トロイダル群上のコンパクト台付きのコホモロジー群について

大阪公立大学 理学研究科 田中 仁一朗[1]
Jinichiro Tanaka
Graduate School of Science,
Osaka Metropolitan University

1. 導入

トロイダル群のコホモロジー群について, 小池 貴之氏との共同研究の結果 [8] を踏まえて紹介する. トロイダル群の研究は, 複素可換 Lie 群の分類 [10] や, 複素可換 Lie 群の Stein 性についての研究 [9] に始まる. 特に [10] では, 2 次元の連結な複素可換 Lie 群の分類がされている. 今回は 2 次元のトロイダル群に注目し, そのコホモロジーについて述べる.

まず一般次元のトロイダル群について, 基本的事項を述べる. トロイダル群とは, 非定数の正則関数を持たない連結な複素可換 Lie 群である. またトロイダル群は一般に, 複素 Euclid 空間 $\mathbb{C}^n$ を離散部分群 Γ で割った商群 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ の形で表せる. トロイダル群の (ドルボー) コホモロジーについては, Kazama や Abe の結果がある. Kazama はトロイダル群 X について $H^k(X, \mathcal{O}_X)$ を特定した [5]. その結果によると, 離散部分群 Γ の生成元たちによる無理数論的な繊細な条件で $H^k(X, \mathcal{O}_X)$ の構造は大きく異なる. この $H^k(X, \mathcal{O}_X)$ の次元によって, すべてのトロイダル群はいずれかに分類され, すべてが有限次元のとき X をテータトロイダル群, 無限次元 non-Hausdorff 空間になるものがあるときワイルドトロイダル群という. ただし, $H^k(X, \mathcal{O}_X)$ の位相には広義一様収束に関する位相を考えている. そして, Abe は平坦直線束 E に係数をもつコホモロジー $H^k(X, E)$ を特定した [2]. この $H^k(X, E)$ の次元は, Γ の生成元たちと E のホロノミーに関する条件で特徴づけられ, その条件はより複雑な無理数論的条件である.

これらの Kazama と Abe の結果に対し, [8] は 2 次元のトロイダル群のコンパクト台を持つコホモロジー $H_0^1(X, E)$ が消滅する条件についての結果である. この主張は, $H^1(X, E)$ が無限次元 non-Hausdorff 空間になる場合でも, $H_0^1(X, E)$ が消滅するという主張を含んでいる. 本文では, この結果を中心に 2 次元のトロイダル群のコホモロジーついて紹介する.

まず, 2 次元のトロイダル群の特徴づけや分類については Morimoto [10] の結果がある. この分類によると, コンパクトな 2 次元トロイダル群は 2 次元複素トーラスであり, コンパクトでない 2 次元トロイダル群は次のような具体的表示ができる. コンパクトでない 2 次元トロイダル群を X とすると, X は離散部分群

$$\Gamma := \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \tau \\ q \end{pmatrix} \right\rangle. \tag{1}$$

を用いて $\mathbb{C}^2/\Gamma$ と書ける. ただし, τ は上半平面 $\mathbb{H}$ の元で, $(p, q) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ である. このような X と, その X 上のユニタリ平坦直線束の組を考えたい. そのユニタリ平坦直線束と

[1]Email adress: sw23876x@st.omu.ac.jp, 本研究は JST 科学技術イノベーション創出に向けた大学フェローシップ創設事業 JPMJFS2138 の支援を受けたものである.

して, 実数 θ_1 と θ_2 に対する次のユニタリ表現 $\rho\colon \pi_1(X,*)=\Gamma\to U(1)$ に対応する直線束 E を定める.

$$(2)\qquad \rho\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right):=1,\quad \rho\left(\begin{pmatrix}1\\p\end{pmatrix}\right):=e^{2\pi\sqrt{-1}\theta_1},\quad \rho\left(\begin{pmatrix}\tau\\q\end{pmatrix}\right):=e^{2\pi\sqrt{-1}\theta_2}.$$

そして, このような (X,E) の組に対し, [8] では次の定理が得られた.

Theorem 1.1 ([8])**.** 上記の (1) と (2) から定まるトロイダル群とユニタリ平坦直線束の組を (X,E) とする. 各 $n\in\mathbb{Z}$ ごとに, $\theta_1+np\notin\mathbb{Z}$ または $\theta_2+nq\notin\mathbb{Z}$ のうち, 少なくとも一方が成り立つと仮定する. このとき, $H^1_0(X,E)=0$ が成り立つ.

Remark 1.2. 上記の Theorem 1.1 の主張において, X がトロイダル群である必要はないことが判明している [8]. つまり, 上半平面の元 $\tau\in\mathbb{H}$ と実数の組 (p,q) からなる (1) のような Γ に対して定まる複素曲面 X と, その X 上のユニタリ平坦直線束 E との組 (X,E) に対して主張が成立する. 実際に, $X=\mathbb{C}^2/\Gamma$ がトロイダル群であることの必要十分条件は, p または q が無理数であることが知られている (Lemma 2.1). また, Theorem 1.1 の仮定のもとでは, 直線束 E は正則に自明な直線束とはならず $H^0(X,E)=0$ となる.

§2 では, 2 次元のトロイダル群についての基本的事項や, そのコホモロジー群について判明している事実を具体例とともに述べる.

§3 では, $p=\theta_1=0$ の場合において, Theorem 1.1 の状況の観察を行なう ([8] 参照). 主に, 証明の中で用いる Hörmander estimate がどのような点で有効であるのかを紹介する. 証明の概略は以下のとおりである: 条件 $p=\theta_1=0$ のもとで, $\overline{\partial}$-方程式の解を直接構成することによって証明した. 具体的には, $\overline{\partial}$-方程式を X の被覆空間 $(\mathbb{C}^*)^2$ 上で Hörmander estimate により解く. さらに, X 上の解を誘導できるようにするため, その $(\mathbb{C}^*)^2$ 上の解に, ある周期条件を満たすための補正項を加えることで $(\mathbb{C}^*)^2$ 上の解を構成する. ここで得られる補正項は形式的冪級数として得られるのだが, Hörmander estimate による解を選んだことで, その級数は収束するようなものとして構成されていることが確かめられる. このように構成した解はコンパクト台を持っており, Theorem 1.1 は示される.

一般の場合には, Theorem 1.1 は次のように示される ([8] 参照). まず, Serre 双対定理により $H^1_0(X,E)=0$ の証明は, 位相双対空間 $(H^1(X,E))^\vee$ の消滅を示すことに帰着される. この $(H^1(X,E))^\vee$ の消滅は, Čech–Dolbeault 対応と, $B^{0,1}(E)$ が $Z^{0,1}(E)$ のなかで稠密であることから従う. ただし, X 上の E 値 C^∞ 級 (p,q)-form 全体の集合 $\mathscr{A}^{p,q}_{C^\infty}(E)$ に対し $Z^{0,1}(E):=\operatorname{Ker}\left(\overline{\partial}\colon \mathscr{A}^{0,1}_{C^\infty}(E)\to\mathscr{A}^{0,2}_{C^\infty}(E)\right)$ とし, $B^{0,1}(E):=\operatorname{Im}\left(\overline{\partial}\colon \mathscr{A}^{0,0}_{C^\infty}(E)\to\mathscr{A}^{0,1}_{C^\infty}(E)\right)$ としており, 広義一様収束の位相で考えている.

2. 2 次元のトロイダル群についての基本的性質

この節では, 2 次元のトロイダル群について既に知られている基本的性質を述べる.

Morimoto [10] の分類によれば, 次元 2 のトロイダル群のうちコンパクトなものは複素トーラスである. 一方, コンパクトでないものは, $\mathbb{Z}$ 生成の rank 3 のある離散部分群 Γ で $\mathbb{C}^2$ を割った商の形で表せる. 複素曲面 $X:=\mathbb{C}^2/\Gamma$ がトロイダル群になるために必要十分な離散部分群 Γ の条件について, 次の補題で判明している.

Lemma 2.1. 上半平面の元 $\tau \in \mathbb{H}$ と, 実数の組 $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ に対し, (1) の Γ で定まる複素曲面を X とする．このとき, p もしくは q のどちらか一方が無理数であることは, 複素曲面 X がトロイダル群であるための必要十分条件である.

この Lemma 2.1 は, 次の Lemma を用いれば簡単な計算から得られる.

Lemma 2.2. [1, Theorem 1.1.4] 離散部分群 Γ を上半平面の元 $\tau \in \mathbb{H}$ と実数の組 $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ からなる (1) と定める．このとき, 次は二つの条件は同値である.

(i) $\mathbb{C}^2/\Gamma$ はトロイダル群である.
(ii) 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対し, 内積が $\langle \sigma, \gamma \rangle \in \mathbb{Z}$ となる $\sigma \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ が存在しない. □

この (ii) のような条件は, トロイダル群の無理数的条件と呼ばれる.

以降では, 2 次元のトロイダル群についてのみ注目する．つまり, $(p,q) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ について, (1) の Γ で定まるトロイダル群 X を考える．トロイダル群 X は次の条件によって, テータトロイダル群とワイルドトロイダル群のどちらか一方に分類される ([6] や [7] 参照).

Condition 2.3. 次を満たすような正数 A と $0 < \delta < 1$ が存在する．任意の正整数 n に対し,

$$\mathrm{dist}((np, nq), \mathbb{Z}^2) \geq A\delta^n.$$

が成り立つ. ただし, dist は Euclid 距離である.

この Condition 2.3 は, 有理数近似の悪さに関する条件である．Condition 2.3 が満たされるとき, X をテータトロイダル群という. 逆に Condition 2.3 が満たされないとき, X をワイルドトロイダル群という．Kazama の結果 [5] を用いると, これらのトロイダル群を $H^k(X, \mathcal{O}_X)$ によって特徴づける次の Proposition を得る.

Proposition 2.4. ([5, Theorem 4.3], [8, Proposition 2.3]) 上半平面の元 $\tau \in \mathbb{H}$ と, 実数の組 $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ に対して定まるトロイダル群を X とする．このとき, 次の (i), (ii), (iii) は同値である.

(i) X はテータトロイダル群である.
(ii) すべての $k \geq 1$ に対し, $\dim H^k(X, \mathcal{O}_X) < \infty$.
(iii) 任意の $m = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3$ に対し, 次を満たす正数 $a > 0$ が存在する:

$$\sup_{m \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} \frac{e^{-a \cdot \max\{|m_1|, |m_2|\}}}{|\tau m_1 + t m_2 - m_3|} < \infty.$$

ただし, $t := q - p\tau$ としている.

一方, 上記の同値条件を満たさないとき, $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ は無限次元 *non-Hausdorff* 空間となり, X はワイルドトロイダル群である.

Proof. [8, Proposition 2.3] を参照せよ. □

Remark 2.5. この Proposition 2.4 は一般のトロイダル群に対しても成り立つ. これにより, 一般のトロイダル群 X も $H^k(X, \mathcal{O}_X)$ の次元によって分類される. すなわち, すべての $k \geq 1$ に対し $H^k(X, \mathcal{O}_X)$ が有限次元であるとき X はテータトロイダル群であり, そうでないときワイルドトロイダル群である.

以降では, (1) と (2) から定まる組 (X,E) を考える．この組 (X,E) に対し Abe の結果を用いれば, 平坦直線束係数のコホモロジー $H^k(X,E)$ も特定できる．さらに, 限定的な状況のもとでは, $H^k(X,E)$ は消滅するか, 無限次元 non-Hausdorff 空間になるかのどちらかになる．

Proposition 2.6. ([2, Theorem 9.1], [8, Proposition 2.4]) *組 (X,E) を (1), (2) から定まるもので, $p=\theta_1=0$ かつ E は正則に自明でない直線束とする．ある正数 $A>0$ と $0<\delta<1$ が存在し, 次を満たすと仮定する．任意の $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し,*

$$\operatorname{dist}(nq-\theta_2,\mathbb{Z})\geq A\delta^n \tag{3}$$

を満たす．このとき, $H^1(X,E)=0$ が成り立つ．一方で, 仮定が成り立たないときは, $H^1(X,E)$ は無限次元 non-Hausdorff 空間になる．

Proof. [8, Proposition 2.4] を参照せよ． □

以下では, Proposition 2.6 の状況で, $H^1(X,E)$ が消滅する場合と無限次元になる場合の具体例を紹介する．

Example 2.7. ([12]) 組 (X,E) を (1), (2) から定まるもので, 次を満たすものとする:

(*i*) $p=\theta_1=0$ かつ $\tau=\sqrt{-1}$,
(*ii*) $2\theta_2=q$,
(*iii*) θ_2 が Diophantine である．すなわち, 任意の整数 m と $n\neq 0$ に対し, ある正数 A と $a\in\mathbb{Z}_{>0}$ が存在し, 次を満たす:

$$\left|\theta_2-\frac{m}{n}\right|\geq\frac{A}{|n|^a}.$$

このとき, $H^1(X,E)$ は消滅する．

Proof. 写像 $\pi\colon X\to C:=\mathbb{C}/\langle 1,\tau\rangle$ を第一射影 $\mathbb{C}^2\ni(z,w)\mapsto z\in\mathbb{C}$ が誘導する写像とする． 楕円曲線 C の十分小さい Stein 被覆 $\{U_j\}$ を取る． 写像 π での引き戻し $V_j:=\pi^{-1}(U_j)\cong U_j\times\mathbb{C}^*$ は X の Stein 開被覆 $\{V_j\}$ を定める．このとき直線束 E は平坦直線束 E_C の π での引き戻し π^*E_C とみなせることに注意する． ただし, 直線束 E_C は表現 $\rho\colon\pi_1(C,*)=\langle 1,\tau\rangle\to U(1)$:

$$\rho:1\mapsto e^0=1,\ \ \tau\mapsto e^{2\pi i\theta_2}$$

に対応する平坦直線束とする．

さて, $[\{(V_{jk},A_{jk})\}_{jk}]\in H^{0,1}(X,\pi^*E_C)=\check{H}^{0,1}(\{V_j\},\mathcal{O}_X(\pi^*E_C))$ をとる．このとき, A_{jk} たちはそれぞれ $V_{jk}\cong U_{jk}\times\mathbb{C}^*$ 上の π^*E_C の切断である．ただし, $V_{jk}:=V_j\cap V_k$ とし, $U_{jk}:=U_j\cap U_k$ としている．直線束 E_C の U_j 上の局所自明化 e_j に対し, 変換関数 $t_{jk}\in U(1)$ で U_{jk} 上 $e_j=t_{jk}e_k$ となるようなものが存在する．また, 切断 A_{jk} に対し V_{jk} 上のある正則関数 $\widetilde{A}_{jk}(z_j,w_j)$ で, $A_{jk}=\widetilde{A}_{jk}(\pi^*e_j)$ を満たすものが存在する．以下では, $\widetilde{A}_{jk}(\pi^*e_j)$ のことを単に $\widetilde{A}_{jk}e_j$ と書く．正則関数 $\widetilde{A}_{jk}(z_j,w_j)$ の w_j についての Laurent 展開

$$\widetilde{A}_{jk}(z_j,\zeta_j)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_{jkn}(z_j)\zeta_j^n$$

を考える．ただし, a_{jkn} は U_{jk} 上の正則関数であり, $\zeta_j \coloneqq e^{2\pi i w_j}$ を $\mathbb{C}^*$ の座標としている．すると, $\{A_{jk}\}$ の 1-cocycle 条件から,

$$\begin{aligned}
0 &= A_{jk} + A_{k\ell} + A_{\ell j} \\
&= \widetilde{A}_{jk}e_j + \widetilde{A}_{k\ell}e_k + \widetilde{A}_{\ell j}e_\ell \\
&= \left(\widetilde{A}_{jk} + t_{kj}\widetilde{A}_{k\ell} + t_{\ell j}\widetilde{A}_{\ell j}\right) e_j \\
&= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{jkn}(z_j)\zeta_j^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} t_{kj}\alpha_{k\ell n}(z_k)\zeta_k^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} t_{\ell j}\alpha_{\ell jn}(z_\ell)\zeta_\ell^n\right) e_j \qquad (4)
\end{aligned}$$

が $V_{jk\ell}$ 上で成り立つ．ある正則関数 s_{jk} で $\zeta_j = s_{jk}\zeta_k$ なるものが存在するので (4) より,

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\alpha_{jkn}(z_j) + t_{kj}\alpha_{k\ell n}(z_k)s_{kj}^n + t_{\ell j}\alpha_{\ell jn}(z_\ell)s_{\ell j}^n\right) \qquad (5)$$

が成り立つ．ここで, 次のような表現 $\sigma\colon \langle 1, \tau\rangle \to U(1)$ から構成される平坦直線束を F_C とする:

$$\sigma : 1 \mapsto e^0 = 1, \quad \tau \mapsto e^{2\pi i q}.$$

直線束 F_C の U_j 上の局所自明化 ε_j をとると, 各 U_{jk} 上で $\varepsilon_j = s_{jk}\varepsilon_k$ が成り立つ．等式 (5) の両辺に $e_j \otimes \varepsilon_j^n$ を掛けると, 1-cocycle 条件

$$a_{jkn}e_j \otimes \varepsilon_j^n + a_{k\ell n}e_k \otimes \varepsilon_k^n + a_{\ell jn}e_\ell \otimes \varepsilon_\ell^n = 0$$

を得る．したがって, $\{(V_{jk}, \alpha_{jkn}e_j \otimes \varepsilon_j^n)\} \in \check{Z}^1(\{V_j\}, \mathcal{O}_X(E \otimes F^n))$ と分かる．ただし, $F \coloneqq \pi^*F_C$ としている．さらに, $\{(V_{jk}, \alpha_{jkn}e_j \otimes \varepsilon_j^n)\}$ で $\{(V_{jk}, \alpha_{jkn}(\pi^*e_j) \otimes (\pi^*\varepsilon_j^n))\}$ を表していたので, $\{(U_{jk}, \alpha_{jkn}e_j \otimes \varepsilon_j^n)\} \in \check{Z}^1(\{U_j\}, \mathcal{O}_C(E_C \otimes F_C^n))$ と分かる．仮定の (ii) と (iii) より, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し楕円曲線 C 上の平坦直線束 $E_C \otimes F_C^n$ は正則に自明でない．これより, すべての $n \in \mathbb{Z}$ について $H^{0,1}(C, E_C \otimes F_C^n) = 0$ であることがわかる．したがって, 各 $n \in \mathbb{Z}$ について, $\{(U_{jk}, \alpha_{jkn}e_j \otimes \varepsilon_j^n)\}$ は δ-primitive を持つ．すなわち, ある正則関数 $\beta_{jn} : U_j \to \mathbb{C}$ で

$$\delta\{(U_j, \beta_{jn}e_j\varepsilon_j^n)\} = \{(U_{jk}, \alpha_{jkn}e_j\varepsilon_j^n)\}$$

となるものが存在する．

さて, 次のように形式的べき級数を係数に持つ B_j を定める:

$$B_j \coloneqq \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_{jn}(z_j)\zeta_j^n\right) e_j. \qquad (6)$$

このべき級数の収束性について議論する．いま仮定 (iii) より次のような Lemma が成り立つ．

Lemma 2.8. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>}0$ に対し, ある正数 A と a で

$$\mathrm{d}(\mathbb{I}_C, E_C \otimes F_C^n) \geq A(|n| + 1)^{-a}$$

を満たすものが存在する．ここで, d は $\mathrm{Pic}^0(\mathrm{C})$ をトーラスとして見たときの *Euclid* 距離としている．

Proof. 仮定 (iii) の Diophantine 性より, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, ある正数 B と $b \in \mathbb{Z}_{>0}$ で

$$\mathrm{d}(\mathbb{I}_C, E_C^n) \geq B \cdot |n|^{-b}$$

なるものが存在する．仮定 (ii) より $F_C = E_C^2$ であることに注意する．すると, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d(\mathbb{I}_C, E_C \otimes F_C^n)} &= \mathrm{d(\mathbb{I}_C, E_C^{2n+1})} \\
&\geq B \cdot |2n+1|^{-b} \\
&> B \cdot (2|n|+1)^{-b} \\
&> B \cdot (2|n|+2)^{-b} = (B \cdot 2^{-b}) \cdot (|n|+1)^{-b}
\end{aligned}$$

が成り立つ. したがって, $A \coloneqq 2^{-b}B$, $a \coloneqq b$ とすれば主張を得る. □

この Lemma 2.8 より, 次のような正数 A と $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ がとれる:

(7) $$\mathrm{d}(\mathbb{I}_C, E_C \otimes F_C^n) \geq A(|n| + \mathit{1})^{-a}.$$

相対コンパクトな部分集合 $\widetilde{U_j} \Subset U_j$ をとり, これを改めて U_j と書くことにする．任意の $R > 0$ に対し,

$$M_R \coloneqq \sup_{z_j \in U_j, \frac{1}{R} < |\zeta_j| < R} \left| \widetilde{A}_{jk}(z_j, \zeta_j) \right| < \infty$$

が成り立つ. Cauchy の評価式より, 任意の $R > 0$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\sup_{z_j \in U_j} |\alpha_{jkn}(z_j)| \leq \frac{M_R}{R^{|n|}}$$

を得る. 上田の補題 [13, Lemma 4] と (7) より, C と $\{U_j\}$ のみに依存するある正数 $K > 0$ で

$$\begin{aligned}
\max_j \sup_{z_j \in U_j} |\beta_{jn}(z_j)| &\leq \frac{K}{\mathrm{d}(\mathbb{I}_C, E_C^{-\mathit{1}} \otimes F_C^n)} \cdot \max_{j,k} \sup_{z_j \in U_j} |\alpha_{jkn}(z_j)| \\
&\leq \frac{K}{\mathrm{d}(\mathbb{I}_C, E_C^{-\mathit{1}} \otimes F_C^n)} \cdot \frac{M_R}{R^{|n|}}
\end{aligned}$$

なるものが存在する. 実数 $R > 0$ を任意に固定し, $X \in \mathbb{C}$ で

$$\left(\frac{R}{2}\right)^{-1} < |X| < \left(\frac{R}{2}\right)$$

なるものを取る. このとき, 次の不等式が成り立つ:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sup_{U_j} |\beta_{jn}| \right) X^n \right| &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K}{\mathrm{d}(\mathbb{I}_C, E_C^{-\mathit{1}} \otimes F_C^n)} \cdot \frac{M_R}{R^{|n|}} \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^{|n|} \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K}{A}(|n|+1)^a \cdot \frac{M_R}{R^{|n|}} \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^{|n|} \\
&\leq \frac{2KM_R}{A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^a}{2^n} < \infty.
\end{aligned}$$

任意に $R>0$ を取っていたので,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sup_{U_j}|\beta_{jn}|\right)X^n \in \mathbb{C}[[X]]$$

は収束半径 ∞ の収束べき級数であると分かる. したがって, B_j は V_j 上の π^*E の正則切断であると分かる.

ここで, $[\{(V_{jk}, A_{jk})\}_{jk}]$ に対し,

$$\begin{aligned}
B_j - B_k &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\beta_{jn}\zeta_j^n\right)\cdot e_j - \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\beta_{kn}\zeta_k^n\right)\cdot e_k \\
&= \sum_n \left(\beta_{jn}\zeta_j^n - t_{kj}\beta_{kn}s_{kj}^n\zeta_j^n\right)\cdot e_j \\
&= \sum_n \left(\beta_{jn} - t_{kj}\beta_{kn}s_{kj}^n\right)\zeta_j^n\cdot e_j \\
&= \sum_n \alpha_{jkn}\zeta_j^n\cdot e_j = \widetilde{A}_{jk}\cdot e_j = A_{jk}
\end{aligned}$$

が V_{jk} 上で成り立つ. したがって, $\delta\{(V_j, B_j)\} = \{(V_{jk}, A_{jk})\}$ と分かる. すなわち, $H^1(X,E) = 0$ である. □

一方で, q を Diophantine でないような数, つまり Liouville 数と仮定することで, $H^1(X,E)$ は無限次元 non-Hausdorff 空間となる.

Example 2.9. [2, Example 10.3] 組 (X,E) を (1), (2) から定まるもので, 次を満たすものとする:

(i) $p=\theta_1=0$ かつ $\tau=\sqrt{-1}$,
(ii) $\theta_2=q$,
(iii) θ_2 が Liouville 数である.

このとき, $H^1(X,E)$ は無限次元 non-Hausdorff 空間になる. □

Remark 2.10. ([8]) Example 2.7 は Theorem 1.1 の仮定を満たし, 2.9 は満たさない. Theorem 1.1 の仮定のもとでは, $H^1(X,E)$ は消滅するか, ハウスドルフでない無限次元空間になるかのいずれかであることが判明している. これは, Theorem 1.1 の仮定のもとで [2] の記号における Z が $\mathbb{Z}^3$ と一致することと, [2, Theorem 9.1] から従う. 逆に, Proposition 2.6 の仮定を満たす組 (X,E) は, Theorem 1.1 の仮定を満たす.

3. 限定的な状況での Theorem 1.1 の証明

この章では, [8] における観察とその考察を述べる.

3.1. **記号と設定.** この節では, この章で用いる記号や設定について述べる. 以降では, $p=\theta_1=0$ として議論する. つまり, 組 (X,E) を $\tau\in\mathbb{H}$, $q\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 及び $\theta_2\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ に対し, (1) と (2) から定まるトロイダル群 X とユニタリ平坦直線束 E の組とする.

層 $\mathscr{A}^{k,\ell}_{C^\infty}(E)$ を, X 上の E-値 C^∞ 級 (k,ℓ)-form がなす層とする．座標について, $\mathbb{C}^2$ の座標を (z,w) とし, $(\mathbb{C}^*)^2$ の座標を (ξ,η) とする．ただし, $\xi = e^{2\pi\sqrt{-1}z}, \eta = e^{2\pi\sqrt{-1}w}$ としている．作用 σ を $(\mathbb{C}^*)^2$ の作用であって, $\lambda \coloneqq e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ と $\mu \coloneqq e^{2\pi\sqrt{-1}q}$ に対し, $\sigma(\xi,\eta) \coloneqq (\lambda\xi, \mu\eta)$ で定まるものとする．この作用 σ によって誘導される商写像 $(\mathbb{C}^*)^2 \to (\mathbb{C}^*)^2/\mathbb{Z}$ を p とする．次のユニタリ表現 ρ, ρ' から構成される平坦直線束をそれぞれ順に E_C, F_C とする:

$$\rho\colon \langle 1,\tau\rangle \to \mathrm{U}(1); 1 \mapsto 1, \tau \mapsto \nu \coloneqq e^{2\pi\sqrt{-1}\theta_2},$$
$$\rho'\colon \langle 1,\tau\rangle \to \mathrm{U}(1); 1 \mapsto 1, \tau \mapsto \mu.$$

このとき, 作用 σ による商 $(\mathbb{C}^*)^2/\mathbb{Z}$ は X と見なせることに注意する．また, 第一射影 $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}\,; (z,w) \mapsto z$ が誘導する写像 $\pi\colon X \to C$ によって, E は X 上の平坦直線束 π^*E_C と見なせる．

3.2. **観察．** この節では, Theorem 1.1 の状況の観察と, その証明の概略について述べる．詳しくは, [8] を参照せよ．

はじめに $H^1_0(X,E)$ の様子を観察するために, $f \in \Gamma(X, \mathscr{A}^{0,1}_{C^\infty}(E))$ でコンパクト台を持ち $\overline{\partial}$-閉なものをとる．このとき, f の引き戻し $\widetilde{f} \coloneqq p^*f$ は, 周期条件 $\sigma^*\widetilde{f} = \nu\widetilde{f}$ を満たす $(\mathbb{C}^*)^2$ 上の $(0,1)$-form である．いま, $(\mathbb{C}^*)^2$ の Stein 性と $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^2}$ の連接性から, $H^1((\mathbb{C}^*)^2, \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^2}) = 0$ が成り立つ．したがって, $\widetilde{f}$ の $\overline{\partial}$-解 $\widehat{g}$ が存在する．この $\widehat{g}$ が周期条件 $\sigma^*\widehat{g} = \nu\widehat{g}$ 満たすとき, $\widehat{g}$ から f の $\overline{\partial}$-解 $g \in \Gamma(X, \mathscr{A}^{0,0}_{C^\infty}(E))$ を構成できる．実際に [8] では, Hörmander estimate を用いて $\overline{\partial}$-解を得て, さらに周期条件を満たすように修正することで $\widehat{g}$ を構成した．

さて, 以下では Hörmander estimate を用いる利点について観察する．まず, Hörmander estimate を用いなかった場合を考える．上のように $H^1((\mathbb{C}^*)^2, \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^2}) = 0$ により得られる $\widetilde{f}$ の $\overline{\partial}$-解 $\widehat{g_1}$ をとる．この $\widehat{g_1}$ が周期条件を満たすように修正するために, $F_1 \coloneqq \nu^{-1}\sigma^*\widehat{g_1} - \widehat{g_1}$ という $(\mathbb{C}^*)^2$ 上の正則関数を考える．関数 F は, $\widehat{g_1}$ が周期条件を満たす関数からどのくらい離れているかを反映している．このとき, 周期条件を満たすために $\widehat{g_1}$ に加える補正項として, $(\mathbb{C}^*)^2$ 上の正則関数 $G\colon (\mathbb{C}^*)^2 \to \mathbb{C}$ で, $\sigma^*G - \nu G \equiv \nu F_1$ を満たすようなものが構成したい．なぜなら, このような G を用いて $\widetilde{g_1} \coloneqq \widehat{g_1} - G$ とおけば, $\widetilde{g_1}$ は周期条件を満たす $\widetilde{f}$ の $\overline{\partial}$-解となるからである．いま, F_1 のローラン展開 $F_1(\xi,\eta) = \displaystyle\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} a_{n,m}\xi^m\eta^n$ により, 補正項として

$$G_1(\xi,\eta) \coloneqq \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \frac{\nu}{\lambda^m\mu^n - \nu} \cdot a_{n,m}\xi^m\eta^n$$

が形式的に得られる．ところが, この G_1 の収束判定は難しく, f に対する X 上の $\overline{\partial}$-解の構成には至らなかった．

一方で, Hörmander estimate を用いた場合を考える．適切に計量と weight function を定め, Hörmander estimate により得られる $\widetilde{f}$ の $\overline{\partial}$-解 $\widehat{g_2}$ をとる．同様に, $F_2 \coloneqq \nu^{-1}\sigma^*\widehat{g_2} - \widehat{g_2}$ という $(\mathbb{C}^*)^2$ 上の正則関数を考える．同じ理由で, $\sigma^*G - \nu G \equiv \nu F_2$ となる正則関数 $G\colon (\mathbb{C}^*)^2 \to \mathbb{C}$ を構成するために, F_2 のローラン展開 $F_2(\xi,\eta) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} b_{n,m}\xi^m\eta^n$ を考える．すると, Hörmander estimate による $\widehat{g_2}$ の L^2 有界性などから, $F_2(\xi,\eta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{0,m}\xi^m$ と書ける

ことが判明する．これにより，G として

$$G_2(\xi) \coloneqq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda^m \nu^{-1} - 1} \cdot a_{0,m}\xi^m$$

が形式的に得られる．こちらは $|\lambda| < 1$ であることから，広義一様絶対収束することが容易に分かる．これにより，$\widetilde{g_2} \coloneqq \widehat{g_2} - G_2$ は周期条件を満たす $\widetilde{f}$ の $\overline{\partial}$-解となる．したがって，f の $\overline{\partial}$-解を導くことができるのである．

References

[1] Y. Abe, K. Kopfermann: Toroidal groups. Line bundles, cohomology and quasi-abelian varieties, Lecture Notes in Mathematics, **1759**, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[2] Y. Abe: *Cohomology groups of sections of homogeneous line bundles over a toroidal group,* Kyushu. J. Math. **70** (2016), 149-166.

[3] Demailly, J.-P: Complex analytic and differential geometry. https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/manuscripts/agbook.pdf

[4] Y. Hashimoto, T. Koike: *Ueda's lemma via uniform Hörmander estimates for flat line bundles,* to appear in Kyoto J. Math.

[5] H. Kazama: *$\overline{\partial}$-cohomology of (H,C)-groups,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), 297-317.

[6] H. Kazama, S. Takayama: *$\partial\overline{\partial}$-problem on weakly 1-complete Kähler manifolds,* Nagoya Math. J. **155** (1999), 81-94.

[7] T. Koike: *$\overline{\partial}$ cohomology of the complement of a semi-positive anticanonical divisor of a compact surface,* arXiv:2308.03761.

[8] T. Koike, J. Tanaka: *Cohomology groups with compact support for flat line bundles on certain complex Lie groups,* arXiv:2402.10068.

[9] Matsushima, Y., A. Morimoto: *Sur certains espaces fibrés holomorphes sur une variété de Stein.* Bull. Soc. Math. France **88**(1960), 137-155.

[10] A. Morimoto: *Non-compact Complex Lie Groups without Non-constant Holomorphic Functions,* Springer, Berlin, Heidelberg, 1965.

[11] T. Ohsawa: L^2 Approaches in Several Complex Variables, Springer Japan KK, 2018.

[12] J. Tanaka: *Studies on generalizations of the Bochner–Martinelli kernel to complex abelian Lie groups,* master thesis (Japanese).

[13] T. Ueda, *On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle,* Math. Kyoto Univ., **22** (1983), 583–607.