特異点をもつコンパクト複素曲線の近傍について

上田哲生　(京都大学名誉教授)
Tetsuo Ueda (Kyoto University)

1　はじめに

本稿の内容の主要部分は小池貴之氏（大阪公立大学）との共同研究に基づくものである．

複素曲面（２次元複素多様体，コンパクトとは限らない）S 上のコンパクトな複素曲線 C を考える．C は連結であると仮定するが，特異点を持っていてもよいとする．C は既約成分 C_ν ($\nu = 1, \ldots, N$) からなるとする．２つの既約成分の交点数を $a_{\mu\nu} = (C_\mu \cdot C_\nu)$ とし，これらを並べてできる交点行列を $A_C = (a_{\mu\nu})$ で表す．次の事実はよく知られている ([G], [M], また [R] も参照).

定理 (Grauert-Mumford). 次の３条件は互いに同値である：

(1)　交点行列 A_C が負定値である．

(2)　曲線 C が強擬凸近傍をもつ．

(3)　曲線 C を１点につぶしてできる空間 S' に解析空間の構造がはいる．

それでは，A_C が負定値でないときには C の近傍の性質としてどんなことがいえるだろうか？曲線 C が非特異既約という場合，自己交点数 $(C^2) < 0$ ならば上の Grauert-Mumford の定理が適用される．一方 $(C^2) > 0$ のときは C には強擬凹近傍の基本系が存在することが知られている（[S] 参照）．また $(C^2) = 0$ の場合については，[U2] において C が強擬凹近傍の基本系を持つための条件を研究している（これについては第５節で触れる）．

本稿では，非特異既約と限らない一般の曲線 C について，それが強擬凹近傍の基本系をもつための十分条件を，交点行列 A_C を用いた形で与える．また，C において対数的増大度をもつ強多重劣調和関数の存在を示す．主要な結果は次のように述べられる：

主定理. 曲線 C の交点行列 A_C が正固有値をもつならば，C の近傍 V と $V \setminus C$ 上の強多重劣調和関数 $\Phi(p)$ で C において対数的増大度をもつものが存在する．

ここで $\Phi(p)$ が C において対数的増大度をもつとは，C の各点の近傍において C の定義関数を $f(p)$ として，
$$m \log \frac{1}{|f(p)|} \leq \Phi(p) \leq M \log \frac{1}{|f(p)|}$$
となる正定数 m, M がとれることをいう．

系. 上の条件のもとで，C は強擬凹近傍の基本系をもつ．

曲線 C の交点行列 A_C の固有値のうち最大のものを $\lambda(A_C)$ とすると，Grauert-Mumford の定理と本稿の結果は次のように対比される：

- $\lambda(A_C) < 0 \iff$ 曲線 C が強擬凸近傍をもつ.
- $\lambda(A_C) > 0 \implies$ 曲線 C が強擬凹近傍の基本系をもつ.

である.[1] ここで $\Longleftarrow$ は成り立たない.（$\lambda(A_C) = 0$ で C が強擬凹近傍の基本系をもつ場合がある.）

上の定理で，強多重劣調和関数の増大度に注目するのは，これが C の近傍の擬凹性の「強さ」を測るものだと考えられるからである．$(C^2) = 0$ なる非特異既約曲線が（[U2] の意味で）有限型ならば，C の近傍 V と $V \setminus C$ 上の強多重劣調和関数で $P \to C$ のとき ϕ が無限大に発散するものは存在するが，その増大度は対数的より強いものでかくてはならない.（この場合 C の擬凹性は「弱い」と考えられる.）一般に $\lambda(A_C) = 0$ の一般の場合にこのような状況を調べるのは今後の課題であろう.

本稿の構成は次のようになっている．第 2 節では曲線 C が既約かつ非特異の場合に主結果を証明する．第 3 節では，一般の曲線 C について，$\lambda(A_C)$ が正，0，負であるのに従って，$\sum_\nu r_\nu C_\nu$（ここで r_ν は正整数または正実数係数）の形の因子で各既約成分 C_μ との交点数が正，0，負となるものが存在することを示す．この節の内容は線形代数の議論である．第 4 節では，第 3 節の結果を用いて第 2 節の方法を一般化して主定理を証明する．最後に第 5 節で，残された課題と今後の展望について述べる.

$\lambda(A_C)$ の符号に応じた C の性質を簡潔な表にした．各項目の記述は標語的なものなので，正確な意味は本文を参照されたい.

表 1: 一般のコンパクト複素曲線 C の近傍

$\lambda(A_C)$	$\exists\, D = \sum r_\nu C_\nu \ (r_\nu > 0)$	近傍の基本系	$V \setminus C$ 上の強多重劣調和関数
$\lambda(A_C) > 0$	$(C_\mu \cdot D) > 0 \quad (\forall \mu)$	強擬凹	$\gtrsim \log(1/d(p)) \ (p \to C)$
$\lambda(A_C) = 0$	$(C_\mu \cdot D) = 0 \quad (\forall \mu)$	強擬凸/Levi 平坦/??	??（表 2 参照）
$\lambda(A_C) < 0$	$(C_\mu \cdot D) < 0 \quad (\forall \mu)$	強擬凸	C 上に延びる

2 自己交点数正の非特異既約曲線の近傍

ここでは C が複素曲面 S に埋め込まれたコンパクトな非特異既約複素曲線であって $(C^2) > 0$ の場合を考える.

2.1 曲線 C の近傍 V の座標近傍による被覆 $\{V_i\}_{i \in I}$ を次のように定める.

- 各 V_i は局所座標 (z_i, w_i) によって 2 重円板 $\{(z_i, w_i) \mid |z_i|, < 1, |w_i| < 1\}$ に双正則.
- $C \cap V_i = \{p \in V_i \mid w_i(p) = 0\}$.

[1] 曲線 C が強擬凸近傍をもてば必然的に強擬凸近傍の基本系をもつ．一方，C が強擬凹近傍をもっても強擬凹近傍の基本系をもつとは限らない.

このとき $U_i = C \cap V_i$ とおくと $\{U_i\}_{i \in I}$ は C の被覆である．

$V_i \cap V_j \neq \emptyset$ のとき $w_i = f_{ij} w_j$ を満たす $f_{ij} \in \Gamma(V_i \cap V_j, \mathcal{O}^*)$ がとれる．変換関数系 $\{f_{ij}\} \in Z(\{V_i\}, \mathcal{O}^*)$ によって定まる直線束は $[C]$ で表される．

この直線束の C 上への制限が C の法束 $N_C = [C]|_C$ である．f_{ij} の $U_i \cap U_j$ への制限を同じ f_{ij} で表すと，C の法束 N_C が被覆 $\{U_i\}$ に関する変換関数系 $\{f_{ij}\}$ によって定まっている．

C の自己交点数は N_C の次数に等しい： $(C^2) = \deg[C]|_C$.

命題 1. 法束 N_C が正であれば各 U_i 上に C^∞ 級関数 $a_i > 0$ で

$$\frac{\partial^2 \log a_i}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} > 0 \qquad (U_i \text{ 上で})$$
$$a_i = |f_{ij}| a_j \qquad (U_i \cap U_j \text{ 上で})$$

を満たすものが存在する．

（証明）十分大きな整数 M をとれば，${N_C}^M$ の C 上の正則切断

$$s^{(\ell)} \in H^0(C, \mathcal{O}({N_C}^M)), \qquad (\ell = 1, \dots, L)$$

を $(s^{(1)} : \dots : s^{(L)})$ が C の射影空間 $\mathbb{P}^{M-1}$ への埋め込みとなるようにとることができる．各切断 $s^{(\ell)}$ が $\{s_i^{(\ell)}\}$ によって表されているとすると

$$s_i^{(\ell)} = {f_{ij}}^M s_i^{(\ell)} \qquad (U_i \cap U_j \text{ で})$$

よって

$$a_i = \Big(\sum_{\ell=1}^{L} |s_i^{(\ell)}|^2 \Big)^{1/(2M)}$$

とおけば，この a_i は命題の条件を満たしている． □

命題 2. $V \setminus C$ 上の実数値関数 ϕ で次のようなものがとれる： 各 $V_i \setminus C$ 上で

$$\phi = \log \frac{1}{|w_i|} + h_i(z_i, w_i)$$

と表される．ここで $h_i(z_i, w_i)$ は V_i 上の C^∞ 級関数で

$$\frac{\partial^2 h_i}{\partial z_i \partial \bar{z}_i}(z_i, 0) > 0$$

を満たす.

（証明）

$$\log \frac{1}{|w_i|} = \log \frac{1}{|w_j|} - \log |f_{ij}| \quad (V_i \cap V_j \text{ で})$$
$$\log a_i = \log a_j + \log |f_{ij}| \qquad (U_i \cap U_j \text{ で})$$

各 U_i 上の関数 $\log a_i(z_i)$ を V_i 上に（w_i に依存しない）関数として拡張したものを h_j^0 とすると

$$h_i = h_j + \log|f_{ij}| + O(|w_j|) \quad (V_i \cap V_j \text{ で})$$

となる．そこで

$$\phi_i = \log\frac{1}{|w_i|} + h_i^0 \qquad (V_i \text{ で})$$

とおくと

$$\phi_j = \phi_i + O(|w_j|) \qquad (V_i \cap V_j \text{ で})$$

開被覆 $\{V_i\}$ に従属する 1 の分解を用いて ϕ_i たちを貼り合わせれば，条件を満たす ϕ が得られる． □

後の記述を簡潔にするために，ϕ は C 上で値 ∞ をとると定め，$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に値をとる V 上の連続関数であるとみなそう．次の定理 3, 4 は C が非特異既約である場合の主定理である．

定理 3. ある実数 M_0 があって，$M > M_0$ なる任意の M について $V_M = \{P \in V \mid \phi(P) > M\}$ は強擬凹領域である．

定理 4. 適当な実 1 変数の C^∞ 級増加関数 $\chi(t)$ をとると合成関数 $\Phi(P) = \chi(\phi(P))$ は強多重劣調和関数で，

$$\Phi(P) \sim \phi(P) \qquad (P \to C)$$

となり C で対数的増大度をもつ．

この定理を単に最短距離で証明するだけなら，例えば $\chi(t) = t + e^{-t}$ とおいて $\chi \circ \phi$ の Hesse 行列が正定値であることを確かめればよい．しかし，計算の意味を理解するために少し一般的な考察をしておこう．

2.2　2 次元複素多様体の上の強擬凸領域を定義する関数について考察する．

定義. 2 次元複素多様体の開集合 Ω がその境界点 p_0 において強擬凸であるとは，p_0 の近傍 U とその上の C^2 級関数 ϕ で次の 3 条件を満たすものがあることをいう：

(1)　$\Omega \cap U = \{p \in U \mid \phi(p) < \phi(p_0)\}$

(2)　$d\varphi \neq 0$.

(3)　(z, w) を局所座標系として，点 p_0 において，$\phi_z\xi + \phi_w\eta = 0$ なる任意の $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$ に対して

$$(\star) \qquad (\bar{\xi}, \bar{\eta})\begin{pmatrix}\phi_{z\bar{z}} & \phi_{z\bar{w}} \\ \phi_{w\bar{z}} & \phi_{w\bar{w}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix} > 0.$$

が成り立つ．

この ϕ の条件 (3) を，より強い

(3′)　すべての $(\xi,\eta)\neq(0,0)$ に対して $(\star)$ が成り立つ．

で置き換えることができる．言い換えれば ϕ として Hesse 行列 $\begin{pmatrix}\phi_{z\bar z} & \phi_{z\bar w}\\ \phi_{w\bar z} & \phi_{w\bar w}\end{pmatrix}$ が正定値なるもの，すなわち強多重劣調和関数をとれる．（これは一般次元でも成り立つ．例えば [Kr] を参照.）

例　α を正実数として

$$\phi_\alpha(z)=\Big(\log(|z|^2+|w|^2)\Big)^\alpha$$

を考える．これらの等位面はいずれも原点を中心とする球面からなっている．ϕ_α は $\alpha\geq 1$ のとき強多重劣調和，$\alpha=1$ のとき多重劣調和だが「強」ではない．また $\alpha<1$ のときは多重劣調和でない．関数 $\psi(z)=\log(|z|^2+|w|^2+1)$ は同じ等位面の配列をもつ強多重劣調和関数で $|z|^2+|w|^2\to\infty$ のとき対数的に増大する．□

以下では条件 (3) と (3′) の関係を具体的に調べよう．まず上の条件 (2),(3) は次で置き換えることができることに注意する：

$$(\phi_{\bar w},-\phi_{\bar z})\begin{pmatrix}\phi_{z\bar z} & \phi_{z\bar w}\\ \phi_{w\bar z} & \phi_{w\bar w}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_w\\ -\phi_z\end{pmatrix}>0 \qquad (p_0\text{ において}).$$

この左辺を $L_\phi(z,w)$ と書くと

$$\begin{aligned}L_\phi(z,w)&=\phi_{z\bar z}|\phi_w|^2+\phi_{w\bar w}|\phi_z|^2-\phi_{z\bar w}\phi_w\phi_{\bar z}-\phi_{w\bar z}\phi_z\phi_{\bar w}\\ &=-\begin{vmatrix}0 & \phi_{\bar z} & \phi_{\bar w}\\ \phi_z & \phi_{z\bar z} & \phi_{z\bar w}\\ \phi_w & \phi_{w\bar z} & \phi_{w\bar w}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

これを ϕ の Levi 行列式とよぶことにしよう（[W], [BT] 参照）．

Levi 行列式は次のように $(2,2)$ 形式 の係数になっている：

$$\partial\bar\partial\phi\wedge\partial\phi\wedge\bar\partial\phi=L_\varphi(z,w)\,dz\wedge d\bar z\wedge dw\wedge d\bar w$$

よって L_ϕ の符号は局所座標のとり方によらない．

さて Hesse 行列の行列式を

$$K_\phi(z,w)=\begin{vmatrix}\phi_{z\bar z} & \phi_{z\bar w}\\ \phi_{w\bar z} & \phi_{w\bar w}\end{vmatrix}$$

としよう．これは次のように (2,2) 形式の係数に現れる：

$$(\partial\bar\partial\phi)^2=2K_\phi(z,w)dz\wedge d\bar z\wedge dw\wedge\bar w$$

命題 5. 2 次元複素多様体上の C^2 級実数値関数 ϕ がある点の近傍で

$$L_\phi>0\quad\text{かつ}\quad K_\phi>0$$

を満たすならば，その点の近傍で強多重劣調和である．

（証明）局所座標 (z,w) を $\phi_w = 0$ となるようにとると，

$$L_\phi = \phi_{w\bar{w}}|\phi_z|^2$$

となる．$L_\phi > 0$ ならば $\phi_{w\bar{w}} > 0$. さらに $K_\phi > 0$ ならば首座小行列式が正となり，ヘッセ行列は正定値になる． □

$\chi(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ を実数値 C^2 級関数として，合成関数 $\Phi = \chi \circ \phi$ をとり， L_ϕ, K_Φ を調べよう．

$$\partial\Phi = \chi'\circ\phi\ \partial\phi, \qquad \bar\partial\Phi = \chi'\circ\phi\ \bar\partial\phi$$
$$\partial\bar\partial\Phi = \chi'\circ\phi\ \partial\bar\partial\phi + \chi''\circ\phi\ \partial\phi \wedge \bar\partial\phi$$

だから

$$\partial\bar\partial\Phi \wedge \partial\Phi \wedge \bar\partial\Phi = (\chi'\circ\phi)^3\ \partial\bar\partial\phi \wedge \partial\phi \wedge \bar\partial\phi,$$
$$(\partial\bar\partial\Phi)^2 = (\chi'\circ\phi)^2\ (\partial\bar\partial\phi)^2 + 2(\chi'\circ\phi)(\chi''\circ\phi)\ \partial\bar\partial\phi \wedge \partial\phi \wedge \bar\partial\phi.$$

これより

$$L_\Phi = (\chi' \circ \phi)^3 L_\phi,$$
$$K_\Phi = (\chi' \circ \phi)^2 \left(K_\phi + \frac{\chi'' \circ \phi}{\chi' \circ \phi} L_\phi \right).$$

これで次のことがわかった．

命題 6. 点 p_0 において $L_\phi > 0$ なる C^2 級関数 ϕ に対して，適当な C^2 級の増加函数 χ で $\dfrac{\chi''(\phi(p_0))}{\chi'(\phi(p_0))}$ が十分大きいものをとれば合成関数 $\chi \circ \phi$ は p_0 の近傍で強多重劣調和になる．

より具体的には

$$\frac{\chi'' \circ \phi}{\chi' \circ \phi} > -\frac{K_\phi}{L\phi}$$

であればよい．

2.3 定理４および５を証明しよう．補題３で構成した関数 ϕ について，V_i 上の座標 (z_i, w_i) に関する L_ϕ, K_ϕ を計算する．(添え字 i を省略する)

$$(\phi_z, \phi_w) = (h_z, -\frac{1}{2w} + h_w), \quad (\phi_{\bar z}, \phi_{\bar w}) = (h_{\bar z}, -\frac{1}{2\bar w} + h_{\bar w})$$
$$\begin{pmatrix} \phi_{z\bar z} & \phi_{z\bar w} \\ \phi_{w\bar z} & \phi_{w\bar w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{z\bar z} & h_{z\bar w} \\ h_{w\bar z} & h_{w\bar w} \end{pmatrix}$$

より

$$K_\phi(z,w) = h_{z\bar z}h_{w\bar w} - h_{z\bar w}h_{z\bar w} = O(1)$$
$$L_\phi(z,w) = h_{z\bar z}\left|-\frac{1}{2w} + h_w\right|^2 + h_{w\bar w}|h_z|^2 - \mathrm{Re}\left(h_{z\bar w}\Big(-\frac{1}{2w} + h_w\Big)h_{\bar z}\right)$$
$$= \frac{h_{z\bar z}}{4|w|^2} + O\Big(\frac{1}{|w|}\Big)$$

したがって C の十分近くでは $L_\phi > 0$ となる．また

$$\frac{|K_\phi|}{L_\phi} = O(|w|^2) = O(e^{-2\phi})$$

だから $\chi(t)$ として

$$e^{-2t}\,\frac{\chi''(t)}{\chi'(t)} \to \infty \quad (t \to \infty)$$

なるものをとれば $\Phi = \chi \circ \phi$ は C の十分近くで強多重劣調和になる．さらに

$$\chi(t)/t \to 1 \qquad (t \to \infty)$$

であれば

$$\Phi \sim \phi \sim \log \frac{1}{|w|}$$

となる．このような $\chi(t)$ の例としては

$$t + e^{-t}, \quad \log(e^t + 1), \quad t - t^\alpha (0 < \alpha < 1)$$

などがある．

以上で定理 3, 4 が証明された．

3 複素曲線の交点行列

3.1 交点行列と正因子

S は 2 次元複素多様体（コンパクトであってもなくてもよい）とし，C は S 上の連結コンパクト複素曲線とする．C は既約とは限らず，また特異点を持っていてもよいとする）．C の既約成分を C_ν $(\nu = 1, \ldots, N)$ とし $a_{\mu\nu} = C_\mu \cdot C_\nu$ を交点数とする．

$$A_C = (a_{\mu\nu})$$

は C の交点行列である．

A_C の最大固有値を $\lambda = \lambda(A_C)$ とする．

以下では C_ν の実数係数の一次結合である因子

$$D = \sum_{\nu=1}^{N} r_\nu C_\nu$$

について，次の記法を用いる：

$D \gg 0 \iff r_\nu > 0$ $(\nu = 1, \ldots, N)$
$D \ll 0 \iff r_\nu < 0$ $(\nu = 1, \ldots, N)$

定理 7. 上の複素曲線 C について次の同値関係が成り立つ：

(1) $\lambda(A_C) > 0 \iff D \gg 0$ かつ $(C_\mu \cdot D) > 0$ $(\mu = 1, \ldots, N)$ なる因子 D が存在する．

(2) $\lambda(A_C) = 0 \iff D \gg 0$ かつ $(C_\mu \cdot D) = 0$ $(\mu = 1, \ldots, N)$ なる因子 D が存在する．

(3) $\lambda(A_C) < 0 \iff D \gg 0$ かつ $(C_\mu \cdot D) < 0$ $(\mu = 1, \ldots, N)$ なる因子 D が存在する．

また，上のそれぞれの場合において因子 D の係数を正整数とすることができる．

因子 D から定まる直線束を $[D]$ とする．また C_μ の正規化を $\pi : \tilde{C}_\mu \to C_\nu$ として，$[D]$ の π による引き戻しを $\pi^*[D]$ とする．このとき

$$(C_\mu \cdot D) = \deg \pi^*[D]$$

となることに注意する．

この定理を行列の性質として定式化して証明しよう．

定義. 実数を成分とする N 次正方行列 $A = (a_{\mu\nu})$ が次の 3 条件を満たすとき性質 (P) をもつという：

(P1) A は対称行列である： $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$

(P2) A の非対角成分は非負である：$a_{\mu\nu} \geq 0$ $(\mu \neq \nu)$.

(P3) A は次の意味で連結である：$\{1, \ldots, N\}$ の任意の分割 (P, Q)（$P \cup Q = \{1, \ldots, N\}$, $P \cap Q = \emptyset, P \neq \emptyset, Q \neq \emptyset$）に対して，$a_{\mu\nu} > 0$ なる $\mu \in P$, $\nu \in Q$ が存在する．

連結なコンパクト複素曲線 C の交点行列 A_C が性質 (P) をもつことは明かである．

ベクトル $r = {}^t(r_1, \ldots, r_N) \in \mathbb{R}^N$ について次の記法を用いる：

$r \gg 0 \iff r_\nu > 0$ $(\nu = 1, \ldots, N)$

$r \ll 0 \iff r_\nu < 0$ $(\nu = 1, \ldots, N)$

補題 8. 性質 (P) をもつ行列 A について，次の同値関係が成り立つ：

(1) $\lambda(A) > 0 \iff r \gg 0,\ Ar \gg 0$ なるベクトル r が存在する．

(2) $\lambda(A) = 0 \iff r \gg 0,\ Ar = 0$ なるベクトル r が存在する．

(3) $\lambda(A) < 0 \iff r \gg 0,\ Ar \ll 0$ なるベクトル r が存在する．

また，A が整数を成分とする行列であれば，上のそれぞれの場合において r として正整数を成分とするベクトルをとることができる．

これを証明するためにまず次を示す.

補題 9. 性質 (P) をもつ行列 A の最大固有値 $\lambda(A)$ に属する固有ベクトルの成分はすべて正，またはすべて負である．

（補題 9 の証明）

行列 A が性質 (P) をもてば $A - \lambda(A)I$ も同様なので，最大固有値が 0 の場合について証明すればよい.（以下は [U1] Lemma 2 と同様.）A の最大固有値が 0 だとして，対応する固有ベクトルを $r = {}^t(r_1, \ldots, r_N)$ とする．$P = \{\nu \mid r_\nu > 0\}$, $Q = \{\nu \mid r_\nu \leq 0\}$ とする．ここで $P \neq \emptyset$ とする．（そうでなければ r を $-r$ で置き換える.）ベクトル $r^+ = {}^t(r_1^+, \ldots, r_N^+)$, $r^- = {}^t(r_1^-, \ldots, r_N^-)$ を

$$r_\nu^+ = \begin{cases} r_\nu & (\nu \in P) \\ 0 & (\nu \in Q) \end{cases}, \quad r_\nu^- = \begin{cases} 0 & (\nu \in P) \\ -r_\nu & (\nu \in Q) \end{cases}$$

と定めると

$$r = r^+ - r^-.$$

以下で Q が空集合であること，したがって $r = r^+ \gg 0$ となることを示そう．式を見やすくするために ${}^t rAr'$ を $\langle r, r' \rangle$ のように表す．$\langle r, r \rangle = 0$ より

$$\langle r^+, r^+ \rangle - 2\langle r^+, r^- \rangle + \langle r^-, r^- \rangle = 0$$

となる．A が半負定値であることから

$$\langle r^+, r^+ \rangle \leq 0, \quad \langle r^-, r^- \rangle \leq 0$$

また性質 (P2) より

$$\langle r^+, r^- \rangle \geq 0$$

したがって

$$\langle r^+, r^+ \rangle = 0$$

Q が空集合でないとすると条件 (C3) により，$a_{\mu_0\nu_0} > 0$ となる $\mu_0 \in P,\ \nu_0 \in Q$ がとれる．いま第 ν_0 成分が 1 で他の成分が 0 のベクトルを e_{ν_0} とすると

$$\langle r^+ + \varepsilon e_{\nu_0}, r^+ + \varepsilon e_{\nu_0} \rangle = \langle r^+, r^+ \rangle + 2\varepsilon \langle r^+, \varepsilon e_{\nu_0} \rangle + \langle \varepsilon e_{\nu_0}, \varepsilon e_{\nu_0} \rangle = 2\varepsilon a_{\mu_0\nu_0} r_{\mu_0} + \varepsilon^2 a_{\nu_0\nu_0}$$

この右辺は $\varepsilon > 0$ が十分小さいとき正になり，A が半負定値になることに反する．よって Q は空であり．$r = r^+$ である． □

（補題 8 の証明）

- $\lambda(A) > 0, \lambda(A) = 0, \lambda(A) < 0$ の各場合について，$Ar \gg 0, Ar = 0, Ar \ll 0$ なる $r \gg 0$ があることは補題 7 からわかる．
- $r \gg 0,\ Ar \gg 0$ なる r があれば，${}^t rAr > 0$ となる．A は半負定値ではないから $\lambda(A) > 0$ ．
- $r \gg 0, Ar \ll 0$ なるベクトル $r = {}^t(r_1, \ldots, r_N)$ があるとしよう：

$$\sum_{\nu=1}^{N} a_{\mu\nu} r_\nu < 0 \quad (\mu = 1, \ldots, N).$$

このとき A の固有値がすべて負であることを示そう．ℓ が固有値だとして，それに対応する固有ベクトルを $x = {}^t(x_1, \ldots, x_N)$ とする：

$$\sum_{\nu=1}^{N} a_{\mu\nu} x_\nu = \ell x_\mu \quad (\mu = 1, \ldots, N).$$

ここで，x の成分のうち正のものがあるとして一般性を失わない (必要ならば $-x$ をとる.) $\dfrac{x_\nu}{r_\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, N)$ のうち最大のものを $\dfrac{x_{\mu_0}}{r_{\mu_0}}$ とする．このとき $x_{\mu_0} > 0$ で，

$$\begin{aligned} \ell x_{\mu_0} &< \sum_{\nu=1}^{N} a_{\mu_0\nu} x_\nu - \frac{x_{\mu_0}}{r_{\mu_0}} \sum_{\nu=1}^{N} a_{\mu_0\nu} r_\nu \\ &= \sum_{\nu \neq \mu_0} a_{\mu_0\nu} r_\nu \Big(\frac{x_\nu}{r_\nu} - \frac{x_{\mu_0}}{r_{\mu_0}} \Big) \leq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ.（性質 (P2) によって $\nu \neq \mu_0$ のとき $a_{\mu_0\nu} > 0$ となることに注意する.）これより $\ell < 0$. すべての固有値が負だから $\lambda(A) < 0$.

- $r \gg 0, Ar = 0$ なるベクトル $r = {}^t(r_1, \ldots, r_N)$ があるとすると，上と同様の議論で

$$\ell x_{\mu_0} = \sum_{\nu \neq \mu_0} a_{\mu_0\nu} r_\nu \Big(\frac{x_\nu}{r_\nu} - \frac{x_{\mu_0}}{r_{\mu_0}} \Big) \leq 0$$

となるから固有値はすべて ≤ 0 であり，実際に 0 は固有値だから $\lambda(A) = 0$. □

3.2 Blow-up と交点行列

複素曲面 S 内の連結コンパクト曲線

$$C = \bigcup_{\nu=0}^{N} C_\nu$$

の交点行列を A_C とする．C の 1 点 x_0 における blow up $\sigma : \widehat{S} \to S$ をとり

$$\widehat{C} = \sigma^{-1}(C) = \bigcup_{\nu=0}^{N} \widehat{C}_\nu$$

とする．ここで $\widehat{C}_0 = \sigma^{-1}(x_0)$ で，$\widehat{C}_\nu$ $(\nu \geq 1)$ は C_ν の固有変換．$\widehat{C}$ の交点行列を $A_{\widehat{C}}$ とする．

定理 10. 交点行列の最大固有値の符号は blowup によって不変である．すなわち $\lambda(A_{\widehat{C}})$ は A_C と同時に正・零・負となる．

（証明） $\lambda(A_C) = 0$ だとすると，定理 7 より，因子

$$D = \sum_{\nu=1}^{N} r_\nu C_\nu \gg 0$$

で $(C_\mu \cdot D) = 0, \quad (\nu = 1, \ldots, N)$ なるものがとれる．

C_ν $(\nu \geq 1)$ の σ による引き戻しは $\sigma^* C_\nu = \widehat{C}_\nu + m_\nu C_0$ （ここで m_ν は点 x_0 における C_ν の重複度）である．よって因子 D の引き戻しは $r_0 = \sum_{\nu=1}^{N} r_\nu m_\nu$ として

$$\sigma^* D = \sum_{\nu=0}^{N} r_\nu \widehat{C}_\nu.$$

よって $\sigma^* D \gg 0$.

よって $\mu = 1, \ldots, N$ について

$$(C_\mu \cdot \sigma^* D) = \deg([\sigma^* D]|C_\mu) = (C_\mu \cdot D) = 0.$$

また

$$(\widehat{C}_0 \cdot \sigma^* D) = \deg[\sigma^* D]|\widehat{C}_0 = 0$$

よって定理 7 より $\lambda(A_{\widehat{C}}) = 0$.

$\lambda(A_C)$ が正・負のときも同様に証明できる．(m_0) のところを $m_0 \pm \varepsilon$ でおきかえる．ここで $\varepsilon > 0$ は十分小とする． □

4　$\lambda(A_C) > 0$ なる一般の曲線の近傍

ここでは主定理の証明について述べる．曲線 C は blow-up を繰り返すことで，特異点はすべて正規交叉点であるようなものに帰着できる．この場合に定理を証明すればよい．

第 2 節の証明と同じ考え方で進めるが，これをどのように修正すればよいかを説明する．

まず C の近傍の座標近傍による被覆 $\{V_i\}$ をとる．ここで $V_i \cong \{(z_i, w_i) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_i| < 1, |w_i| < 1\}$ であって C との位置関係は次の (I), (II) のいずれかのようになっているとする：

(I)　$C \cap V_i = \{p \in V_i \mid w_i(p) = 0\}$　（V_i が特異点を含まないとき）

(II)　$C \cap V_i = \{p \in V_i \mid z_(p) w_i(p) = 0\}$　（V_i が特異点を含むとき）

$U_i = C \cap V_i$ とすると，(I) の場合 U_i は円板 $\{|z_i| < 1\}$ に双正則で，(II) の場合，U_i は 2 つの円板 $\{|z_i| < 1\}$ と $\{|w_i| < 1\}$ の合併（中心を同一視する）に双正則である．

仮定より $\lambda(A_C) > 0$ だから定理 7 によって，因子

$$D = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu C_\nu \qquad (m_\nu \text{ は正整数})$$

で，すべての C_μ について $C_\mu \cdot D > 0$ となるものがとれる．この因子 D は各 V_i において

$$f_i = \begin{cases} w_i^{m(i)} & \text{（I）の場合} \\ z_i^{n(i)} w_i^{m(i)} & \text{（II）の場合} \end{cases}$$

によって定義される．

$V_i \cap V_j \neq \emptyset$ のとき $f_i = f_{ij} f_j$ を満たす $f_{ij} \in \Gamma(V_i \cap V_j, \mathcal{O}^*)$ がとれる．変換関数系 $\{f_{ij}\} \in Z(\{V_i\}, \mathcal{O}^*)$ によって定まる直線束は $[D]$ で表される．この直線束の C 上への制限を $E = [D]|_C$ で表す．

各既約成分 C_μ への直線束 E の制限を E_μ とすると E の自己交点数はこの次数に等しい：

$$\deg E_\mu = (C_\mu \cdot D).$$

命題 1 を C が正規交叉特異点をもつ場合へ一般化しよう．

命題 11. 被覆 $\{U_i\}$ に関する変換関数系 $\{f_{ij}\}$ によって定まる C 上の直線束が正であるためには，各 U_i 上の C^2 級関数 $a_i > 0$ で

$$\frac{\partial^2 \log a_i}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} > 0 \qquad (U_i \text{ 上で})$$
$$a_i = |f_{ij}| a_j \qquad (U_i \cap U_j \text{ 上で})$$

を満たすものがあることが必要かつ十分である．

（証明）　すべての特異点において，すなわち (II) の場合の V_i の $(0,0)$ において，$a_i(0,0)$ の値を予め指定する．例えば $a_i(0,0) = 1$ となるように a_i を定めよう．各 E_μ は次数正だから十分大きな M をとって，

$$s_\mu^{(\ell)} \in \Gamma(C_\mu, \mathcal{O}(E_\mu^M)) \qquad (\ell = 1, \ldots, L_\mu)$$

を $(s_\mu^{(1)}:\cdots:s_\mu^{(L_\mu)})$ が C_μ の $\mathbb{P}^{L_\mu-1}$ への埋め込みを与えるようにとれる．適当な定数をかけて，(II) 型の U_i において

$$\sum_{\ell}^{L_\mu}|s_{\mu,i}^{(\ell)}(0,0)|^2\le 1$$

としてよい．そこで，$s_\mu^{(0)}\in\Gamma(C_\mu,\mathcal{O}(E_\mu^M))$ を

$$|s_{\mu,i}^{(0)}|^2+\sum_{\ell}^{L_\mu}|s_{\mu,i}^{(\ell)}(0,0)|^2=1$$

が成り立つようにとる．これで題意の $\{a_i\}$ が得られた． □

次は命題 2 の一般化である．

命題 12. $V\setminus C$ 上の実数値関数 ϕ で次のようなものがとれる： 各 $V_i\setminus C$ 上で

$$\phi=\log\frac{1}{|w_i|}+h_i(z_i,w_i)$$

と表される．ここで $h_i(z_i,w_i)$ は V_i 上の C^∞ 級関数であって，(I) の場合には $\dfrac{\partial^2 h_i}{\partial z_i\partial\bar z_i}(z_i,0)>0$, (II) の場合には $\dfrac{\partial^2 h_i}{\partial z_i\partial\bar z_i}(z_i,0)>0$ かつ $\dfrac{\partial^2 h_i}{\partial w_i\partial\bar w_i}(0,w_i)>0$ となる．

（証明）まず U_i 上で定義された関数 $\log a_i$ を V_i 上にまで拡張する．(I) の場合には命題 2 とまったく同様に h_i0 を定める．(II) の場合には a_i は U_i' の $a_i(z_i,0)$ と U_i'' 上の $a_(0,w_i)$ によって定まっている．そこで を

$$h_i^0(z_i,w_i)=\log a_i(z_i,0)+\log a_(0,w_i)-\log a_i(0,0)$$

と定める.（これは強多重劣調和である.）

$$\phi_i=\log\frac{1}{|f_i|}+h_i^0(z_i,w_i)$$

として，これらを 1 の分割を用いて貼り合わせて ϕ が得られる． □

これ以降の証明は第 2 節から修正する必要はない．適当な増加凸関数 $\chi(t)$ を合成すれば主定理にいう Φ が得られる．(II) の型の U_i では $(z_i,w_i)=(0,0)$ の近傍で ϕ が強多重劣調和なので，計算するまでもなく Φ もそうである．

以上で主定理が示された．

5　展望と課題

5.1　コンパクト複素曲面に含まれる曲線

性質 (P) をもつ整数係数行列 A が与えられたとき，それが交点行列となるように（コンパクトとは限らない）曲面 S 上の曲線 C をつくることは容易である．しかし S としてコンパクトなものをとれるとは限らない．例えば C が $(C_1^2)>0,(C_2)^2>0,(C_1\cdot C_2)=0$ なる既約成分 C_1,C_2 をもつとすると，C を含むコンパクトな S は存在しない.（そのような S があるとすると $S\setminus C_1$ は強擬凸領域で近似され，C_2 が強擬凸近傍をもつことになり矛盾．）

問題１　１次元解析空間としての C と交点行列が与えられたとき，これを含むコンパクトな複素曲面が存在する条件は何か？また，存在するならばどれほどの種類がありうるか？

5.2　$\lambda(A_C) = 0$ の場合

まず C が既約非特異曲線の場合にわかっていることを略述する [U2].

(1)　$(C^2) = 0$ の場合 C の法束 $N = [C]|C$ は次数 0 の直線束であって（ユニタリ）平坦束の構造が入る．すなわち $[C]|C$ は開被覆 $\{U_i\}$ に関する変換関数系 $\{t_{ij}\}$ を各 t_{ij} が絶対値１の定数となるようにとることができる．これを C の近傍 V の被覆 $\{V_i\}$ に関する変換関数系とみなして，V 上の平坦な直線束に F 拡張する．

(2)　こうすると，$[C]$ と F は C 上に制限すれば一致するが，C の近傍で一致するとは限らない．$[C]$ と F とがどの位数まで一致するかによって C（の近傍）を分類する．一致の位数が n である場合を n 型 $(n = 1, 2, \ldots)$ であるといい,（形式的冪級数の意味で）無限位まで一致する場合を無限型という．

(α) 有限型 (n 型) の場合，C の近傍 V と $V \setminus C$ 上の強多重劣調和関数 $\Phi(p)$ で C において

$$\Phi(p) \sim 1/|d(p)|^{n+\varepsilon} \qquad (p \to C)$$

（ここで $d(p)$ は点 $p \in V \setminus C$ と C の距離）なるものが存在する．しかし $V \setminus C$ 上の多重劣調和関数 $\Psi(p)$ で

$$\Psi(p) = o\bigl(1/|d(p)|^{n-\varepsilon}\bigr) \qquad (p \to C)$$

なるものは存在しない．

無限型は，２つの場合に分けられる：

(β) 直線束 $[C]$ と F は C の近傍で一致する（形式的一致を与える冪級数が収束する）場合．この場合 C は Levi 平坦な近傍の基本系をもつ．

(γ) 直線束 $[C]$ と F は C の近傍で一致しない（形式的一致を与える冪級数が収束しない）場合．いくつかの例はあるが一般的な性質はわかっていない．

この $(\beta), (\gamma)$ の場合が起こりうるかどうかは，法束 $N = [C]_C$ がピカール多様体 $\mathrm{Pic}_0(C)$ の中でどのような位置にあるかによっている．N が $\mathrm{Pic}^0(C)$ の中で位数有限のとき，または $N^k (k = 1, 2, \ldots)$ が $k \to \infty$ のとき１（自明束）にあまり接近しないときは，(β) の場合しか生じない．

以上のことを特異点をもつ $\lambda(A_C) = 0$ なる曲線 C について一般化しようというのは自然であろう．ここで C の法束の役目を果たすのは定理 7 にいう因子 D に対応する直線束 $[D]|C$ である．C の各既約成分 C_μ の正規化を $\tilde{C}_\mu : \sigma_\mu \to C_\mu$ とするとき，引き戻し $\sigma_\mu^*[D]|C$ は次数 0 で，ユニタリ平坦束の構造が入るが，$[D]|C$ についてはそうなるとは限らない．

このような最も簡単な場合として，[U3] では，ただ１つの結節点（正規交叉特異点）をもつ有理曲線 C で $(C^2) = 0$ なるものを考察した．この場合 C のピカール多様体は $\mathbb{C}^*$ であって，$N = [C]|C$ がユニタリ平坦な構造をもつのは，これが $\mathbb{C}^*$ の中の単位円周上にある場合である．[U3] では次のことを示した．

表 2: 既約非特異複素曲線 C の近傍

自己交点数・型		近傍の基本系	$V \setminus C$ 上の強多重劣調和関数
$(C^2) > 0$		強擬凹	$\gtrsim \log(1/d(p)) \quad (p \to C)$
$(C^2) = 0$	有限型	(α) 強擬凹	$\gtrsim 1/d(p)^{n+\varepsilon} \quad (p \to C)$
	無限型	(β) Levi 平坦	「強」は存在しない
		(γ) ??	??
$(C^2) < 0$		強擬凸	C 上に延びる

N が単位円周上にない場合，C の近傍 V と $V \setminus C$ 上の強多重劣調和関数 $\Phi(p)$ で C において

$$\Phi(p) \sim \Big(\log(1/|d(p)|)\Big)^{2+\varepsilon} \qquad (p \to C)$$

なるものが存在する．しかし $V \setminus C$ 上の多重劣調和関数 $\Psi(p)$ で

$$\Psi(p) = o\Big(\Big(\log(1/|d(p)|)\Big)^{2-\varepsilon}\Big) \qquad (p \to C)$$

なるものは存在しない．このような結果は C の近傍の擬凹性の強さの程度を測る目安を与えるものと考えられる．

$[D]|C$ がユニタリ平坦な構造を持つ場合には，これをとして C の近傍上のユニタリ平坦な直線束 F に延長できる．そして非特異既約の場合と同様に，有限型，無限型の分類ができる．この解明は今後の課題である

特異点を持つ曲線について無限型のいくつかの場合の結果については [Ko1, Ko2] を参照.

問題 2 （強）多重劣調和関数の増大度の制限で，今までに挙げた以外の型のものを見出すことができるか？

また本稿の主定理の逆として次の問題が考えられる：

問題 3 曲線 C の近傍 V と $V \setminus C$ 上の強多重劣調和関数 $\Phi(p)$ で C において対数的増大度をもつものが存在するならば，$\lambda(A_C) > 0$ であるか？

参考文献

[BT] H. Behnke and P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrer komplexer Veränderlichen, 1970

[G] H. Grauert, Über Modifikationen und exzepzionelle analytische Mengen，Math. Ann 146 (1962), 331-368.

[Ko1] T. Koike, Ueda theory for compact curves with nodes, Indiana U. Math. J. 66 (2017), 845-876.

[Ko2] T. Koike, Arnol'd's type theorem on a neighborhood of acycle of rational curves, JAMA, 147 (2022), 41-67.

[Kr] S. G. Krantz, *Function Theory of Several Complex Variables*, Second ed., 1992.

[M] D. Mumford, The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, Publications Mathématiques de l'institut des Hautes Etudes Scientifiquesn 9 (1961) 5-22.

[R] O. Riemenschneider, Singular Points of Complex Analytic Surfaces, online edition, https://www.math.uni-hamburg.de/home/riemenschneider/.

[S] O. Suzuki, Neiborhoods of a compact non singular algebraic curve imbedded in a 2-dimensional complex manifold, Publ. RIMS Kyoto Univ. 11 (1975), 185-199.

[U1] T. Ueda, Compactifications of $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ and $(\mathbb{C}^*)^2$, Tohoku Math. J. 31(1979) 81-90.

[U2] T. Ueda, On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle, J. Math. Kyoto Univ., 22(1982/83), no. 4, 583-607.

[U3] T. Ueda, Neighborhood of a rational curve with a node, Publ. RIMS Kyoto Univ. 27 (1991), 681-693.

[W] W. Wirtinger, Zur formalen Theorie der Funktionen von mehr komplexen Verïderlichen, Math. Ann., 97(1927), no.1, 357-376.