

Newton polyhedra and oscillatory integrals with rational phases

九州大学大学院数理学府数理学専攻 水野宏真

Hiromichi Mizuno

Department of Mathematics, Graduate School of Mathematics, Kyushu University

概要

本稿では相関数を有理関数とした場合の振動積分の漸近解析に関して RIMS 共同研究「複素幾何における葉層と力学系の諸問題」において講演した内容について概説する。本研究は九州大学の神本丈氏との共同研究である。

1 振動積分と局所ゼータ関数

まず初めに本稿の主な議論の対象である振動積分を定義する。特に断りのない限り、 f と φ は $\mathbb{R}^n$ の原点の近傍 U 上で定義されたなめらかな実数値関数とし、かつ φ はその台が U に含まれているものとする。振動積分とは次のような積分で定義される実パラメータの関数である：

$$I_\varphi(t; f) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{itf(x)} \varphi(x) dx \quad (t \in \mathbb{R}).$$

f と φ はそれぞれ $I_\varphi(t; f)$ の相関数、振幅関数と呼ばれる。振動積分の性質に関してしばしば興味を持たれるのはパラメータ t を非常に大きくした場合の挙動である。一般に $t \rightarrow \infty$ において $I_\varphi(t; f)$ の値は 0 に減衰していくのであるが、その漸近的な挙動に相関数 f の臨界点 (critical point) における性質が強く現れる。ここで、 f の臨界点とは f の勾配が消えるような定義域内の点である。

本稿では特に断らない限り f は $x = 0$ に臨界点を持ち、かつ $f(0) = 0$ を仮定する。 f がなめらかな関数の場合以下のようなことが知られている。

- f が臨界点を持たない場合、任意の自然数 N に対して定数 $C \neq 0$ が存在して $|I_\varphi(t; f)| \leq Ct^{-N}$ ($t \geq 1$) が成立する (Proposition 4 in [10] Chapter 8).
- f が $x = 0$ に臨界点を持つとする。また多重指数 $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ に対し $\left| \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} f(0) \right| \geq 1$ を満たすとする。このとき、定数 $C \neq 0$ が存在して $|I_\varphi(t; f)| \leq Ct^{-1/|k|}$ ($t \geq 1$) が成立する。ただし $|k| = k_1 + \dots + k_n$ (Proposition 5 in [10] Chapter 8).

このように $I_\varphi(t; f)$ の漸近挙動を解析することと $f^{-1}(0)$ の幾何学的性質を解析することには密接なつながりがある。

りがある. f が実解析関数の場合, Malgrange [8] と Jeanquartier [3] は $f^{-1}(0)$ に対して広中の特異点解消を適用することによって以下のような $I_\varphi(t; f)$ の漸近形を得ている.

定理 1.1 ([8], [3]). f は U 上の実解析関数とする. このとき, 負の有理数からなる等差数列 P が存在して $I_\varphi(t; f)$ は以下のような漸近展開を満たす.

$$I_\varphi(t; f) \sim \sum_{\alpha \in P} \sum_{k=1}^n C_{\alpha,k} t^\alpha (\log t)^{k-1} \quad (t \rightarrow \infty).$$

定理中の等差数列 P は $f^{-1}(0)$ の特異点解消に由来するものであり, f から具体的に P を求めることは一般的にはできない. 以下, 定理 1.1 の証明を概説する. この漸近展開は局所ゼータ関数と呼ばれる一変数の複素関数を解析することによって得られる.

関数 f, φ は振動積分のものと同じものとする. 積分

$$Z_\varphi(s; f) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^s \varphi(x) dx \quad (s \in \mathbb{C})$$

は $\operatorname{Re}(s) > 0$ で広義一様収束し正則関数を定める. これを**局所ゼータ関数**と呼ぶ. $Z_\varphi(s; f)$ はしばしば残りの複素平面に有理型関数として解析接続されるのであるが, 次のような関係から $Z_\varphi(s; f)$ の極の性質が $I_\varphi(t; f)$ の漸近展開に現れる.

$$Z_\varphi(s; f) \xrightarrow{\text{逆 Mellin 変換}} \mathcal{K}_f(u) \xrightarrow{\text{Fourier 変換}} I_\varphi(t; f).$$

ここで, $\mathcal{K}_f(u)$ は実数 u に対し $\mathcal{K}_f(u) := \int_{\{f=u\}} \varphi(x) \frac{dx}{df}$ で定められる関数であり Gelfand-Relay 関数と呼ばれる. u が f の臨界値でなければ well-defined であることが知られている.

f に対し特異点解消を適用し, 部分積分を繰り返すことにより, $Z_\varphi(s; f)$ は $\mathbb{C}$ 全体に有理型関数として解析接続され, その極が負の有理数からなる等差数列 P に含まれ各極の位数が高々 n であることがわかる. 詳細はここでは割愛するが興味のある方は [2] などを参照していただきたい. $Z_\varphi(s; f)$ の逆 Mellin 変換により $\mathcal{K}_f(u)$ は $c > 0$ を用いた線積分

$$\mathcal{K}_f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Z_\varphi(s; f) u^{-s-1} ds$$

で表される. Cauchy の積分定理の適用により積分路を左に動かしていくことで $\mathcal{K}_f(u)$ の漸近展開の各項が各極における $Z_\varphi(s; f) u^{-s-1}$ の留数として求められ,

$$\mathcal{K}_f(u) \sim \sum_{\alpha \in P} \sum_{k=1}^n A_{\alpha,k} |u|^{-\alpha} (\log |u|)^{k-1} \quad (|u| \rightarrow 0)$$

のような漸近展開が得られる. この各項に Fourier 変換を施すことで定理 1.1 を得る.

上述の議論から振動積分の漸近展開を求めることと局所ゼータ関数の解析接続の様子を調べることはほぼ同義であることがわかる. 実解析関数に関する局所ゼータ関数の解析において重要な役割を担っているのは広中

の特異点解消定理なのであるが, f が実解析的というだけでは定量的な解析をすることができない. この事実が振動積分の漸近展開が定量的に求められないことにつながっている. 次節では, f に実解析性に加えてある種の非退化性を仮定した上で定理 1.1 を定量化した結果を紹介する.

2 トーリック多様体の理論の応用による定量的な解析

ここでは, 前節で紹介した Malgrange らの定理を定量化した Varchenko [11] の結果を紹介する. Varchenko は f から Newton 多面体と呼ばれる図形を作り, その幾何学的性質に基づいたトーリック多様体の理論を用いて具体的な特異点解消を構成することにより定理 1.1 を定量化した.

まず [11] の結果で重要な役割を持つ Newton 多面体とそれに関連した用語の説明をする. f は原点の近傍 U で定義された実解析関数とし, 原点で $f(x) \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha x^\alpha$ のような Taylor 展開を持つとする. $S_f := \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n : c_\alpha \neq 0\}$ とすると f の **Newton 多面体** とは $[\bigcup_{\alpha \in S_f} \{\alpha + \mathbb{R}_+^n\}]$ の凸包として定義され, 本稿では $\Gamma_+(f)$ と表記する. f の **Newton 距離** とは $d_f := \min\{t > 0 : (t, \dots, t) \in \Gamma_+(f)\}$ で定義される数である. また, 点 $(d_f, \dots, d_f)$ を含む次元が最小の面を $\Gamma_+(f)$ の主要面といい, 主要面の余次元を d_f の **Newton 多重度** といい m_f と表記する. 幾何学的には $\Gamma_+(f)$ の境界と対角線の交点の座標が d_f であり, その交点を含む最小の面の余次元が m_f となる. この 2 つの数の組 (d_f, m_f) を f の **Newton データ** と呼ぶ. これらの定義は座標の取り方に依存していることに注意が必要である. 実際, 座標変換を行うと f の Taylor 展開の多重指数が変わり, それに伴って $\Gamma_+(f)$ の形状や Newton データの値も全て変化する.

Varchenko は [11] の結果において次のような非退化性を仮定している.

定義 2.1. γ を $\Gamma_+(f)$ のコンパクトな面とし, $f_\gamma(x) := \sum_{\alpha \in \gamma \cap \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha x^\alpha$ と定める. f が Newton 多面体 $\Gamma_+(f)$ に関して非退化であるとは, $\Gamma_+(f)$ の任意のコンパクトな面 γ に対して, f_γ の勾配が $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$ 上消えないことを言う.

Newton 多面体と同様にこの非退化条件も座標の取り方に依存していることに注意しておく. 本稿では割愛するが, この非退化条件は Newton 多面体から作られたトーリック写像が我々の解析に必要な特異点解消としての性質を満たすことを保証するのに必要である. Newton 多面体からトーリック多様体を作り, 特異点解消を構成するプロセスについては [6], [5] などを参照していただきたい.

定理 2.2 ([11],[1]). (i) f は Newton 多面体に関して非退化, (ii) φ は U 上 $\varphi(x) \geq 0$ かつ $\varphi(0) > 0$ を満たす, を仮定する. さらに, (iii) 以下の 3 つのうち少なくとも一つを満たすとする.

(a) $d_f > 1$.

(b) f は U 上非負もしくは非正.

(c) $1/d_f$ が奇数ではない, かつ $\Gamma_+(f)$ の主要面 γ_* に対し $U \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$ 上で $f_{\gamma_*} \neq 0$.

このとき, 定数 $C \neq 0$ が存在し次が成り立つ.

$$I_\varphi(t; f) = Ct^{-1/d_f}(\log t)^{m_f-1} + O(t^{-1/d_f}(\log t)^{m_f-2}) \quad (t \rightarrow \infty).$$

実は定理中の条件 (i) だけでも $|I_\varphi(t; f)| \leq C't^{-1/d_f}(\log t)^{m_f-1}$ という評価までは得ることができる. 重要なのは 2 つの仮定 (ii), (iii) を加えることで漸近展開の先頭の項, つまり最も特異性が強く表れている項を Newton データを用いて決定できることである. 主張の中にある定数 C は f や φ を用いて具体的に表示することができ, 条件 (ii), (iii) はその定数が 0 にならないための十分条件となっている.

3 相関数がある有理関数の場合

前節までの結果を踏まえて, この節では相関数 f を f/g に置き換えた次のような振動積分を考える:

$$I_\varphi(t; f/g) := \int_{\mathbb{R}^n \setminus g^{-1}(0)} e^{it \frac{f(x)}{g(x)}} \varphi(x) dx.$$

ここでは実解析関数の比で表される関数のことを有理関数と呼んでおり, 通常の意味での有理関数 (多項式の比で表される関数) より広いクラスを指している. 解析関数の場合同様, f, g は $x = 0$ に臨界点を持ち, かつ $f(0) = g(0) = 0$ を満たすとする. この関数に対して以下の二つのことを考える.

(A) $t \rightarrow \infty$ において実解析関数の場合と同様の漸近展開が $I_\varphi(t; f/g)$ でも得られるか.

(B) 相関数の分母 g の特異性はどのような形で現れるか.

(B) に関しては相関数が $1/g$ にしたものの部分積分を考えることで, $t \rightarrow \infty$ において任意の自然数 N に対し $I_\varphi(t; 1/g) = O(t^{-N})$ が成立することがわかる. これは相関数内の g の特異性はパラメータ t が大きい場合には表れないということを示している. 一方で, 一次元の場合の結果として次のようなものが知られている.

定理 3.1 ([4]). 正の実数 α に対し $I_\alpha(t) = \int_0^\infty e^{it \frac{1}{x^\alpha}} \varphi(x) dx$ とする. 任意の自然数 N に対して以下が成り立つ.

$$I_\alpha(t) = \sum_{j=1}^{\lfloor \alpha N \rfloor} A_{\alpha,j} t^{j/\alpha} + \sum_{j=1}^{\lfloor \alpha N \rfloor} B_{\alpha,j} t^{j/\alpha} \log t + E_N(t).$$

ここで, $\lfloor a \rfloor$ は a を超えない最大の整数, $E_N(t) \in C^N(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ のとき $B_{\alpha,j} = 0$.

この定理は変数変換 $y = 1/x^\alpha$ と φ の原点における Taylor 展開, Fourier 変換により示される. 定理中の $A_{\alpha,j}$ と $B_{\alpha,j}$ は $\varphi^{(j)}(0)$ ($j = 0, 1, \dots$) とガンマ関数を用いて定量的に与えられ, 該当する係数が 0 でない場合 $I_\alpha(t)$ は $t \neq 0$ ではなめらかであるが $t = 0$ では微分不可能であることがわかる. 相関数が解析関数の場合, 積分の収束により $I_\varphi(t; f)$ が $t = 0$ でも微分可能であることが従うため, g の特異性は振動積分の $t = 0$ における

なめらかさに現れることが推測される。この性質は $I_\alpha(t)$ に対し形式微分を考えることでも推測されることであるが、より正確に $t = 0$ における微分可能性について知るためには定理 3.1 のような表示を得る必要がある。

一般の次元においても $f^{-1}(0) \cup g^{-1}(0)$ に特異点解消を考えることで、Veys と Galindo [12] は次のような結果を得ている。

定理 3.2 ([12]). $I_\varphi(t; f/g)$ は $t \rightarrow \infty, 0$ において次のような漸近展開を持つ。

(a) 負の有理数からなる等差数列 P_- が存在して、 $t \rightarrow \infty$ のとき

$$I_\varphi(t; f/g) \sim \sum_{\alpha \in P_-} \sum_{k=1}^n C_{\alpha,k}(\varphi) t^\alpha (\log t)^{k-1}.$$

(b) 正の有理数からなる等差数列 P_+ と $E(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ が存在して、 $t \rightarrow 0$ のとき

$$I_\varphi(t; f/g) \sim \sum_{\beta \in P_+ \setminus \mathbb{N}} \sum_{k=1}^n D_{\beta,l}^{(1)}(\varphi) t^\beta (\log t)^{l-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=2}^{n+1} D_{j,l}^{(2)}(\varphi) t^j (\log t)^{l-1} + E(t).$$

この定理は Malgrange による結果 (定理 1.1) を有理関数の場合まで拡張したものである。 P_+ と P_- は Malgrange の場合同様 $f^{-1}(0) \cup g^{-1}(0)$ の特異点解消に由来するものであり、定量的に求めることはできない。主張 (b) の漸近展開の第 1,2 項が $I_\varphi(t; f/g)$ の特異性を表す部分に該当している。

定理 3.2 は次のような局所ゼータ関数の解析接続を調べることで得られる：

$$Z_\varphi(s; f/g) := \int_{\mathbb{R}^n \setminus g^{-1}(0)} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|^s \varphi(x) dx \quad (s \in \mathbb{C}).$$

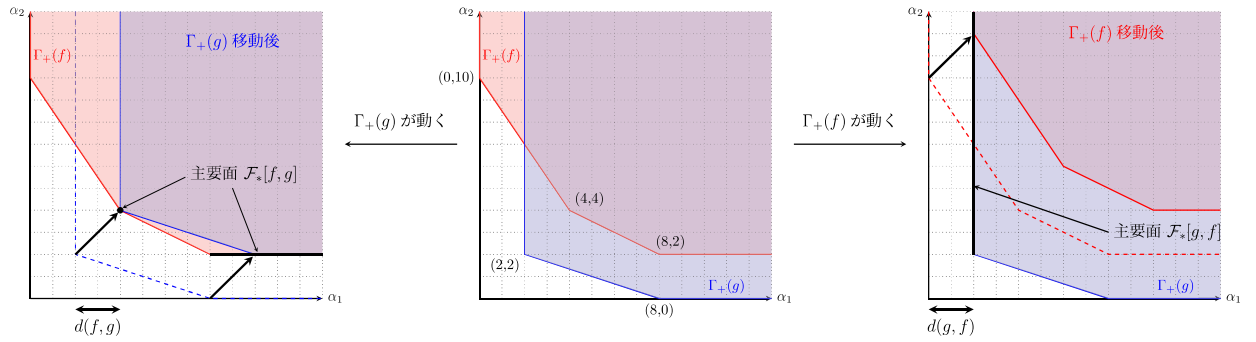
この積分は原点を含む領域 $\{s \in \mathbb{C} : -\alpha < \operatorname{Re}(s) < \beta\}$ ($\alpha, \beta > 0$) で広義一様収束し正則関数を定めることが知られている (この事実は φ の台のコンパクト性からは直ちに從わず、証明には特異点解消が必要である)。特異点解消の適用により $Z_\varphi(s; f/g)$ は $\mathbb{C}$ 全体に有理型関数として解析接続され、その極が有理数からなる等差数列に含まれることがわかる。解析関数の場合と同様の議論から $I_\varphi(t; f/g)$ の $t \rightarrow \infty$ における漸近展開に $Z_\varphi(s; f/g)$ の負の極が対応し、 $t \rightarrow 0$ における漸近展開に正の極が対応している。

本稿の主定理は定理 3.2 を Varchenko の意味で定量化したものである。この定理は Varchenko の結果の有理関数の場合への拡張にもなっており、 $g \equiv 1$ のとき解析関数の場合に一致する。

まず、有理関数の場合の議論に必要な Newton データを定義する。この場合 $t \rightarrow \infty, 0$ の 2 つの漸近展開があるため 2 通りの Newton データが必要となる。 (f, g) の **Newton 距離** とは $d(f, g) := \min\{d \geq 0 : (\Gamma_+(g) + (d, \dots, d)) \subset \Gamma_+(f)\}$ で定義される非負の有理数である。幾何学的には $\Gamma_+(g)$ を対角方向に平行移動し、 $\Gamma_+(f)$ に完全に含まれるのに必要な最小の距離が $d(f, g)$ である。従って、 $d(f, g) = 0$ となる場合も起こり得る。 $d(f, g) > 0$ の場合 $(\Gamma_+(g) + (d(f, g), \dots, d(f, g))) \cap \Gamma_+(f) \neq \emptyset$ である。そこで $\alpha \in \partial\Gamma_+(f)$ に対し $\gamma_f(\alpha)$ を α を含む次元が最小の $\Gamma_+(f)$ の面としたとき、 $\Gamma_+(f)$ の **主要面** の集合を $\mathcal{F}_*[f, g] := \{\gamma_f(\alpha) : \alpha \in (\Gamma_+(g) + (d(f, g), \dots, d(f, g))) \cap \Gamma_+(f)\}$ で定める。そして $d(f, g)$ の **多重度** を

$m(f, g) := \max\{\text{codim}(\gamma_*) : \gamma_* \in \mathcal{F}_*[f, g]\}$ で定める. $(d(f, g), m(f, g))$ の組みを (f, g) の **Newton データ** と呼ぶ. (g, f) の Newton データ $(d(g, f), m(g, f))$ も同様に (上述の定義で f と g を入れ替えたものとして) 定義する.

例 1. 文章での説明だけでは (f, g) の Newton データは分かりにくいと思われるので, $n = 2$ で $f(x_1, x_2) = x_1^8 x_2^2 + x_1^4 x_2^4 + x_2^{10}$ と $g(x_1, x_2) = x_1^8 + x_1^2 x_2^2$ の場合の例を図とともに載せておく.



この例では, (f, g) と (g, f) の Newton データは以下ようになる.

$$d(f, g) = 2, \quad \mathcal{F}_*[f, g] = \{(4, 4), \{(\alpha_1, 2) : \alpha_1 \geq 8\}\}, \quad m(f, g) = 2;$$

$$d(g, f) = 2, \quad \mathcal{F}_*[g, f] = \{(2, 2), \{(\alpha_2, 2) : \alpha_2 \geq 2\}\}, \quad m(g, f) = 1.$$

注意 3.3. (f, g) の Newton データは 2 節で紹介した Newton 距離とその多重度の一般化になっている. すなわち次が成立する:

$$d(f, 1) = d_f, \quad m(f, 1) = m_f.$$

本稿における主定理を述べる. 以下 φ は U 上 $\varphi(x) \geq 0$ かつ $\varphi(0) > 0$ を満たすとする.

定理 3.4 ([9]). $f \cdot g$ がニュートン多面体に関して非退化であり, $d(f, g) > 0$ かつ $d(g, f) > 0$ とする.

(i) 以下の 3 つのうち少なくとも 1 つを満たすとする.

(a) $d(f, g) > 1$;

(b) f は U 上非負もしくは非正;

(c) $1/d(f, g)$ が奇数ではない, かつ主要面 $\gamma_* \in \mathcal{F}_*[f, g]$ で $U \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$ 上 $f_{\gamma_*} \neq 0$, $\text{codim}(\gamma_*) = m(f, g)$ を満たすものが存在する.

このとき, 定数 $C \neq 0$ が存在して $t \rightarrow \infty$ で

$$I_\varphi(t; f/g) = Ct^{-1/d(f, g)}(\log t)^{m(f, g)-1} + O(t^{-1/d(f, g)}(\log t)^{m(f, g)-2}).$$

(ii) $1/d(g, f) \notin \mathbb{N}$ かつ以下の 3 つのうち少なくとも 1 つを満たすとする.

(d) $d(g, f) > 1$;

(e) g は U 上非負もしくは非正;

(f) 主要面 $\tau_* \in \mathcal{F}_*[g, f]$ で $U \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$ 上 $g_{\tau_*} \neq 0$, かつ $\text{codim}(\tau_*) = m(g, f)$ を満たすものが存在する.

このとき, 定数 $D^{(1)} \neq 0$ が存在して $t \rightarrow 0$ において

$$I_\varphi(t; f/g) - E(t) = D^{(1)} t^{1/d(g, f)} (\log t)^{m(g, f)-1} + O(t^{1/d(g, f)} (\log t)^{m(g, f)-2}).$$

(iii) $1/d(g, f) \in \mathbb{N}$ かつ以下の 2 つのうち少なくとも 1 つを満たすとする.

($\tilde{e}$) (ii) - (e) を満たす;

($\tilde{f}$) $1/d(g, f)$ が偶数かつ (ii) - (f) を満たす.

このとき, 定数 $D^{(2)} \neq 0$ が存在して $t \rightarrow 0$ において

$$I_\varphi(t; f/g) - E(t) = D^{(2)} t^{1/d(g, f)} (\log t)^{m(g, f)} + O(t^{1/d(g, f)} (\log t)^{m(g, f)-1}).$$

ここで, $E(t)$ は $E(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx$ を満たす C^∞ 関数.

定理 3.4(ii),(iii) では $1/d(g, f)$ が整数か否かで先頭項の対数項の次数が異なることに注意する. これによりどちらの場合でも $t = 0$ において微分不可能な項が現れることになる. $d(f, g) = 0$ の場合 $t \rightarrow \infty$ において特異性を示す項は現れない, すなわち任意の自然数 N に関して $I_\varphi(t; f/g) = O(t^{-N})$ が成り立つ. 同様に, $d(g, f) = 0$ の場合も $t \rightarrow 0$ において特異性を示す項は現れず $I_\varphi(t; f/g)$ は $t = 0$ において (右側微分の意味で) なめらかな関数となる.

以下, 定理 3.4 の証明を概説する. 2 節で紹介したように大部分は局所ゼータ関数 $Z_\varphi(s; f/g)$ の解析接続を調べることに帰着される. より詳細な議論は [5] を参照されたい.

($Z_\varphi(s; f/g)$ の有理型解析接続)

まず, f と g の Newton 多面体の幾何学的な情報を用いて $Z_\varphi(s; f/g)$ の極の位置を記述する. $\Gamma_+(f)$ の n 次元の面について標準ユークリッド内積に関する双対を考えることで非負整数成分のベクトルが得られる. この操作を $\Gamma_+(f)$ と $\Gamma_+(g)$ の各 n 次元の面に対して行うことで有限集合 $\{a^j\}_{j=1}^N \subset \mathbb{Z}_+^n$ を得る. (より正確にはユニモジュラーな細分をおこなった後に得られるものである). ベクトル $a \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して,

$$l_f(a) := \min_{\alpha \in \Gamma_+(f)} \langle a, \alpha \rangle, \quad l_g(a) := \min_{\alpha \in \Gamma_+(g)} \langle a, \alpha \rangle \quad (\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ はユークリッド内積})$$

で定めると, $Z_\varphi(s; f/g)$ の極は次に含まれる:

$$\underbrace{\left\{ -\frac{|a^j| + \mathbb{Z}_+}{l_f(a^j) - l_g(a^j)} : j = 1, \dots, N \right\}}_P \cup (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \quad (|a^j| = a_1^j + \dots + a_n^j).$$

ただし, 上の集合において $l_f(a^j) = l_g(a^j)$ となる j は除外しておくこととする. l_f と l_g の大小関係により, 上の集合は正の元, 負の元の両方が現れる. 正の元の集合を P_+ , 負の元の集合を P_- とすると, $d(f, g)$, $f(g, f)$ の定義から次がわかる.

- $(P_- \text{ の最大元}) = -1/d(f, g)$ かつ $Z_\varphi(s; f/g)$ が $s = -1/d(f, g)$ に極を持てばその位数は高々 $m(f, g)$.
- $(P_+ \text{ の最小元}) = 1/d(g, f)$ かつ $Z_\varphi(s; f/g)$ が $s = 1/d(g, f)$ に極を持てばその位数は高々 $m(g, f)$.

さらに定理 3.4 の仮定が満たされているとき次のことがわかる:

- $Z_\varphi(s; f/g)$ は $s = -1/d(f, g)$ に位数 $m(f, g)$ の極を持つ.
- $Z_\varphi(s; f/g)$ は $s = 1/d(g, f)$ に位数 $m(g, f)$ の極を持つ.

これは各極における $Z_\varphi(s; f/g)$ の Laurent 展開の係数を計算し, それらが消えないことを確認することで示される (Theorem 4.3 in [5]).

$(I_\varphi(t; f/g)$ の漸近解析)

1 節での議論同様 $Z_\varphi(s; f/g)$ に対して逆 Mellin 変換と Fourier 変換を適用することで $I_\varphi(t; f/g)$ の漸近展開を得る. ここでは $K_{f/g}(u) := \int_{\{f/g=u\}} \varphi(x) \frac{dx}{d(f/g)}$ という Gelfand-Relay 関数を考える. 逆 Mellin 変換により $K_{f/g}(u)$ は

$$K_{f/g}(u) := \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Z_\varphi(s; f/g) u^{-s-1} ds$$

で表される. このとき, 積分路の c は $-\alpha < c < \beta$ ($Z_\varphi(s; f/g)$ が収束する領域) を満たしていないと逆 Mellin 変換が定義できないことに注意する. 積分路を左に動かすと $K_{f/g}(u)$ の $u \rightarrow 0$ における漸近展開, 右に動かすと $u \rightarrow \infty$ における漸近展開が得られる. P_+ と P_- に由来する漸近展開の項のみ考えるとそれぞれの先頭項は次のようになる.

$$\begin{aligned} K_{f/g}(u) &= \tilde{C} |u|^{1/d(f,g)} (\log |u|)^{m(f,g)-1} + O(|u|^{1/d(f,g)} (\log |u|)^{m(f,g)-2}) \quad (|u| \rightarrow 0) \\ K_{f/g}(u) &= \tilde{D} |u|^{-1/d(g,f)} (\log |u|)^{m(g,f)-1} + O(|u|^{-1/d(g,f)} (\log |u|)^{m(g,f)-2}) \quad (|u| \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

これらの各項に Fourier 変換に関する次の補題を適用することで定理 3.4 を得る.

補題 3.5 ([7], [4]). (a) 実数 $\lambda, \epsilon > 0$, 非負整数 ρ に対し $t \rightarrow \infty$ で次が成立する:

$$\int_0^\epsilon e^{itx} |x|^{\lambda-1} (\log |x|)^{\rho-1} dx = A_\lambda t^{-\lambda} (\log t)^{\rho-1} + O(t^{-\lambda} (\log t)^{\rho-2}).$$

(b) 実数 $\lambda > -1$, $L \gg 0$, 非負整数 ρ に対し $t \rightarrow 0$ で次が成立する:

$$\int_L^\infty e^{itx} |x|^{-\lambda-1} (\log |x|)^{\rho-1} dx = \begin{cases} B_\lambda t^\lambda (\log t)^{\rho-1} + O(t^\lambda (\log t)^{\rho-2}) & (\lambda \notin \mathbb{Z}); \\ C_\lambda t^\lambda (\log t)^\rho + O(t^\lambda (\log t)^{\rho-1}) & (\lambda \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

注意 3.6. $Z_\varphi(s; f/g)$ の極で $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対応する項は $I_\varphi(t; f/g)$ の漸近展開には表れない. これは Fourier 変換を適用する過程で対応する項の係数が必ず 0 になるということが保証されているからである. 注意したいのが一般に等差数列 P にも整数が含まれ, こちらの極に対応する項は $I_\varphi(t; f/g)$ の漸近展開に現れる可能性がある. 従って $t \rightarrow \infty$ において t の整数冪の項が全く表れないというわけではない.

参考文献

- [1] V.I.Arnold, S.M.Gusein-Zade and A.N.Varchenko: *Singularities of Differentiable Maps II*, Birkhäuser, 1988.
- [2] M.F.Atiyah: *Resolution of singularities and division of distributions*, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 145-150.
- [3] P. Jeanquartier: *Développement asymptotique de la distribution de Dirac attaché à une fonction analytique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. **A-B 201** (1970), A1159–A1161.
- [4] J.Kamimoto and H.Mizuno: *Asymptotic expansion of oscillatory integrals with singular phases*, Kyushu J. Math. **77** (2023), 319-329.
- [5] J.Kamimoto and H.Mizuno: *Newton polyhedra and Archimedean zeta functions for meromorphic functions*, in preparation.
- [6] J. Kamimoto and T. Nose: *Newton polyhedra and weighted oscillatory integrals with smooth phases*, Trans. Amer. Math. Soc., **368** (2016), 5301–5361.
- [7] A.Kaneko: *Newton diagrams, Singular points and Oscillatory integrals*, Lecture note at Sophia University, 11 (1981) [in Japanese].
- [8] B. Malgrange: *Intégrales asymptotiques et monodromie*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 405–430.
- [9] H. Mizuno: *Asymptotic analysis of local zeta functions and oscillatory integrals associated to meromorphic functions*, PhD. thesis, Kyushu university, 2024.
- [10] E.M.Stein: *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1993
- [11] A.N.Varchenko: *Newton polyhedra and estimation of oscillating integrals*, Funct. Anal Appl. **10-3**(1976)175-196.
- [12] W.Veys and W.A.Zúñiga-Galindo: *Zeta functions and oscillatory integrals for meromorphic functions*, Advances in Mathematics **311** (2017) 295-337.