、*wEP* を持たない。すなわち、*sEP* は *wEP* を導かない。

かくして EP、wEP、sEP の間の相互導出関係は、次頁の図 1 で尽くされる。$X \to Y$ は、X から Y が導かれることを示す。「次の図で尽くされる」とは、この図には $\to$ を付け加えられないことを言っている。

では、本稿で考察したい EP の弱い亜種を導入しよう。

定義 2.4. 論理 **L** が *existence property for negated formulas* (EPneg) を持つとは、**L** で証明可能な任意の $\exists x \neg A(x)$ に対して、個体変数 v が存在して、$\neg A(v)$ が **L** で証明可能であることとする。

EPneg は、EP を否定論理式 $(\neg A(x))$ に制限した性質になっているわけである。否定論理式をほかの形、例えば $A \wedge B$ や $\forall y A$ の形の論理式に替えて見かけ上は異なる性質

[6] Pawitz[14] は直観主義述語論理の DP と wEP を示すことを経由して、その EP を示している。Komori[9] でも、意味論的な手法を使って、同じ経路である中間述語論理の EP を示している。

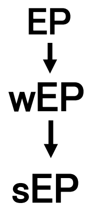

図 1: EP、wEP、sEP の相互導出関係

を定義することもできるが、それらはすべて EP と同値になってしまうので、否定論理式に制限する EPneg の場合だけが本質的である。当面の目標として、EPneg が wEP や sEP とどういう関係になっているかを調べたい。すでに扱っていた wEP と sEP の場合と違って、EPneg が他の EP の亜種から導かれるかどうかは、「定義から自明」とはならないので[7]、考察を要する。簡単にわかかることとしては:

命題 2.5. 論理 **L** が *EPneg* を持つことは、次の性質 $(*)$ を持つことと同値である。

$(*)$ **L** で証明可能な任意の $\exists x A(x)$ に対して、ある個体変数 v が存在して、$\neg\neg A(v)$ が **L** で証明可能である。

また、例 2.2(1) の **Lin** は wEP を持ち EPneg を持たないことが、命題 2.3(1) とほとんど同様の議論で示すことができる。すなわち、wEP は EPneg を導かない。

3 現在までにわかっているちょっとしたこと

この節の目的は、次の命題を示すことである。

命題 3.1. *wEP* と *EPneg* を共に持ち、*EP* を持たない論理が存在する。すなわち、*EPneg* と *wEP* を共に仮定しても *EP* は導かれない。

まず、簡単な補題 3.2 を用意する。それを使って、EPneg を持つことの十分条件を与える (補題 3.4)。それを利用して、命題 3.1 の論理を構成する。

補題 3.2. $A(v_{i_1},\dots,v_{i_n})$ を $v_{i_1},\dots,v_{i_n}$ 以外に自由変数を持たない論理式で、第 1 階古典述語論理で証明不可能とする。このとき、個体領域を $\omega=\{0,1,2,\dots\}$ とする第 1 階古典述語論理の解釈 I が存在して、$A(\overline{i_1},\dots,\overline{i_n})$ は I で偽になる。ここで各 $\overline{i_j}$ $(j=1,\dots,n)$ は $i_j\in\omega$ の名辞であり、$A(\overline{i_1},\dots,\overline{i_n})$ は $A(v_{i_1},\dots,v_{i_n})$ の個体変数 $v_{i_1},\dots,v_{i_n}$ にそれぞれ $\overline{i_1},\dots,\overline{i_n}$ を代入して得られる sentence である。

[7] こうすればよい！という提案があれば、もちろん大歓迎。

証明は、第1階古典述語論理の完全性定理の証明を注意深く行えばできるので、ここでは詳述する必要はないであろう。(論理式を構成する言語が pure であることに注意すると、より証明がしやすい。)

次に、この後重要になる Kripke frame $(\mathbf{M}, \omega)$ を導入する。

定義 3.3. $(\mathbf{M}, \omega)$ は、$\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ を定領域とし、次で定める半順序集合 $\mathbf{M}$ を Kripke base とするものである。

$\mathbf{M} = \omega = \{0, 1, \dots\}$ with $\leq$: $i \leq j \Leftrightarrow i = 0$ or $i = j$. (下図参照)

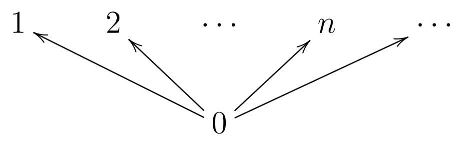

図 2: $\mathbf{M}$

補題 3.4. 論理 $\mathbf{L}$ が次のふたつの条件を満たすとする。

(1) $\mathbf{L} \vdash \forall x \neg\neg p(x) \to \neg\neg\forall x p(x)$,

(2) $\mathbf{L}$ で証明可能な論理式は、$(\mathbf{M}, \omega)$ で妥当である *(i.e.,* $(\mathbf{M}, \omega)$ で恒に真*)*。

このとき、$\mathbf{L}$ は *EPneg* を持つ。

証明[8]**.** 論理 $\mathbf{L}$ が条件を満たすとする。個体変数の全体を $\{v_0, v_1, v_2, \dots\}$ とする。$v_0, \dots, v_n$ 以外に自由変数を持たない論理式 $\exists x \neg A(x, v_0, \dots, v_n)$ を考える。任意の個体変数 v_i $(i = 0, 1, \dots, n, n+1, \dots)$ に対して、$\neg A(v_i, v_0, \dots, v_n)$ が $\mathbf{L}$ で証明不可能であると仮定して、$\exists x \neg A(x, v_0, \dots, v_n)$ が $\mathbf{L}$ で証明不可能であることを示す。

条件 (1) より、各 i $(i = 0, 1, \dots, n, n+1, \dots)$ に対して $\neg A(v_i, v_0, \dots, v_n)$ が古典述語論理で証明不可能である[9]。補題 3.2 によって、各 j $(j = 1, 2, \dots)$ に対して、ω を個体領域とする第1階古典述語論理の解釈 I_j が存在して、$\neg A(\overline{j-1}, \overline{0}, \dots, \overline{n})$ が I_j で偽であるようにできる。これらを $\mathbf{M}$ の j $(j = 1, 2, \dots)$ に貼り付けて Kripke frame $(\mathbf{M}, \omega)$ 上の解釈 $\models$ とする。作り方から明らかに、任意の $i \in \omega$ に対して $0 \not\models \neg A(\overline{i}, \overline{0}, \dots, \overline{n})$ である。よって、$0 \not\models \exists x \neg A(x, \overline{0}, \dots, \overline{n})$ となる。条件 (2) より、$\exists x \neg A(x, v_0, \dots, v_n)$ は $\mathbf{L}$ で証明不可能である。 $\square$

では、所望の論理 (wEP と EPneg を共に持ち、EP を持たない) の構成に着手しよう。

---

[8]この証明を厳密に書くには、個体変数の代入の際の「衝突」を避ける工夫が必要になるが、本質的ではないのでこだわらずにおく。第1節の「本稿の構成について」を参照してください。

[9]Glivenko-Kuroda の定理による。ほとんど Folklore であるが、例えば、sequent calculus LK の cut 消去定理を使って行う命題論理での Glivenko の定理の証明を述語論理に書き換えることを考え、(1) の公理型を付加的に使うことを許せば、そのまま通ってしまう、という方法がよく知られている。

定義 3.5 (S.[23])**.** (1) $(\mathbf{N}, D)$ を最小元 0_N を持つ Kripke frame とし、V を $D(0_N)$ の空でない部分集合とする。新しい元 0 を用意し、これを $\mathbf{N}$ の最小元の下に新しい最小元として付加して得られる半順序集合を $0 \uparrow \mathbf{N}$ と書く。この 0 における個体領域を V と定めれば、自然に $0 \uparrow \mathbf{N}$ 上に個体領域が定義でき[10]、これによって $0 \uparrow \mathbf{N}$ を Kripke base とする Kripke frame が定義できる。この Kripke frame を $V \uparrow (\mathbf{N}, D)$ と書く。V が有限集合のとき、$V \uparrow (\mathbf{N}, D)$ は、$(\mathbf{N}, D)$ から**有限的↑で得られる**と言う。

(2) Kripke frames の集合 $\mathscr{C}$ を、定義 3.3 で定めた $(\mathbf{M}, \omega)$ に有限回 (ゼロ回を含む) の有限的↑を行って得られる Kripke frames の全体とする。($(\mathbf{M}, \omega)$ は $\mathscr{C}$ の元である。)

(3) $\mathscr{C}$ によって特徴付けられる論理を $\mathbf{L}_1$ とする。

この $\mathbf{L}_1$ が補題 3.4 の条件を満たすことは明らかである。よって $\mathbf{L}_1$ は EPneg を持つ。また、S.[23, 補題 3.4] を使うと、$\mathbf{L}_1$ は wEP を持つことが言える。あとは $\mathbf{L}_1$ が EP を持たないことを示せばよい。直接 EP の反例となる論理式を示してもよいが、せっかくなので (?) 第 1 節の命題 1.3 を使おう。そのためには次の補題を示せばよい。

補題 3.6. (1) $\mathbf{L}_1$ は Z-正規である。

(2) $\mathbf{L}_1$ は DP を持たない。

証明. (1): 論理式 A が $\mathbf{L}_1$ で証明不可能と仮定する。1 変数述語変数 p と相異なる個体変数 x と y で、A に出現しないものを取って、$A \vee (p(x) \to p(y))$ が $\mathbf{L}_1$ で証明不可能であることを示す。A には $v_0, \ldots, v_n$ 以外の自由変数が出現しないしてよい。A を $A(v_0, \ldots, v_n)$ と書く。(もちろん、x と y は $v_0, \ldots, v_n$ とは異なる。)

$\mathbf{L}_1$ は $\mathscr{C}$ によって特徴付けられるから、$\mathscr{C}$ の Kripke frame $(\mathbf{N}, D)$ と $d_0, \ldots, d_n \in D(0_N)$ が存在して、$0_N \not\models A(\overline{d_0}, \ldots, \overline{d_n}\ )$ である。ここで 0_N は $\mathbf{N}$ の最小元である。ひとつの元 $e_1 \in D(0_N)$ を取り、これのコピーとするべく fresh な元 e_2 を用意する。各 $n \in \mathbf{N}$ の領域を $E(n) = D(n) \cup \{e_2\}$ として、Kripke frame $(\mathbf{N}, E)$ を作る。$(\mathbf{N}, E)$ は $\mathscr{C}$ の元とみなしてよい。$(\mathbf{N}, E)$ 上の解釈 $\models'$ を定めよう[11]。A に出現する m 変数述語変数 q に対しては、e_1 と e_2 が互いに他のコピーとなるように $\models$ に従って決める:

$$n \models' q(\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_m}) \iff n \models q(\overline{f'_1}, \ldots, \overline{f'_m}) \ .$$

ここで、f'_j は、f_j が e_2 のときは e_1 であり、それ以外は f_j 自身である。そして、p については次のようにする:

$$n \models' p(\overline{f}) \iff n \neq 0_N \text{ or } f = e_1 \ .$$

$0_N \not\models' A(\overline{d_0}, \ldots, \overline{d_n}\ )$ かつ $0_N \not\models' p(e_1) \to p(e_2)$ であるから、$0_N \not\models A(\overline{d_0}, \ldots, \overline{d_n}\ ) \vee (p(e_1) \to p(e_2))$ であり、$A \vee (p(x) \to p(y))$ はこの Kripke frame $(\mathbf{N}, E)$ で valid でない。よって、$\mathbf{L}_1$ で証明不可能となる。

[10] 具体的に $0 \uparrow \mathbf{N}$ 上の domain E を書くなら: $E(0) = V$, $E(n) = D(n)$ $(n \in \mathbf{N})$.

[11] Kripke frames 間の p-morphism をご存じの読者には、「$(\mathbf{N}, D)$ は $(\mathbf{N}, E)$ の p-morphic image であるから」と申し上げれば足りるはずである。(*cf.* S.[19, §2.2])

(2): 相異なる命題変数 p, q を取って、$((p \vee \neg p) \to q) \vee (q \to (p \vee \neg p))$ が $\mathscr{C}$ のどの Kripke frame でも valid であることと、$(p \vee \neg p) \to q$ も $q \to (p \vee \neg p)$ も $(\mathbf{M}, \omega)$ で valid でないことを確かめればよい。 □

この証明の副産物として、次がわかる。

系 3.7. 中間述語論理において、*Z*-正規性を仮定しても、*EPneg* は *DP* を導かない。

現在わかっているのは、この辺りまでである。状況を図示すると次のようになる。$X \not\longrightarrow Y$ は、X から Y が導かれないことを表す。前出の図 1 の場合のように「次の図で尽くされる」というところまでは進んでいない。

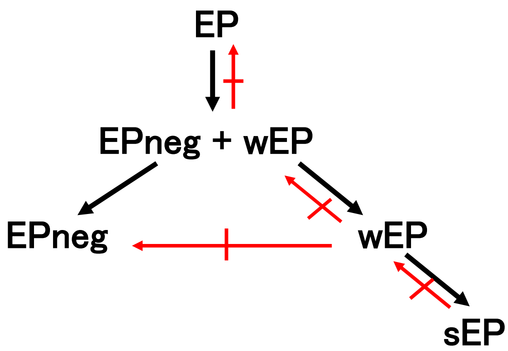

図 3: EP、wEP、sEP、EPneg の相互導出関係 (未完成)

4 おわりに

本稿では、弱い EP 研究の一環として EPneg を導入し、緒に就いたばかりの研究について途中経過を紹介した。この性質と EP、wEP、sEP の相互導出関係については、図 3 のところまではわかっているが、まだそこで止まっている。汗顔の至りである。当面の課題としては、次の問題を考えたい。

問題 4.1. *EPneg* は、*wEP* あるいは *sEP* を導くか?

ぜひ詳細を知りたいと思う。アイデアやヒントをお持ちの方、お知らせいただきたい。これがわかれば、図 3 を完成して「尽くされる」とすることができる。

ここで、関連して気になる点をいくつか書いておこう。

1. 第 1 節で述べた着眼点である「EP に弱い DP を付け足す」「DP に弱い EP を付け足す」を調べる方面につて、wEP と sEP およぶ DP と *Z*-正規性にかかわる部分につ

いては、わかっていることもある。次の図4では、それを示してあり、「この図で尽くされる」状況になっている。これにEPnegを加えたいわけであるが、問題4.1が「導かない」と解決された場合、EPneg、wEP、sEPは一直線には並んでいないので、もっと複雑な図になるだろう。問題4.1がどうなるのかが、ますます気になる。

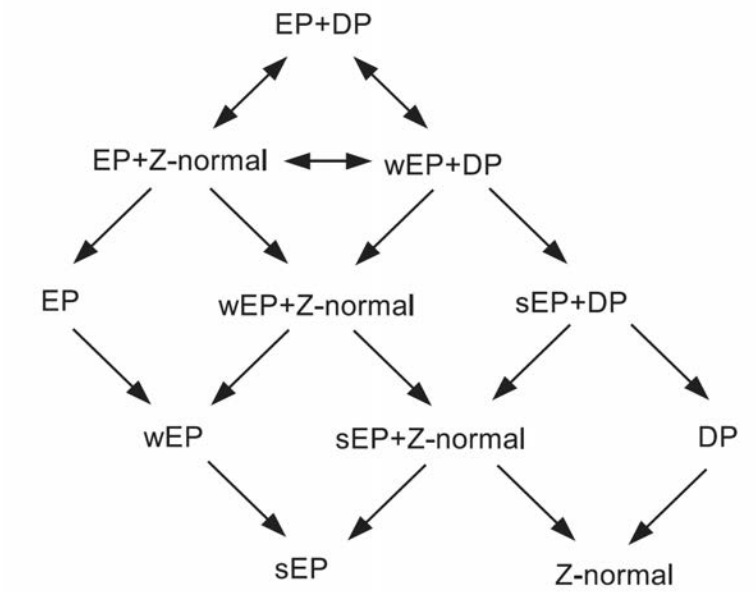

図 4: EP、wEP、sEP および DP、Z-正規性

2. 中間述語論理の言語はpureであることには、論理自体の性質、そして量化子そのものの性質を考える上での利点はあると思う。しかし、個体定数記号・関数記号がある言語で考える方が、EP（この場合はterm existence property）の面白さや重要さを増すと見ることもできる。中間述語論理をこうした言語で考えてEPに関連した問題を調べることについて、S.[22]で中間的な報告をしてある。こちらもあまり進んでいないのだが、読者の参考までに挙げておく。研究の進捗が気にかかる。ご意見・ご指摘をいただきたい。

3. 第1節でも述べたが、EPとDP(のvariants)は、算術にかかわるところでは同値になる現象が見られる。中間述語論理で起こっている現象と算術で起こっている現象は、本質的な不調和なのか? それぞれで取り扱われているEPとDPのvariantsに起因する特別なことなのか?? あるいは研究の「露頭」が見えているということなのか??? 算術にかかわっておられる専門家のご意見を戴ければ幸甚である。

4. しばらく前からディスカッションをしている大森仁さん(東北大学)との間で、次のような性質が面白そうだという話になったことがある。

定義 4.2 (Counter Example Property, CEP)**.**
$\mathbf{L} \vdash \neg\forall x A(x)$ ならば、ある v が存在して $\mathbf{L} \vdash \neg A(v)$.

CEP は、その名の通り「反例に関する EP」といってもよい自然な定義だろう。また、これは EPneg の双対とも見られる。次の命題が解っている。

命題 4.3 (大森). 中間述語論理の定義から「古典述語論理の *subsystem* である」という条件を省いて対象を広げたものを、超直観主義述語論理と呼ぶ。さすれば：
超直観主義述語論理 **L** が *CEP* を持つための必要十分条件は、$\mathbf{L} \vdash \exists xp(x) \to \neg\neg\forall xp(x)$ である。

この命題により、中間述語論理の範囲では CEP を持つものは存在しないことが解る。そのような論理は、contra-classical な論理となる。これは、EP の本質、もっと積極的に量化子 $\exists, \forall$ の本質を考えるうえで、考察対象を広げていく可能性を示唆してはいないだろうか? Omori-Wansing[13] で扱われている connexive logics では、EP や DP が議論されている。Connexive logics は contra-classical logics の一種で、すでにかなりの研究が積み重ねられている。今後の有望な分野融合的研究になって行ってほしい。

謝辞

否定論理式に注目する観点は、大森仁さんや共同研究 [5] での共同研究者（藤原誠さん、石原哉さん、根元多佳子さん、横山啓太さん）との様々なディスカッションに触発されたことが大きい。また、一倉海斗君（当時は静岡大学大学院修士の学生、現在は東北大学大学院）とのディスカッシもきっかけになった。みなさんに感謝します。(目ぼしい進捗がないのは、勿論、筆者自身の責めに帰すものです。)
本稿は、日本学術振興会 科学研究費補助金 JP20K03716, JP21H00694 の助成を受けた現在進行中の研究の一部分です。

参考文献

[1] Church, A., **Introduction to Mathemasical Logic I**, Princeton University Press, Princeton (1956).

[2] Ferrari, M. and Miglioli, P., (1993) *Counting the maximal intermediate constructive logics*, **Journal of Symbolic Logic**, Vol.58(1993), 1365–1401.

[3] Friedman, H., *The disjunction property implies the numerical existence property*, **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, 72(1975), 2877–2878.

[4] Friedman, H. and Sheard, M., *The equivalence of the disjunction and existence properties for modal arithmetic*, **Journal of Symbolic Logic** 54(1989), 1456–1459.

[5] Fujiwara, M., Ishihara, H., Nemoto, T., Suzuki, N.-Y., and Yokoyama, K., *Extended frames and separations of logical principles*, **Bulletin of Symbolic Logic**, 29(2023), 311–353.

[6] Gentzen, G., *Untersuchungen über das logische Schließen*, **Mathematische Zeitschrift** 39(1934-35), 176–210, 405–431.

[7] Gödel, K., *Zum intuitionistischen aussagenkalkül*, **Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien** 69(1932), 65–66.

[8] Kleene, S. C., *Disjunction and existence under implication in elementary intuitionistic formalisms*, **Journal of Symbolic Logic** 27(1962), 11–18. (*An addendum*, the same journal 28(1963), 154–156.)

[9] Komori, Y., *Some results on the super-intuitionistic predicate logics*, **Reports on Mathematical Logic** 15 (1983), 13–31.

[10] Kurahashi, T., *On partial disjunction properties of theories containing Peano arithmetic*, Archives Mathematical Logic 57(2018), 95–980.

[11] Minari, P., *Disjunction and existence properties in intermediate predicate logics*, **Atti del Congresso Logica e Filosofia della Scienza, oggi. San Gimignano, dicembre 1983. Vol.1 – Logica.** (1986), 7–11. CLUEB, Bologna (Italy).

[12] Nakamura, T., *Disjunction property for some intermediate predicate logics*, **Reports on Mathematical Logic** 15(1983), 33–39.

[13] Omori, H., and Wansing, H., *An extension of connexive logic C*. **Advances in modal logic**, 13, 503–522, College Publications, London, (2020).

[14] Prawitz, D., **Natural deduction. A proof-theoretical study**, Acta Universitatis Stockholmiensis. Stockholm Studies in Philosophy, No. 3 Almqvist & Wiksell, Stockholm 1965. (Reprint: Dover Publications, 2006)

[15] Rasiowa, H., *Constructive theories*, **Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences**, Classe III, 2(1954), 121–124.

[16] Rathjen, M,, *The disjunction and related properties for constructive Zermelo-Fraenkel set theory*, **Journal of Symbolic Logic**, 70(2005), 1233–1254.

[17] Suzuki, N.-Y., *A remark on the delta operation and the Kripke sheaf semantics in super-intuitionistic predicate logics*, **Bulletin of Section of Logic, University of Łódź**, 25(1996), 21–28.

[18] Suzuki, N.-Y., *Some weak variants of the existence and disjunction properties in intermediate predicate logics*, **Bulletin of the Section of Logic** (2017), 93–109.

[19] Suzuki, N.-Y., *A negative solution to Ono's problem P52: Existence and disjunction properties in intermediate predicate Logics*, in **Hiroakira Ono on Substructural Logics** (Outstanding Contributions to Logic 23), 319–337. (2022), Springer.

[20] Suzuki, N.-Y., *A note on disjunction and existence properties in predicate extensions of intuitionistic logic —An application of Jankov formulas to predicate logics—*, in **V.A. Yankov on Non-Classical Logics, History and Philosophy of Mathematics** (Outstanding Contributions to Logic 24), 221–244. (2022), Springer.

[21] *Disjunction and existence properties — Wikipedia, The free Encyclodedia* URL= `https://en.wikipedia.org/wiki/Disjunction_and_existence_properties`

日本語

[22] Suzuki, N.-Y., *Prawitz-Doorman Term Existence Property* を超直観主義述語論理で考える, **京都大学数理解析研究所講究録** No.1832 (2013), 88–96. `https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1832-09.pdf`

[23] 鈴木信行, **中間述語論理における** *Existence Property* **に関する注意**, **京都大学数理解析研究所講究録** No. 1950 (2015), 40–51. `https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1950-05.pdf`

[24] 鈴木信行, **中間述語論理における選言特性と存在特性および** *Kripke* **完全性に関する注意**, **京都大学数理解析研究所講究録** No. 2150 (2019), 56–65 `https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2150-05.pdf`

〒 422–8529
静岡市駿河区大谷 836
静岡大学理学部数学教室
suzuki.nobuyuki@shizuoka.ac.jp

Department of Mathematics
Faculty of Science
Shizuoka University
Ohya 836, Suruga-Ku
Shizuoka, 422–8529
JAPAN
suzuki.nobuyuki@shizuoka.ac.jp