非特異複素曲面内のコンパクトリーマン面の正則管状近傍とユニタリ平坦直線束のBrjuno条件

大阪公立大学 理学研究科 小川 智史 *
Satoshi Ogawa
Graduate School of Science,
Osaka Metropolitan University

1 Introduction

本稿では, 法線束がユニタリ平坦かつトーションでないよう非特異複素曲面に埋め込まれた正種数コンパクトリーマン面が正則管状近傍を持つため、その十分条件として Brjuno 条件が現れることを [O] の概略を通して紹介する. また本稿後半では, Brjuno 条件についてその後判明したことについて述べる.

複素多様体 M の部分複素多様体 C について, C の M 内の近傍 T が以下を満たすとき, T は C の**正則管状近傍**であるという: T と, 法束 $N_{C/M}$ の零切断 C' の近傍 T' とが写像 $\varphi: T \to T'$ により双正則で, $\varphi(C) = C'$ となる. 本稿における主結果は, $N_{C/M}$ が非特異複素曲面 M ($\dim M = 2$) に埋め込まれたコンパクトリーマン面 C のユニタリ平坦束であるとき, C が M 内に正則管状近傍を持つための $N_{C/M}$ の十分条件を与えたことである. この条件は無理数の連分数近似に関する条件として知られる Brjuno 条件のアナロジーとなっている. まず, ユニタリ平坦束の数論的近似のために必要な記号を用意する.

正種数のコンパクトリーマン面 C のユニタリ平坦束の同型類全体を $\mathrm{Pic}^0(C)$ とする. このとき $\mathrm{Pic}^0(C)$ は複素トーラスと同型となることから, その普遍被覆空間上のユークリッド距離から誘導される距離が入る. これを d とする. まずユニタリ平坦束に対する Brjuno 条件を定義する. ただし $\mathbb{1}$ で C 上の正則に自明な直線束を表す. ユニタリ平坦束のうち, トーションでないもの全体を $\mathrm{Pic}^0_{\mathrm{nt}}(C)$ とする. すなわち, $\mathrm{Pic}^0_{\mathrm{nt}}(C) = \{E \in \mathrm{Pic}^0(C) \mid E^\nu \neq \mathbb{1}\ (\forall \nu \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})\}$.

Definition 1.1. ユニタリ平坦束 $E \in \mathrm{Pic}^0_{\mathrm{nt}}(C)$ が

$$\sum_{k\geq 1} \frac{\log \omega_{k+1}}{2^k} < \infty$$

を満たすとき, E は **Brjuno 条件**をみたすという. ただし, ω_{k+1} は次で定義される:

$$\omega_{k+1} = \omega_{k+1}(E) = \max_{2\leq \ell \leq 2^{k+1}} \frac{1}{d(\mathbb{1}, E^{-\ell+1})}.$$

Brjuno 条件はユークリッド距離の取り方に依らない. Brjuno 条件の性質は §4 で述べる.

Theorem 1.2 ([O, Theorem 1.2]). 正種数のコンパクトリーマン面 C が非特異複素曲面 M に埋め込まれ, 法線束 $N_{C/M}$ が $N_{C/M} \in \mathrm{Pic}^0_{\mathrm{nt}}(C)$ かつ *Definition 1.1* の意味で *Brjuno* 条件を満たすとする. また, C が M 内に次の意味で正則管状近傍を持つとする: *[GS, Definition 2.5]* の意味で, $TM|_C$ を *split* させ, 恒等写像に接するような形式的射により正則管状近傍が得られるとする. このとき, 実際に C は M 内に正則管状近傍を持つ.

*本研究は JST 科学技術イノベーション創出に向けた大学フェローシップ創設事業 JPMJFS 2138 の支援を受けたものです. email: sn22894n@st.omu.ac.jp

特に, 形式的射の存在の仮定は C がトーラスであるとき無視することができる．よって次の系を得る．

Corollary 1.3 ([O, Corollary 1.3])．*トーラス C が非特異複素曲面 M に埋め込まれ, 法線束 $N_{C/M}$ が $N_{C/M} \in \mathrm{Pic}^0_{\mathrm{nt}}(C)$ かつ Definition 1.1 の意味で Brjuno 条件を満たすとする．このとき, C は M 内に正則管状近傍を持つ．*

この系は以下の Arnol'd の結果の拡張となっている．

Proposition 1.4 ([A])．*トーラス C が非特異複素曲面 M に埋め込まれ, 法線束 $N_{C/M}$ が $N_{C/M} \in \mathrm{Pic}^0_{\mathrm{nt}}(C)$ かつ Diophantus 条件を満たすとする．このとき, C は M 内に正則管状近傍を持つ．ただし, Diophantus 条件とは次を満たすことをいう: ある正定数 c および τ が存在し, 任意の正整数 n に対し $d(\mathbb{1}, E^n) \geq cn^{-\tau}$ を満たす．*

無理数に関する条件と同様に, Diophantus 条件を満たすユニタリ平坦束は Brjuno 条件を満たすということがわかる．証明は §4 で述べる．

正則管状近傍は, Y の近傍の "水平" 方向および "横断" 方向の座標変換関数を線形化する "完全線形化" によって得られる．この完全線形化を用いた正則管状近傍獲得は [GS] によって整理されており, その概略を述べると以下のようなテクニックを用いることで達成される: 与えられた部分多様体近傍の局所座標について, その座標変換が "線形 " となるよう局所座標の取り直しを行う．ここでいう "線形" とは横断方向に関してユニタリ変換となり, 水平方向に関して横断方向の座標を含まないような変換を指す．この「局所座標の取り直し関数」は, ある Čech コバウンダリ方程式により特徴づけられる．問題はこの「局所座標の取り直し関数」が正の収束半径を持つ正則関数となるかどうかであり, その収束半径の存在判定は Čech コバウンダリ方程式の評価付き解が制約を与える．つまり, 任意の $f \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_C(L))$ に対し, $\delta u = f$ となる $u \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_C(L))$ でその評価 $\|u\| \leq K\|f\|$ の表示こそが, 正則管状近傍の存在にとって重要となる．このノルムについては §2 で紹介する．この技術は複素力学系の線形化問題 ([B][Y][CG, §2]) に由来するため, Brjuno 的条件が現れるのは自然である．

以上の観点を踏まえ, 本稿では, §2 では Čech コバウンダリ方程式の評価付き解についての紹介と, それを用いた Gong–Stolovitch の正則管状近傍獲得可能性判定を紹介する．§3 では Čech コバウンダリ方程式の評価の明示的表示として知られている上田の補題や, Hörmander の L^2 評価を介して得られたその他の明示的表示について説明し, 主結果の証明を紹介する．§4 では, 今回導入した Brjuno 条件の性質や, Brjuno 条件と同値な条件を紹介する．

この線形化については, [GS] で詳しく調べられている．まず, [GS] の結果を紹介する．以降簡単のため, および本結果と比較するため, C をコンパクトリーマン面, M を非特異複素曲面とする．[GS] の結果では C を一般のコンパクト部分複素多様体としている．

2　準備・Gong–Stolovitch の結果

本稿では, [GS] の結果を, 非特異複素曲面 M 内のコンパクトリーマン面 C に対して適用し, 正則管状近傍が存在するための十分条件を説明する．まず, コンパクトリーマン面 C 上の Čech コバウンダリ方程式についての紹介する．一般の設定下については [GS] などを参照されたい．

十分細かい C の有限枚からなる開被覆 $\mathcal{U} = \{U_j\}$ を固定する．座標関数 φ_j が $\varphi_j(U_j) = \Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ を満たすとし, これを固定する．さらに, 実数 $r \in (0, 1]$ を用いて $U_j^r = \varphi^{-1}(\Delta_r)$ と定義する．ただし, $\Delta_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$．このとき, 次を満たす十分 1 に近い $r_* \in (0, 1)$ が存在する: すべての $r \in [r_*, 1]$ について $\mathcal{U}^r \coloneqq \{U_j^r\}$ が C の十分細かい有限枚からなる開被覆となる．以降これを C の nested covering と呼び, $\mathcal{U}, r_*$ は固定する．

次に Čech 0-cochian, 1-cochain に対しノルムを定義しておく．コンパクトリーマン面の Hermite 計量 g および, Hermite 直線束 (L, h) を固定し, Čech 0-cochain $u = \{(U_j^r, u_j)\} \in \check{C}^0(\mathcal{U}^r, \mathcal{O}_C(L))$ に

対し,

$$\|u_j\|_{L^2,U_j^r}=\sqrt{\int_{U_j^r}|u_j|_h^2dV_g}$$

と定める．このように定めたノルムに対して, $\|u\|_{L^2,\mathcal{U}^r}=\max_j\|u_j\|_{L^2,U_j^r}$ と定める．

Čech 1-cochain についても同様で, $u'=\{(U_{jk}^r,u_{jk})\}\in\check{C}^1(\mathcal{U}^r,\mathcal{O}_C(L))$ (ただし $U_{jk}^r=U_j^r\cap U_k^r$),

$$\|u_{jk}\|_{L^2,U_{jk}^r}=\sqrt{\int_{U_{jk}^r}|u_{jk}|_h^2dV_g}$$

とし, $\|u'\|_{L^2,\mathcal{U}^r}=\max_{j,k}\|u_{jk}\|_{L^2,U_j^r}$ と定める．同じように, L^∞ ノルムから定義することもでき,

$$\|u\|_{L^\infty,\mathcal{U}^r}=\max_j\sup_{U_j^r}|u_j|_h,\quad \|u'\|_{L^\infty,\mathcal{U}^r}=\max_{j,k}\sup_{U_{jk}^r}|u_{jk}|_h$$

とする．以降, L^2 ノルムおよび L^∞ ノルムから定まる二通りのノルムのどちらを用いても問題場合にのみ $\|\cdot\|_{\mathcal{U}^r}$ と略記する．

Proposition 2.1 ([GS, Proposition 1]). コンパクトリーマン面 C とその上の *Hermite* 直線束 (L,h), および C の *nested covering* $\mathcal{U}^r, r\in[r_*,1]$ を固定する．すべての $r_*<r'<r\le 1$ なる r,r' に対し, 任意の *Čech 1-coboundary* $f=\{(U_{jk}^r,f_{jk})\}\in\check{B}^1(\mathcal{U}^r,\mathcal{O}_C(L))$ について,

小平–Spencer 型評価 次を満たす定数 $K(L)$ が存在する*: Čech 0-cochain* $u=\{(U_j^r,u_j)\}\in\check{C}^0(\mathcal{U}^r,\mathcal{O}_C(L))$ で $\delta u=f$ かつ $\|u\|_{\mathcal{U}^r}\le K(L)\|f\|_{\mathcal{U}^r}$ となる．ただし $K(L)$ は r に依らない．

Donin 型評価 次を満たす定数 $D(L)$ が存在する*: Čech 0-cochain* $v=\{(U_j^{r'},v_j)\}\in\check{C}^0(\mathcal{U}^{r'},\mathcal{O}_C(L))$ で $\delta v=f$ かつ $\|v\|_{\mathcal{U}^{r'}}\le\frac{D(L)}{(r-r')^\tau}\|f\|_{\mathcal{U}^r}$ となる．ここで, τ はある正定数で, $D(L)$ は r,r',τ に依らない． □

上記のオリジナルの結果は, [KS], [D] でそれぞれ述べられている．また, [GS] では任意次元のコンパクト複素多様体と任意の階数のベクトル束に対して説明されている．定数 τ について注意を述べておく．一般に τ は正則直線束 L に依存する．しかし, 後述の結果より, コンパクトリーマン面上のユニタリ平坦直線束に対しては $\tau=2$ と取ることができるためその依存関係は省略する．

今回の設定下において, C 正則管状近傍を得るうえで重要となるのは, 以下の値を求めることである．ここで ℓ は正の整数とする．

1. 正則直線束 $L=N_{C/M}^{-\ell+1}$ およびファイバー計量 $h_{\mathrm{flat}}^{-\ell+1}$ に対する $K(L)$ および $D(L)$.
2. 正則直線束 $L=T_C\otimes N_{C/M}^{-\ell+1}$ およびファイバー計量 $g\otimes h_{\mathrm{flat}}^{-\ell+1}$ に対する $K(L)$.

上記の値に注目しているのは, 以下の Gong–Stolovitch の定理を適用するためである．

Proposition 2.2 ([GS, Theorem 1.5, $\dim C=1,\dim M=2$ の場合]). 非特異複素曲面 M にその法線束 $N_{C/M}$ がユニタリ平坦かつ *non-torsion* となるようコンパクトリーマン面 C が埋め込まれているとし, $N_{C/M}$ は以下を満たすとする*:*

$$\sum_{k\ge1}\frac{\log D_*(2^{k+1})}{2^k}<\infty. \tag{1}$$

ここで,

$$D_*(2^{k+1})=1+\max_{2\le\ell\le 2^{k+1}}\{(1+c\,K(T_C\otimes N_{C/M}^{-\ell+1}))\cdot D(N_{C/M}^{-\ell+1})\} \tag{2}$$

とする．ただし, c は初期条件から定まる正定数とする．次の意味で C が M 内に次の意味で正則管状近傍を持つとする*: [GS]* の意味で, $TM|_C$ を *split* させ, 恒等写像に接するような形式的射により正則管状近傍が得られるとする．このとき, 実際に正則管状近傍を持つ．

[GS] は一般の次元・余次元に対してこの結果を述べている．Theorem 1.2, Corollary 1.3 は, (2) の明示的表示を得ることで得られる．

3 小平–Spencer 型評価, Donin 型評価

以降, ユニタリ平坦束の Hermite ファイバー計量 h は常に平坦計量 h_{flat} の一つを入れる．以降 nested covering $\mathcal{U}^r = \{U_j^r\}, r \in [r_*, 1]$ を一つ固定する．

3.1 L^∞ ノルムに対する小平–Spencer 型評価, Donin 型評価と上田の補題

Čech コバウンダリ方程式の解の評価に関して, 先行研究を紹介する．以下の結果は上田の補題 [U, Lemma 4] として知られており, [KU, §8.3] では別証明・一般化が述べられている．

Proposition 3.1 ([U, Lemma 4], [O, Proposition 3.10] (cf. [HK, §8], [KU, Corollary 1.3]))．*コンパクトリーマン面 C とその十分細かい有限枚からなる nested covering $\mathcal{U}^r, r \in [r_*, 1]$ に対し, 次を満たす正定数 K_∞ が存在する: C 上の任意のユニタリ平坦束 $E \in \mathrm{Pic}^0(C) \setminus \{\mathbb{1}\}$ と $f \in \check{B}^1(\mathcal{U}^r, \mathcal{O}_C(E))$ について $u \in \check{C}^0(\mathcal{U}^r, \mathcal{O}_C(E))$ で $\delta u = f$ かつ*

$$\|u\|_{L^\infty, \mathcal{U}^r} \leq \frac{K_\infty}{d(\mathbb{1}, E)} \|f\|_{L^\infty, \mathcal{U}^r}.$$

この結果より, L^∞ ノルムに関して, トーションでないユニタリ平坦な法線束 $N_{C/M} \in \mathrm{Pic}^0_{\mathrm{nt}}(C)$ の小平–Spencer 型評価について

$$K(N_{C/M}^{-\ell+1}) = \frac{K_\infty}{d(\mathbb{1}, N_{C/M}^{-\ell+1})}$$

となるということである．この結果から Donin 型評価についても明示的な表示を得られる．

Proposition 3.2 ([O, Proposition 3.11])．*コンパクトリーマン面 C とその十分細かい有限枚からなる nested covering $\mathcal{U}^r, r \in [r_*, 1]$ に対し, 次を満たす正定数 D_∞ が存在する: 任意の C 上のユニタリ平坦束 $E \in \mathrm{Pic}^0(C) \setminus \{\mathbb{1}\}$ と $f \in \check{B}^1(\mathcal{U}^{r_1}, \mathcal{O}_C(E))$ について $v \in \check{C}^0(\mathcal{U}^{r_2}, \mathcal{O}_C(E))$ で $\delta v = f$ かつ*

$$\|v\|_{L^\infty, \mathcal{U}^{r_2}} \leq \frac{D_\infty}{(r_1 - r_2)^2 d(\mathbb{1}, E)} \|f\|_{L^\infty, \mathcal{U}^{r_1}}.$$

ここで, $r_1, r_2 \in (r_*, 1)$ は $r_1 > r_2$ なる任意の数とする．

小平–Spencer 型評価の際と同様に, L^∞ ノルムを用いた Donin 型評価についても, トーションでないユニタリ平坦な法線束 $N_{C/M} \in \mathrm{Pic}^0_{\mathrm{nt}}(C)$ に対し,

$$D(N_{C/M}^{-\ell+1}) = \frac{D_\infty}{d(\mathbb{1}, N_{C/M}^{-\ell+1})}$$

である．

Proof．概略を述べる．まず, $u = \{(U_j^{r_1}, u_j)\} \in \check{C}^0(\mathcal{U}^{r_1}, \mathcal{O}_C(E)), v = \{(U_j^{r_2}, v_j)\} := \{(U_j^{r_2}, u_j|_{U_j^{r_2}})\} \in \check{C}^0(\mathcal{U}^{r_2}, \mathcal{O}_C(E))$ のそれぞれの一様ノルムの比較を行えばよい．ユニタリ平坦束 E に平坦ファイバー計量を入れていることに注意すると, 平均値不等式より, 任意の $\xi \in U_j^{r_2}$ に対し,

$$|v_j(\xi)| \leq \frac{1}{\pi (r_1 - r_2)^2} \int_{\mathbb{D}(\xi, r_1 - r_2)} |v_j| d\lambda_j$$

となる．ここで $\mathbb{D}(\xi, r_1 - r_2)$ は ξ を中心とする半径 $r_1 - r_2 > 0$ の円盤, $d\lambda_j$ は Lebesgue 測度．いま, $\mathbb{D}(\xi, r_1 - r_2) \subset U_j^{r_1} \subset U_j^1 = U_j$ が成立しているので,

$$\frac{1}{\pi (r_1 - r_2)^2} \int_{\mathbb{D}(\xi, r_1 - r_2)} |v_j| d\lambda_j \leq \frac{1}{\pi (r_1 - r_2)^2} \cdot \|u\|_{L^\infty, \mathcal{U}^{r_1}} |v_j|_{h_{\mathrm{flat}}} \cdot \mathrm{Vol}(U_j).$$

以上より, 上田の補題と合わせ, $D_\infty = \pi^{-1} K_\infty \max_j \mathrm{Vol}(U_j)$ とすることで成立する． □

3.2 L^2 ノルムに関する小平–Spencer 型評価, Donin 型評価と Hörmander 型 L^2 評価

コンパクトリーマン面上のユニタリ平坦束に関する Kodaira–Spencer 型評価は, L^∞ ノルムについては上田の補題により明示的な表示が得られていた. Gong–Stolovitch の条件を用いる過程では, 上田の補題から導かれる L^∞ ノルムに関する小平–Spencer 型評価・Donin 型評価で十分であるが, L^2 ノルムを考慮した場合でも同様の表示が得られることを紹介する.

Proposition 3.3 ([O, Corollary 3.4, Proposition 3.5]). コンパクトリーマン面 C とその上のユニタリ平坦束 (E, h_{flat}), $E \in \mathrm{Pic}^0(C) \setminus \{\mathbb{1}\}$, および C の *nested covering* $\mathcal{U}^r, r \in [r_*, 1]$ を固定する. すべての $r_* < r' < r \leq 1$ なる r, r' に対し, 任意の *Čech* 1*-coboundary* $f = \{(U^r_{jk}, f_{jk})\} \in \check{B}^1(\mathcal{U}^r, \mathcal{O}_C(E))$ について,

(KS) 次を満たす定数 K_2 が存在する: *Čech 0-cochain* $u = \{(U^r_j, u_j)\} \in \check{C}^0(\mathcal{U}^r, \mathcal{O}_C(E))$ で $\delta u = f$ かつ

$$\|u\|_{L^2, \mathcal{U}^r} \leq \frac{K_2}{d(\mathbb{1}, E)} \|f\|_{L^2, \mathcal{U}^r}$$

となる.

(D) 次を満たす定数 D_2 が存在する: *Čech 0-cochain* $v = \{(U^{r'}_j, v_j)\} \in \check{C}^0(\mathcal{U}^{r'}, \mathcal{O}_C(E))$ で $\delta v = f$ かつ

$$\|v\|_{L^2, \mathcal{U}^{r'}} \leq \frac{D_2}{(r - r')^2 d(\mathbb{1}, E)} \|f\|_{L^2, \mathcal{U}^r}$$

となる.

この結果について説明する前に「Hörmander の L^2 評価」について述べる.

Proposition 3.4 ([Hö]). 任意の *Hermitian* 正則直線束 (L, h) に対し, 次を満たす正定数 $H(L)$ が存在する: $\overline{\partial}$*-closed* かつ $[v] \in H^{0,1}(C, L)$ が自明になる L 値 $(0,1)$-形式 v に対し, L の大域切断 u で $\overline{\partial} u = v$ かつ

$$\sqrt{\int_C |u|^2_h dV_g} \leq H(L) \sqrt{\int_C |v|^2_{g,h} dV_g}.$$

また, L が正則に自明でないユニタリ平坦束である場合は小池–橋本による以下の結果が得られている.

Proposition 3.5 ([HK, Theorem 1.1]). 次を満たす正定数 H が存在する: 任意の正則直線束 $E \in \mathrm{Pic}^0(C) \setminus \{\mathbb{1}\}$, $\overline{\partial}$*-closed* かつ $[v] \in H^{0,1}(C, E)$ が自明になる E 値 $(0,1)$-形式 v に対し, E の大域切断 u で $\overline{\partial} u = v$ かつ

$$\sqrt{\int_C |u|^2_{h_{\text{flat}}} dV_g} \leq \frac{H}{d(\mathbb{1}, E)} \sqrt{\int_C |v|^2_{g, h_{\text{flat}}} dV_g}.$$

[HK] ではより一般に任意の次元のコンパクトケーラー多様体でこの結果が示されている. また, コンパクトリーマン面はケーラーである.

この Hörmander 型評価と L^2 ノルムに関する小平–Spencer 型評価との関係は以下の形で Čech–Dolbeaurt 対応として知られている.

Proposition 3.6 ([O, Proposition 3.1]). コンパクトリーマン面とその *Hermite* 計量 (C, g) と *Hermite* 正則直線束 (L, h) および C の *nested covering* $\mathcal{U}^r = \{U^r_j\} (r \in [r_*, 1])$ を固定する. また, $(C, g), (E, h)$ に対し *Hörmander* 型評価を達成する定数を $H(L)$ とする. このとき正定数 α, β で次を満たすものが存在する:

任意の $f \in \check{B}^1(\mathcal{U}^r, \mathcal{O}_C(L))$ に対し, $u \in \check{C}^0(\mathcal{U}^r, \mathcal{O}_C(L))$ で, $\delta u = f$ および

$$\|u\|_{L^2, U^r_j} \leq (\alpha + \beta H(L)) \cdot \|f\|_{L^2, U^r_{jk}}$$

を満たすものが存在する. ただし, α, β は $r \in [r_*, 1]$ に依存しない.

証明は [KU, Lemma 2.8] に基づく. $\overline{\partial}$ 方程式に 1 の分割を適用することで示すことができる. この結果を用いることで $E \in \mathrm{Pic}^0(C) \setminus \{\mathbb{1}\}$ に対し,

$$K(E) \le \alpha + \frac{\beta H}{d(\mathbb{1}, E)} \le \frac{\alpha\Delta + \beta H}{d(\mathbb{1}, E)}$$

と計算し, Proposition 3.3 の小平–Spencer 評価を導くことができる. ただし, Δ は d で測った $\mathrm{Pic}^0(C)$ の直径である. L^2 ノルムに関しても小平–Spencer 型評価から Donin 型評価を導くことができるが, この場合も L がユニタリ平坦な正則直線束の時にのみ働く議論である.

3.3 $T_C \otimes N_{C/M}^{-\ell+1}$ に対する小平–Spencer 型評価

ここでは, コンパクトリーマン面 C の種数が 2 以上である場合の $K(T_C \otimes N_{C/M}^{-\ell+1})$ についての結果を述べる.

Proposition 3.7 ([O, Proposition 3.7]). *種数 2 以上のコンパクトリーマン面 C と Hermite ユニタリ平坦束 (E, h_{flat}) に対し, $K(T_C \otimes E)$ は E に関して有界である.*

この結果は Čech–Dolbeault 対応により, Hörmander 型評価を実現する Hermitian 正則直線束に依存した定数 $H(T_C \otimes E)$ が E に関して示すことで十分である. 特に, 次を示せば十分である.

Proposition 3.8 ([O, Proposition 3.8]). *種数 2 以上のコンパクトリーマン面 C とユニタリ平坦束 E に対し, 関数 $\kappa : \mathrm{Pic}^0(C) \to \mathbb{R}$ を次で定義する.*

$$\kappa(E) = \sup\left\{ \frac{\sqrt{\int_C |u|_h^2 dV_g}}{\sqrt{\int_C |\overline{\partial} u|_{g,h}^2 dV_g}} \;\middle|\; u \in \mathcal{A}^{0,0}(C, T_C \otimes E) \setminus \{0\} \right\}.$$

このとき, κ は $\mathrm{Pic}^0(C)$ 上の上半連続関数.

ここで, $\mathcal{A}^{p,q}(C, L)$ は C 上の C^∞ 級な L 値 $(p,q)-$ 形式全体を表している. この関数は well-defined であり, $\kappa(E)$ は $H(T_C \otimes E)$ と一致することを説明する. 種数が 2 以上であることから, $T_C \otimes E$ は negative である. よって, $H^0(C, T_C \otimes E) = 0$ である. これは $\mathcal{A}^{0,0}(C, T_C \otimes E)$ 上の $\overline{\partial}$ 方程式の解の一意性を導く. また, $\mathrm{Pic}^0(C)$ はコンパクトであるから, κ が上半連続であれば最大値を持つことがわかる. 連続性まで言及することもできるが ([K, §7]), [O] では [HK, §2.6] の「perturbed $\overline{\partial}$ 作用素」を用いて上半連続性を示す方法を用いた. また, 以上の議論は C の接束 T_C の代わりに negative な正則直線束としても成立するということは簡単にわかる.

3.4 主結果

これまでの結果をまとめ, 主定理の証明を紹介する.

コンパクトリーマン面 C がトーラスのとき　接束 T_C が自明になるので,

$$D_*(2^{k+1}) = 1 + \max_{2 \le \ell \le 2^{k+1}} \{(1 + c\,K(N_{C/M}^{-\ell+1})) \cdot D(N_{C/M}^{-\ell+1})\}$$

を調べればよい. ある正定数 K_1, D_1 が存在して,

$$K(N_{C/M}^{-\ell+1}) \le \frac{K_1}{d(\mathbb{1}, N_{C/M}^{-\ell+1})}, \quad D(N_{C/M}^{-\ell+1}) \le \frac{D_1}{d(\mathbb{1}, N_{C/M}^{-\ell+1})}$$

となるので,

$$D_*(2^{k+1}) \le 1 + (1 + cK_1\omega_{k+1}) \cdot D_1\omega_{k+1}$$

が得られる. ここから, $N_{C/M}$ が Brjuno 条件を満たすとき, Proposition 2.1 の (1) は達成されることがわかる.

コンパクトリーマン面 C が種数 2 以上であるとき　ユニタリ平坦束 E に対して, $K(T_C \otimes E)$ が最大値を持つのでそれを, $\widehat{K}$ とする．また, C がトーラスの時と同様に, 正定数 D'_1 を用いて $D(N_{C/M}^{-\ell+1}) \leq D'_1/d(\mathbb{1}, N_{C/M}^{-\ell+1})$ であるとする．よって,

$$D_*(2^{k+1}) \leq 1 + (1 + c\widehat{K}) \cdot D'_1 \omega_{k+1}$$

が得られる．同様に $N_{C/M}$ が Brjuno 条件を満たすとき, Proposition 2.1 の (1) は達成される．

4　Brjuno 条件について

最後に Brjuno 条件についてとその同値な条件について述べる．まず簡単な考察から次がわかる．

Proposition 4.1. コンパクトリーマン面 C に対し, $E \in \mathrm{Pic}^0_{\mathrm{nt}}(C)$ があるユークリッド距離から誘導される距離 d について *Brjuno* 条件をみたすとする．このとき, E は d とリプシッツ同値な距離についても *Brjuno* 条件を満たす.

特に以下の形で知られる上田の距離は d とリプシッツ同値である．証明は [KU, Proposition A.3] を参照せよ:

$$d_{\mathrm{Ueda}}(\mathbb{1}, E) \coloneqq \inf\{\max_{j,k} |1 - t_{jk}| \mid E = [\{(U_{jk}, t_{jk})\}] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathrm{U}(1))\}.$$

よって, 上田の距離における Brjuno 条件とユークリッド距離から誘導される Brjuno 条件は同値である．

トーラスに対する本結果が, Arnol'd の結果の拡張であることについては以下からわかる．

Proposition 4.2 ([O, Proposition 2.7]). コンパクトリーマン面 C 上のユニタリ平坦束 $E \in \mathrm{Pic}^0_{\mathrm{nt}}(C)$ が *Diophantus* 条件を満たすとき, E は *Brjuno* 条件を満たす.

Proof. 正定数 c, τ を $d(\mathbb{1}, E^n) \geq cn^{-\tau}$ が任意の正整数 n で成立するようなものとする．このとき, 各 $k \geq 1$ に対し,

$$\begin{aligned}\omega_{k+1}(E) = \max_{2\leq\ell\leq 2^{k+1}} \frac{1}{d(\mathbb{1}, E^{-\ell+1})} &= \max_{2\leq\ell\leq 2^{k+1}} \frac{1}{d(\mathbb{1}, E^{\ell-1})} \\ &\leq \max_{2\leq\ell\leq 2^{k+1}} \frac{(\ell-1)^\tau}{c} < \frac{2^{\tau(k+1)}}{c}.\end{aligned}$$

ここで, d が任意の $E_1, E_2, E_3 \in \mathrm{Pic}^0(C)$ に対して $d(E_1, E_2) = d(E_1^{-1}, E_2^{-1}) = d(E_1 \otimes E_3, E_2 \otimes E_3)$ が成立するという意味で不変距離であることを用いている．よって,

$$\sum_{k\geq 1} \frac{\log \omega_{k+1}(E)}{2^k} < \sum_{k\geq 1} \frac{\tau(k+1)\log 2 - \log c}{2^k} < \infty.$$

□

また, 一般に逆は成立しない．ここで, ユニタリ平坦束の Brjuno 条件が無理数に対する Brjuno 条件のアナロジーとなっていることを例を通して確認する．この例においては上田の距離 d_{Ueda} を採用する．

正種数のコンパクトリーマン面 C の有限個からなる開被覆を $\{U_j\}$ とする．ユニタリ平坦束 E が $\{(U_{jk}, t_{jk})\} \in \check{C}^1(\{U_j\}, \mathrm{U}(1))$ から定まるものとする．ただし, $\mathrm{U}(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とする．また, t_{jk} は無理数 θ を用いて次の関係を満たしているとする:

$$t_{jk} = \begin{cases} e^{2\pi\sqrt{-1}\theta} & (jk = 01) \\ e^{-2\pi\sqrt{-1}\theta} & (jk = 10) \\ 1 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

このとき, $\mathbb{1}$ と E^n との距離は十分小さい正数 γ を用いて次のように書ける (詳細は [KU, §A.3]):

$$\gamma|1 - e^{2\pi\sqrt{-1}n\theta}| \leq d_{\mathrm{Ueda}}(\mathbb{1}, E^n) \leq |1 - e^{2\pi\sqrt{-1}n\theta}|.$$

また, 簡単な計算から

$$4\mathrm{dist}(n\theta, \mathbb{Z}) \leq |1 - e^{2\pi\sqrt{-1}n\theta}| \leq 2\pi\mathrm{dist}(n\theta, \mathbb{Z})$$

が成立する. ここで, $\mathrm{dist}(\alpha, \mathbb{Z}) = \inf_{N\in\mathbb{Z}} |\alpha - N|$. したがって,

$$\log\frac{1}{2\pi} \leq \log\left(\max_{2\leq\ell\leq 2^{k+1}} \frac{1}{d_{\mathrm{Ueda}}(\mathbb{1}, E^{-\ell+1})}\right) - \log\left(\max_{2\leq\ell\leq 2^{k+1}} \frac{1}{\mathrm{dist}((-\ell+1)\theta, \mathbb{Z})}\right) \leq \log\frac{1}{4\gamma}$$

が任意の $k \geq 1$ で成立するので, $E \in \mathrm{Pic}^0_{\mathrm{nt}}(C)$ が Brjuno 条件を満たすことは, θ が次をみたすことと同値である:

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{2^k}\log\left(\max_{2\leq\ell\leq 2^{k+1}} \frac{1}{\mathrm{dist}((-\ell+1)\theta, \mathbb{Z})}\right) < \infty.$$

これは無理数に対する Brjuno 条件であり, [B, condirion ω] で導入された. 無理数に対する Brjuno 条件は, 例えば [MMY] で詳しく述べられている.

さらに, “横断” 方向の線形化に関する十分条件として Brjuno 条件が現れることがわかる. すなわち, 各 U_j の局所定義関数でその変換関数が U(1) 変換となるようなものが得られるための十分条件を Brjuno 条件として記述できる. この線形化について詳しくは [U], [GS, §2.5] で述べられている.

Proposition 4.3 (cf. [P], [St]). *正種数のコンパクトリーマン面 C と $E \in \mathrm{Pic}^0_{\mathrm{nt}}(C)$ に対し, 実数列 $\{\eta_m\}$ を次で定める.*

$$\eta_0 = 1,\ \eta_m = \frac{1}{d(\mathbb{1}, E^{-m+1})}\max_{m_1+\cdots+m_p+s=m}\eta_{m_1}\cdots\eta_{m_p}.$$

ここで, 最大値は $1 \leq m_j < m$ と自然数 s を動かしている. この数列 $\{\eta_m\}$ に関して, ある正の実数 L_0, L が存在して, 任意の $m \geq 1$ で $\eta_m \leq L_0 L^m$ となることは, E が Brjuno 条件を満たすことと同値である.

最後にこの定理と合わせた結果を紹介する.

Proposition 4.4 (cf. [GS, Theorem 1.2]). *コンパクトリーマン面 C が非特異複素曲面 M に法束 $N_{C/M}$ が $N_{C/M} \in \mathrm{Pic}^0_{\mathrm{nt}}(C)$ となるよう埋め込まれているとし, さらに $N_{C/M}$ は Brjuno 条件を満たすとする. このとき, [GS, Definition 2.5] の意味での形式的射により横断方向線形化可能であれば, 実際に横断方向線形化可能である. また, C がトーラスであるときは形式的射の存在の仮定が必要なく, 横断方向線形化可能である.*

参考文献

[A] V. I. Arnol'd, Bifurcation of invariant manifolds of differential equations and normal forms in neighborhoods of elliptic curves, Funkcional Anal. i Prilozen., 10-4 (1976), 1–12.

[B] A. D. Brjuno, Analytical form of differential equations, Trans. Moscow Math. Soc. **25** (1971), 131-288; **26**(1972), 219-229.

[CG] L. Carleson and T. W. Gamelin, Complex Dynamics, Universitext: Tracts in Mathematics Springer–Verlag (1993).

[D] I. F. Donin, Cohomology with estimates for coherent analytic sheaves over complex spaces, Mat. Sb. (N.S.) **86**(128) 1971, 339–366. MR0299829. **146**, 331–368 (1962).

[GS] X. Gong and L. Stolovitch, Equivalence of neighborhoods of embedded compact complex manifolds and higher codimension foloiations, Arnold Math J., (8):61–145, (2022).

[Hö] L. Hörmander, L^2 estimates and existence theorems for $\overline{\partial}$ operator, Acta Math. **113** (1965), 89–152, MR179443.

[HK] Y. Hashimoto and T. Koike, Ueda's lamma via uniform Hörmander estimates for flat line bundles, to appear in Kyoto J. Math.

[K] K. Kodaira, Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures, Springer, Classics In Mathematics (2005).

[KS] K. Kodaira and D. C. Spencer, A theorem of completeness of characteristic systems of complete continuous systems, Amer. J. Math. **81** (1959), 477–500. MR0112156.

[KU] T. Koike and T. Uehara, A gluing construction of K3 surface, arXiv 1903.01444.

[MMY] S. Marmi, P. Mousaa and J.-C. Yoccoz, The Brjuno functions and their regularity properties, Commun. Math. Phys **186** (1997), 265–293.

[O] S. Ogawa, On holomotphic tubular neighborhods of compact Riemann surfaces, arXiv:2402.07040.

[P] J. Pöschel, On invariant manifolds of complex analytic mappings near fixed points, Exposition. Math. **4** (1986), 97–109.

[Si] C. L. Siegel, Iteration of analytic functions, Ann. Math. **43** (1942), 607–612.

[St] L. Stolovitch, Sur un théorème de Dulac, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **44** (1994), 1397–1433.

[U] T. Ueda, On the neighborhood of a compact Riemann surface with topologically trivial normal bundle, Math. Kyoto Univ., **22** (1983), 583–607.

[Y] J.-C. Yoccoz, Théorème de Siegel, nombres de Brjuno et polynômes quadratiques , Petits Diviseurs en Dimension 1, Asterisque, **231** (1995), 1–88.