解析的部分集合上に極を持つ多重複素グリーン関数から定義される東川擬計量について

鈴鹿工業高等専門学校　菊池　翔太
Shota Kikuchi
National Institute of Technology, Suzuka College

1　吹田予想と最良係数の大沢–竹腰 L^2 拡張定理

吹田予想とは, [Su] の中で提唱された, L^2 正則関数のなす関数空間上の再生核であるベルグマン核と複素解析的なグリーン関数から定義される対数容量の間に成り立つ不等式のことを指す. 具体的に述べると, 以下のような主張となる.

定理 1.1 (吹田予想, [Su]). 任意の Riemann 面 S に対して,

$$c_\beta(z)^2 \leq \pi K_S(z)$$

が成り立つ. ここで, $c_\beta(z)$ は対数容量, $K_S(z)$ はベルグマン核を表す.

吹田予想は, 開リーマン面の分類問題の解決に起因する形で現れた関数論的な問題であった.

吹田予想は, 長年の間未解決の問題であったが, [O] によって大沢–竹腰 L^2 拡張定理が問題解決の糸口となることが初めて言及された. ここで, 大沢–竹腰 L^2 拡張定理とは, 以下のような主張である.

定理 1.2 (大沢–竹腰 L^2 拡張定理, [OT]). Ω を $\mathbb{C}^n$ 上の有界な擬凸領域, φ を Ω 上の任意の多重劣調和関数とする. $\Omega' := \Omega \cap \{z_n = 0\}$ とし, $\sup_\Omega |z_n| \leq 1$ を仮定する. このとき, $\int_{\Omega'} |f|^2 e^{-\varphi} < \infty$ となる任意の Ω' 上の正則関数 f に対して, ある Ω 上の正則関数 F で, $F|_{\Omega'} = f$ かつ

$$\int_\Omega |F|^2 e^{-\varphi} \leq C \int_{\Omega'} |f|^2 e^{-\varphi}$$

を満たすものが存在する. ここで, C は $C \leq 1620\pi$ となる定数である.

ここで, 定数 C は, 正則関数 f や多重劣調和関数 φ の取り方に依らないことに注意する. 大沢–竹腰 L^2 拡張定理は, 多重劣調和関数の近似 [Dem] や多重種数の変形不変性 [Siu], ベクトル束の正値性 [DWZZ], [HI] などで重要な役割を担っており, 関数論に留まらず, 複素幾何学や代数幾何学などの広い分野で応用されている.

いま簡単のために, $\mathbb{C}$ 上の有界領域 D で議論する. 吹田予想は, ベルグマン核が

$$K_D(z) = \sup\left\{|f(z)|^2 : f \in \mathcal{O}(D), \int_D |f|^2 \leqq 1\right\}$$

という表示を持つことを考慮することで, $z \in D$ が与えられたとき, $f(z) = 1$ かつ

$$\int_D |f|^2 \leq \frac{\pi}{c_\beta(z)^2}$$

となる $f \in \mathcal{O}(D)$ が存在するという主張に言い換えることができる. この部分に大沢–竹腰 L^2 拡張定理が応用されている. そのために, 定理 1.2 における L^2 評価式に現れる定数係数 C が $C = \pi$ となることを示すことが重要になる. 次の例 1.3 により, $C \geq \pi$ となることが知られており, これ以上小さくできないことに注意する.

例 1.3. いま, $\Omega = \Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\varphi \equiv 0$ を考える. このとき大沢–竹腰 L^2 拡張定理 (定理 1.2) は, 原点 $\{0\}$ 上の関数 f を Δ 上の正則関数 F に拡張し,

$$\int_\Delta |F|^2 \leq C|f(0)|^2$$

という形で評価できることを主張する. 定数倍することにより, $f(0) = 1$ と仮定することができる. このとき, 正則関数に対する平均値の不等式を用いることで, L^2 ノルムの 2 乗が最小となる $F(0) = 1$ を満たす正則関数 F は $F \equiv 1$ となることが示される. 従って,

$$\pi = \int_\Delta \leq C$$

となることが分かる.

以下, $C = \pi$ となる大沢–竹腰 L^2 拡張定理を最良係数の大沢–竹腰 L^2 拡張定理と呼ぶ.

近年, Błocki [Bło], Guan–Zhou [GZ] により最良係数の大沢–竹腰 L^2 拡張定理が示され, 吹田予想は証明された. その後, Berndtsson–Lempert [BL] によって吹田予想の別証明が得られ, その別証明のアイデアを応用することで, 最良係数の大沢–竹腰 L^2 拡張定理が得られることが示された. 今回は, Berndtsson–Lempert 型の最良係数の大沢–竹腰 L^2 拡張定理 [BL] を紹介する.

定理 1.4 (最良係数の大沢–竹腰 L^2 拡張定理, [BL])**.** *Ω を $\mathbb{C}^n$ 上の有界な擬凸領域, φ を Ω 上の多重劣調和関数, V を Ω の余次元 k の部分多様体とする. $d_V(z)$ を z と V の距離, つまり, $d_V(z) := \inf_{w \in V} |z - w|$ とする. また, $G(z)$ を Ω 上の負値多重劣調和関数で, Ω 上で*

$$G(z) \leq \log d_V(z)^2 + A(z)$$

を満たし, V の近くで

$$G(z) \geq \log d_V(z)^2 - B(z) \tag{1}$$

を満たすものとする．ここで, $A(z)$, $B(z)$ は Ω 上の連続関数とする．このとき, $\int_V |f|^2 e^{-\varphi+kB} < \infty$ となる任意の V 上の正則関数 f に対して, ある Ω 上の正則関数 F で, $F|_V = f$ かつ

$$\int_\Omega |F|^2 e^{-\varphi} \le \sigma_k \int_V |f|^2 e^{-\varphi+kB}$$

を満たすものが存在する．ここで, σ_k は $\mathbb{C}^k$ 上の単位球の体積である．

実際に定理 1.2 の設定では, $G(z) = \log |z_n|^2, A(z) = B(z) = 0$ を考えることができる．このとき, 結論の L^2 評価式は,

$$\int_\Omega |F|^2 e^{-\varphi} \le \pi \int_{\Omega'} |f|^2 e^{-\varphi}$$

となることが分かる．

定理 1.4 における関数 G は, 指定された部分多様体上で対数的な極を持つことからグリーン関数のような振る舞いをしている．この関数をグリーン型関数と呼ぶことにする．このとき, 定理 1.4 は, 「与えられた有界な擬凸領域とその部分多様体のペアに対してグリーン型関数が存在するならば, 最良係数の大沢–竹腰 L^2 拡張定理が成り立つ」と考えることができる．

2 東川擬計量を用いた最良係数の大沢–竹腰 L^2 拡張定理

定理 1.4 に現れる L^2 評価式と (1) を眺めると, 関数 $B(z)$ の値が小さければ小さいほど, つまりグリーン型関数 $G(z)$ の値が大きければ大きいほど L^2 評価式を改良することができる．この点を考慮することにより, より良い形の L^2 評価式が得られる最良係数の大沢–竹腰 L^2 拡張定理を考えることができる．

以下, グリーン型関数の代わりにグリーン関数を多重ポテンシャル論的に一般化した多重複素グリーン関数 ([Kli], [RS] を参照．) を考えることにする．

2.1 解析的部分集合上に極を持つ多重複素グリーン関数

$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を領域, $V \subset \Omega$ を解析的部分集合とする．つまり, 任意の $z \in V$ に対して, ある z の近傍 U と U 上の正則関数 $\psi_1, \dots, \psi_k$ が存在し, $V \cap U = \{\psi_1 = \cdots = \psi_k = 0\}$ が成り立つ．また, $\mathcal{O}_\Omega$ を Ω 上の局所正則関数の芽のなす層とし, $\mathcal{I}_V$ を $\mathcal{O}_\Omega$ 上の V から定まる連接イデアル層とする．

定義 2.1 ([RS])**.** $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を領域, $V \subset \Omega$ を解析的部分集合とする．$\mathcal{F}_V$ を以下の性質を持つ Ω 上の負値多重劣調和関数 u たちのなす関数の集合とする: 任意の $z \in \Omega$ に対して, ある局所生成元 $\psi_1, \dots, \psi_k \in \mathcal{I}_{V,z}$ と関数 u と局所生成元に依存する定数 C が存在し, z の近くで $u \le \log |\psi| + C$ が成り立つ．ここで, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_k)$ とする．

定義 2.2 (解析的部分集合上に極を持つ多重複素グリーン関数, [RS])**.** 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上の解析的部分集合 V に極を持つ多重複素グリーン関数 $G_{\Omega,V}$ を次のように定義する:

$$G_{\Omega,V}(z) := \sup\{u(z) : u \in \mathcal{F}_V\}.$$

$\mathcal{F}_V = \varnothing$ のとき, $G_{\Omega,V} \equiv -\infty$ と定義する.

V が一点集合 $V = \{w\}$ であるとき, $G_{\Omega,V}$ は Klimek により定義された一点に極を持つ多重複素グリーン関数 [Kli] に一致する.

一般に, 多重劣調和関数の族に対して, 各点における関数たちの値の上限によって定義された関数は, 上半連続であるとは限らないので, 多重劣調和関数かどうか分からない. 一方で, 多重複素グリーン関数 $G_{\Omega,V}$ は以下の重要な性質を持つ.

定理 2.3 ([RS])**.** *V が閉集合であるとき, $G_{\Omega,V} \in \mathcal{F}_V$ である.*

つまり, V が閉集合であれば, 多重複素グリーン関数 $G_{\Omega,V}$ は上半連続化せずとも多重劣調和関数となる.

以下, V は bounded global generators $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_k)$ を持つと仮定する. これは Ω 上の有界な正則関数 $\psi_1, \ldots, \psi_k$ が存在し, $V = \{\psi_1 = \cdots = \psi_k = 0\}$ が成り立つことを意味する. このとき, 生成元の有界性により, ある正定数 $M > 0$ が存在し, $\dfrac{|\psi|}{M} < 1$ が成り立つ. つまり, $\log \dfrac{|\psi|}{M} \in \mathcal{F}_V$ であり, $\mathcal{F}_V \neq \varnothing$ となることから, 解析的部分集合 V に極を持つ多重複素グリーン関数 $G_{\Omega,V} \not\equiv -\infty$ が定義されることが分かる.

2.2 東川擬計量と最良係数の大沢–竹腰 L^2 拡張定理

以後, 多重複素グリーン関数 $G_{\Omega,V}$ を用いた最良係数の大沢–竹腰 L^2 拡張定理について考える. まず, 多重複素グリーン関数 $G_{\Omega,V}$ を用いて, 次のような Berndtsson–Lempert 型の最良係数の大沢–竹腰 L^2 拡張定理 (定理 1.4) の類似 [Kik1] を得ることができる.

定理 2.4 ([Kik1])**.** *$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を有界な擬凸領域, $V \subset \Omega$ を以下の性質を持つ余次元 k の閉部分多様体とする: ある正定数 $C > 0$ と Ω 上の有界な正則関数の組 $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_k)$ が存在して, $V = \{\psi = 0\}$ かつ ψ から定義されるヤコビアン J_ψ が V のまわりで一様に $\dfrac{1}{C} \leq |J_\psi|$ を満たすとする. また, φ を Ω 上の多重劣調和関数, u を $\mathcal{F}_V$ に属する V に極を持つ多重複素グリーン関数の劣解とする. いま,*

$$u(z) \geq \log|\psi| - B(z) \tag{2}$$

が成り立つと仮定する．ここで $B(z)$ は Ω 上の連続関数である．このとき，
$\int_V |f|^2 e^{-\varphi+2kB} < \infty$ となる任意の V 上の正則関数 f に対して，ある Ω 上の正則関数 F で，
$F|_V = f$ かつ

$$\int_\Omega |F|^2 e^{-\varphi} \leq C\sigma_k \int_V |f|^2 e^{-\varphi+2kB}$$

を満たすものが存在する．ここで，σ_k は $\mathbb{C}^k$ 上の単位球の体積である．

定理 2.4 は，最良係数の大沢–竹腰 L^2 拡張定理に現れる L^2 評価式の精密化を行うために証明されたことを補足しておく．([Hos1], [Kik1] を参照．)

ここで，定理 2.4 に現れる L^2 評価式と (2) を眺めてみると，関数 $B(z)$ の値が小さければ小さいほど，つまり多重複素グリーン関数の劣解 $u(z)$ の値が大きければ大きいほど L^2 評価式を改良することができる．従って，関数 u の代わりに多重複素グリーン関数 $G_{\Omega,V}$ を用いることで，より良い L^2 評価式が得られることが期待される．このとき，多重複素グリーン関数から定義される東川擬計量が中心的な役割を担う．東川擬計量を用いて議論を行うため，極を表す集合 V は一点集合 $\{w\}$ を考えることにする．

定義 2.5 (東川擬計量, [Azu1], [Azu2])**.** $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を領域，w を Ω 上の点とする．$g_{\Omega,w}$ を一点 w に極を持つ Ω 上の多重複素グリーン関数とする．任意の $X \in \mathbb{C}^n$ に対して，東川擬計量 $A_{\Omega,w}(X)$ を

$$A_{\Omega,w}(X) := \limsup_{\lambda\to 0} \left(g_{\Omega,w}(w+\lambda X) - \log|\lambda|\right)$$

で定義する．

東川擬計量 $A_{\Omega,w}$ とは，極を通る複素直線 $w+\lambda X$ に沿って，極付近における一点に極を持つ多重複素グリーン関数 $g_{\Omega,w}$ と対数項の差を考えたものである．定義より，多重複素グリーン関数の極付近の振る舞いを調べる際に役立つことが分かる．これは，複素解析的なグリーン関数から定まるロバン定数の一般化に相当する量である．また，正確には $\exp\left(A_{\Omega,w}(X)\right)$ が擬計量となることに注意する．

細野 [Hos2] により，東川擬計量 $A_{\Omega,w}$ を用いることで，次のような最良係数の大沢–竹腰 L^2 拡張定理が得られることが示された．

定理 2.6 (東川擬計量を用いた最良係数の大沢–竹腰 L^2 拡張定理, [Hos2])**.** *$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を有界な擬凸領域，w を Ω 上の点，φ を Ω 上の多重劣調和関数とする．$g_{\Omega,w}$ を一点 w に極を持つ Ω 上の多重複素グリーン関数とし，$A_{\Omega,w}$ を東川擬計量とする．このとき，
ある Ω 上の正則関数 f で，$f(w)=1$ かつ*

$$\int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi} \leq \mathrm{vol(I_{\Omega,w})e^{-\varphi(w)}}$$

を満たすものが存在する．ここで，$I_{\Omega,w} := \{X \in \mathbb{C}^n : A_{\Omega,w}(X) < 0\}$ は東川標高と呼ばれ，$\mathrm{vol(I_{\Omega,w})}$ は東川標高 $I_{\Omega,w}$ のユークリッド体積を表す．

定理 2.6 は一点集合からの L^2 拡張定理であることに注意する．また，定理 2.6 から吹田予想の高次元版 [BZ] の別証明が得られることも興味深い．

3 解析的部分集合上に極を持つ多重複素グリーン関数から定義される東川擬計量

定理 2.6 から自然に想起される問題として,「拡張前の集合を一点集合から閉部分多様体に一般化できるか？」という問題が考えられる. 以下, この問題を考えるにあたり, 東川擬計量に相当する類似の量を定式化することが必要になる.

[Kik1] において, 解析的部分集合上に極を持つ多重複素グリーン関数に対して, 東川擬計量に相当する類似の量を以下のように定義した.

定義 3.1 (解析的部分集合上に極を持つ多重複素グリーン関数に対する東川擬計量, [Kik1])**.** $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を領域, $V \subset \Omega$ を解析的部分閉集合とする. $G_{\Omega,V}$ を V に極を持つ Ω 上の多重複素グリーン関数とする. 任意の $w \in V$ と $X \in \mathbb{C}^n$ に対して,

$$A_{\Omega,V,w}(X) := \limsup_{\lambda \to 0} \left(G_{\Omega,V}(w + \lambda X) - \log |\lambda| \right)$$

と定義する.

以下, $A_{\Omega,V,w}$ を同様に東川擬計量と呼ぶことにする. 東川擬計量 $A_{\Omega,V,w}$ を用いることで, 以下のような定理 2.6 の一般化を得た.

定理 3.2 ([Kik1])**.** $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を有界な擬凸領域, $V = \{z_1 = \cdots = z_k = 0\}$, φ を Ω 上の多重劣調和関数とする. $G_{\Omega,V}$ を V に極を持つ Ω 上の多重複素グリーン関数とする. いま, 東川擬計量が次のように表せると仮定する:

$$A_{\Omega,V,w}(X) := \lim_{\lambda \to 0} \left(G_{\Omega,V}(w + \lambda X) - \log |\lambda| \right) = \lim_{\lambda \to 0} \left(G_{\Omega,V}(\lambda X', w'') - \log |\lambda| \right).$$

ここで, $w = (0, \ldots, 0, w'') \in V$, $0 \neq X = (X', 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^n$, $X' \in \mathbb{C}^k$ とする. このとき, $\int_V \mathrm{vol}(I_{\Omega,V,w})|f|^2 e^{-\varphi} < \infty$ となる任意の V 上の正則関数 f に対して, ある Ω 上の正則関数 F で, $F|_V = f$ かつ

$$\int_\Omega |F|^2 e^{-\varphi} \leq \int_V \mathrm{vol}(I_{\Omega,V,w})|f|^2 e^{-\varphi}$$

を満たすものが存在する. ここで, $I_{\Omega,V,w} := \{X \in \mathbb{C}^n : A_{\Omega,V,w}(X) < 0\}$ であり, $\mathrm{vol}(I_{\Omega,V,w})$ は $I_{\Omega,V,w}$ のユークリッド体積を表す.

以下, 定理 3.2 で仮定した条件について考える. つまり, 定理 3.2 を用いるための十分条件を決定したい. 具体的に述べると,

(a) 東川擬計量 $A_{\Omega,V,w}(X)$ は, V に対して定まる法束上の関数であるか？

(b) 東川擬計量 $A_{\Omega,V,w}(X)$ は, いつ極限でかけるのか？

の二つの問題について考えることになる.

まず (a) の問題について議論する．(a) の問題は，「任意の $X = (X', X'') \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$ に対して，$A_{\Omega,V,w}(X) = A_{\Omega,V,w}(X', 0)$ となるか？」ということである．

例 3.3. いま，$\Omega = \mathbb{B}^2 = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1\}$，$V = \{z_1 = 0\} \cap \mathbb{B}^2$ を考える．このとき，V に極を持つ $\mathbb{B}^2$ 上の多重複素グリーン関数 $G_{\mathbb{B}^2,V}$ は，

$$G_{\mathbb{B}^2,V}(z) = G_{\mathbb{B}^2,V}(z_1, z_2) = \log \frac{|z_1|}{\sqrt{1 - |z_2|^2}}$$

と明示的に表すことができる．このとき，任意の $(0, w) \in V$，$X = (X_1, X_2)$ に対して，

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{B}^2,V,(0,w)}(X) &= \limsup_{\lambda \to 0} (G_{\mathbb{B}^2,V}(\lambda X_1, w + \lambda X_2) - \log |\lambda|) \\ &= \limsup_{\lambda \to 0} \left(\log \frac{|\lambda X_1|}{\sqrt{1 - |w + \lambda X_2|^2}} - \log |\lambda| \right) \\ &= \log \frac{|X_1|}{\sqrt{1 - |w|^2}} \\ &= A_{\mathbb{B}^2,V,(0,w)}(X_1, 0) \end{aligned}$$

となり，東川擬計量 $A_{\mathbb{B}^2,V,(0,w)}$ は，V から定まる法束上の関数であることが分かる．

問題 (a) に関しては，計算可能な具体例を除いて，以下のような結果が得られているのみである．

定理 3.4 ([Kik2])**.** *$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を z' 方向に balanced な有界擬凸領域とする．つまり，任意の $z = (z', z'') \in \Omega$ と $|\lambda| \le 1$ を満たす $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$(\lambda z', z'') \in \Omega$ が成り立つ．ここで，$z' = (z_1, \ldots, z_k)$，$z'' = (z_{k+1}, \ldots, z_n)$ とする．$h \in \mathrm{PSH}(\mathbb{C}^n)$ を任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$h(\lambda z', z'') = |\lambda| h(z', z'')$ を満たす Ω の定義関数とする．$V = \{z' = 0\} \cap \Omega$，$w = (0, \ldots, 0, w'') \in V$ とする．h が連続関数であるとき，任意の $(X', X'') \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$ に対して，$A_{\Omega,V,w}(X', X'') = A_{\Omega,V,w}(X', 0)$ が成り立つ．*

定理 3.4 を証明するための鍵となるのは，以下の細野 [Hos2] によって得られた (オリジナルの) 東川擬計量の擬凸変動方向への多重劣調和性である．

定理 3.5 ([Hos2])**.** *$\tilde{\Omega} \subset D \times \mathbb{C}^n$ を擬凸領域とする．ここで $D \subset \mathbb{C}$ は領域である．任意の $t \in D$ に対して，$\Omega_t = \{z \in \mathbb{C}^n : (t, z) \in \tilde{\Omega}\}$ とかく．ここで，任意の $t \in D$ に対して，$w \in \Omega_t$ となる点 $w \in \mathbb{C}^n$ が存在することを仮定する．このとき，すべての Ω_t が balanced かつ $w = 0$ であれば，$A_{\Omega_t,w}(X)$ は (t, X) に関して多重劣調和である．ここで，$A_{\Omega_t,w}(X)$ は一点 $\{w\}$ に極を持つ多重複素グリーン関数 $g_{\Omega_t,w}$ から定義される (オリジナルの) 東川擬計量を表す．*

より一般の場合に，東川擬計量 $A_{\Omega,V,w}(X)$ が，V に対して定まる法束上の関数であることを証明するためにも，定理 3.5 の一般化などの擬凸変動の理論の進展が望まれる．

問題 (b) に関しては, オリジナルの東川擬計量に関して, 以下の事実 [Zwo] が知られている.

定理 3.6 ([Zwo]). $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を超凸領域とする. つまり, ある Ω 上の連続な多重劣調和関数 ρ が存在して, Ω 上で $\rho < 0$ かつ $\{\rho < -c\} \Subset \Omega$ が成り立つ. このとき, 任意の $w \in \Omega$, $X \in \mathbb{C}^n$ に対して,

$$A_{\Omega,w}(X) := \lim_{\lambda \to 0} \left(g_{\Omega,w}(w + \lambda X) - \log|\lambda|\right)$$

が成り立つ.

定理 3.6 を参考にすることで, 東川擬計量 $A_{\Omega,V,w}$ に対して, 次のような結果を得た.

定理 3.7 ([Kik2]). $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を領域, $V = \{z_1 = \cdots = z_k = 0\} \cap \Omega$, $w = (0, \ldots, 0, w'') \in V$ とする. ここで, 次の二つの条件を仮定する:

(i) Ω は $\partial\Omega \setminus V$ 上で strong plurisubharmonic barrier を持つ.

(ii) 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\theta_0 \in (0, \pi)$ が存在し, 任意の $|\theta| < \theta_0$ に対して, $e^{i\theta}\Omega_\epsilon \subset \Omega$ が成り立つ. ここで, $\Omega_\epsilon = \{G_{\Omega,V} < -\epsilon\}$ と表す.

このとき, 任意の $X \in \mathbb{C}^n$ に対して,

$$A_{\Omega,V,w}(X) = \lim_{\lambda \to 0} (G_{\Omega,V}(w + \lambda X) - \log|\lambda|)$$

が成り立つ.

定理 3.7 の条件 (i) は, 任意の $p \in \partial\Omega$ に対して, ある $\partial\Omega$ の近傍 W 上の多重劣調和関数 v が存在し, $z \to p$ のとき $v(z) \to 0$, かつ任意の p の近傍 U に対して, $\sup_{\Omega \setminus U} < 0$ となることを意味する. この条件は領域の超凸性に相当する条件である. 一方で, 定理 3.7 の条件 (ii) は, 解析的に必要な条件である. この条件 (ii) に関しては, 今後取り除く, またはこの条件をより関数論的に調べる必要がある.

以上の定理 3.4, 3.7 の帰結として, 次の系が成り立つことが自然に分かる.

系 3.8 ([Kik2]). 定理 3.4 または 3.7 の仮定の下で, $\int_V \mathrm{vol}(I_{\Omega,V,w})|f|^2 e^{-\varphi} < \infty$ となる任意の V 上の正則関数 f に対して, ある Ω 上の正則関数 F で, $F|_V = f$ かつ

$$\int_\Omega |F|^2 e^{-\varphi} \leq \int_V \mathrm{vol}(I_{\Omega,V,w})|f|^2 e^{-\varphi}$$

を満たすものが存在する.

参考文献

[Azu1] K. Azukawa, *Two intrinsic pseudo-metrics with pseudoconvex indicatrices and starlike domains*, J. Math. Soc. Japan, **38**, 627-647, 1986.

[Azu2] K. Azukawa, *The invariant pseudo-metric related to negative plurisubharmonic functions*, Kodai Math. J., **10**, 83-92, 1987.

[BL] B. Berndtsson, L. Lempert, *A proof of the Ohsawa–Takegoshi theorem with sharp estimates*, J. Math. Soc. Japan, **68**(4),1461-1472, 2016.

[Bło] Z. Błocki. *Suita conjecture and the Ohsawa-Takegoshi extension theorem*, Invent. Math., **193**, 149-158, 2013.

[BZ] Z. Błocki, W. Zwonek, *Estimates for the Bergman kernel and the multidimensional Suita conjecture*, New York Journal of Mathematics, **21**, 151-161, 2015.

[Dem] J.-P. Demailly, *Regularization of closed positive currents and Intersection Theory*, J. Alg. Geom., **1**, 361-409, 1992.

[DWZZ] F. Deng, Z. Wang, L. Zhang, X. Zhou, *New characterizations of plurisubharmonic functions and positivity of direct image sheaves*, preprint, arXiv:1809.10371.

[GZ] Q. Guan, X. Zhou. *A solution of an L^2 extension problem with an optimal estimate and applications*, Ann. of Math., **181**(2), 1139-1208, 2015.

[Hos1] G. Hosono, *On sharper estimates of Ohsawa-Takegoshi L^2-extension theorem*, J. Math. Soc. Japan, **71**, 909-914, 2019.

[Hos2] G. Hosono, *Subharmonic variation of Azukawa pseudometrics for balanced domains*, Internat. J. Math., **32**(3), 2150015(9 pages), 2021.

[HI] G. Hosono, T. Inayama, *A converse of Hörmander's L^2-estimate and new positivity notions for vector bundles*, Sci. China Math., 2020.

[Kik1] S. Kikuchi, *On sharper estimates of Ohsawa–Takegoshi L^2-extension theorem in higher dimensional case*, Manuscripta Math., **170**, 453-469, 2023.

[Kik2] S. Kikuchi, *Some properties of Azukawa pseudometrics for pluricomplex Green functions with poles along subvarieties*, in preparation.

[Kli] M. Klimek, *Pluripotential theory*, London Mathematical Society Monographs. New Series, 6. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1991.

[O] T. Ohsawa, *Addendum to "On the Bergman kernel of hyperconvex domains"*, Nagoya Math. J. **137**, 145-148, 1995.

[OT] T. Ohsawa, K. Takegoshi, *On the extension of L^2 holomorphic functions*, Math. Z., **195**, 197-204, 1987.

[RS] A. Rashkovskii, R. Sigurdsson, *Green functions with singularities along complex spaces*, Internat. J. Math., **16**, 333-355, 2005.

[Siu] Y. T. Siu. *Invariance of plurigenera*, Invent. Math. 134, 661-673, 1998.

[Su] Suita N. *Capacities and kernels on Riemann surface*, Arch Rational Mech. Anal **46**, 212-217, 1972.

[Zwo] W. Zwonek, *Regularity properties of Azukawa metric*, J. Math. Soc. Japan, **52**, 899-914, 2000.