Prismatic F-crystal の変形理論と p 可除群について

伊藤 和広 *（東北大学大学院理学研究科数学専攻）
Kazuhiro Ito (Mathematical Institute, Tohoku University)

1　概要

本稿では「代数的整数論とその周辺 2023」における筆者の講演に基づき，筆者が論文 [11], [12] で得たプリズマティック F-クリスタル（prismatic F-crystal）の変形理論についての結果を紹介する．さらにその結果を応用することで，Scholze–Weinstein による p 可除群の分類定理（[16, Theorem 14.4.1]）を，プリズマティックコホモロジーを用いて再証明できることを説明する．本稿全体を通して素数 p を固定する．

背景について簡単に説明する．Bhatt–Scholze は論文 [6] にてプリズマティックコホモロジーとよばれる新しい p 進コホモロジーを導入し，従来研究されてきた様々な p 進コホモロジー（エタールコホモロジー，ド・ラームコホモロジー，クリスタリンコホモロジーなど）がプリズマティックコホモロジーを用いて記述できることを示した．プリズマティックコホモロジーはプリズマティックサイトとよばれる Grothendieck 位相付きの圏を用いて計算されるコホモロジーである．冒頭で述べたプリズマティック F-クリスタルとはプリズマティックサイト上のある種の層である．後述するように p 可除群のプリズマティックコホモロジーがプリズマティック F-クリスタルの代表例である．プリズマティックサイトはコホモロジー論に大きな進展を与えただけでなく，プリズマティック F-クリスタルのモジュライ空間を考えることで，数論で重要な様々な空間（志村多様体，Rapoport–Zink 空間，局所志村多様体の整モデルなど）の研究に役立つと期待されている．

2　準備

本節では，主結果を述べるために必要なプリズマティック F-クリスタルに関する基本事項を説明する．本稿の目的のため，プリズマティック Dieudonné クリスタルとよばれる特殊なプリズマティック F-クリスタルに限って述べることにする．

* kazuhiro.ito.c3@tohoku.ac.jp

定義 2.1（Bhatt–Scholze [6]）　(1)　**プリズム**（prism）とは以下の条件を満たす δ 環 A とイデアル $I \subset A$ の組 (A, I) である．

- $I \subset A$ は Cartier 因子である．つまり I は階数 1 の有限生成射影 A 加群である．
- A は (p, I) 進完備である．すなわち自然な写像 $A \to \varprojlim_n A/(p,I)^n$ が同型である．
- ある自然数 n が存在して $(A/I)[p^\infty] = (A/I)[p^n]$ が成立する．
- $p \in (I, \phi_A(I))$ が成立する．

(2)　プリズムの射 $(A, I) \to (B, J)$ とは δ 環の準同型 $A \to B$ で I を J の中にうつすものである．

上の定義で使われている用語，記法について以下で説明を加える．プリズムについての詳細は [6, Section 3] を参照せよ．

注意 2.2　δ 環とは $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の環 A と δ 構造とよばれるいくつかの条件を満たす（集合としての）写像 $\delta_A\colon A \to A$ の組である．定義は [6, Definition 2.1] を参照．δ 環 A は次の重要な性質を満たす：写像

$$\phi_A\colon A \to A, \quad x \mapsto x^p + p\delta_A(x)$$

は環準同型であり，Frobenius 射 $A/p \to A/p, x \mapsto x^p$ の持ち上げである．環準同型 ϕ_A を δ 環 A の Frobenius 射とよぶ．$\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の環 A が p を非零因子として持つとき，$\delta_A \mapsto \phi_A$ という対応によって A 上の δ 構造 $\delta_A\colon A \to A$ のなす集合から，環準同型 $\phi_A\colon A \to A$ で Frobenius 射の持ち上げであるもののなす集合への全単射が得られる（[6, Remark 2.2]）．

注意 2.3　$(A/I)[p^n]$ は準同型 $A/I \to A/I, x \mapsto p^n x$ の核である．また $(A/I)[p^\infty] = \cup_{n\geq 1}(A/I)[p^n]$ である．正確には，定義 2.1 でのプリズム (A, I) は論文 [6] で bounded なプリズムとよばれるものである．本稿で扱うプリズムは全て bounded である．

プリズムの基本的な例を挙げる．以下では k を標数 p の完全体とし $W(k)$ は k を係数に持つ Witt ベクトルのなす環とする．$W(k)$ は p を非零因子として持つため，$W(k)$ の Frobenius 射に対応する δ 構造が定まる．このとき $(W(k), (p))$ はプリズムである．より一般に次が得られる．

例 2.4　(1)　$W(k)$ を係数に持つ形式的冪級数環 $\mathfrak{S} = W(k)[[t_1, \dots, t_n]]$ を考える．準同型 $\phi\colon \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ を係数 $W(k)$ には通常の Frobenius 射として作用し，各変数 t_i を t_i^p にうつすものとして定義する．これは Frobenius 射の持ち上げである．環 $\mathfrak{S}$ は p を非零因子として持つため ϕ に対応する $\mathfrak{S}$ 上の δ 構造が定まる．形式的冪級数 $\mathcal{E} \in \mathfrak{S}$ で定数項が p であるものをとる．このとき $(\mathfrak{S}, (\mathcal{E}))$ はプリズムである．本稿ではこ

のようなプリズムを **Breuil–Kisin 型のプリズム**とよぶ．ただし n は任意の 0 以上の整数をとる．

(2) 自然数 $m \geq 1$ に対し

$$\mathfrak{S}_m := W(k)[[t_1, \ldots, t_n]]/(t_1, \ldots, t_n)^m$$

とおく．環 $\mathfrak{S}_m$ は $\mathfrak{S}$ から誘導される自然な δ 構造を持つ．このとき $(\mathfrak{S}_m, (\mathcal{E}))$ はプリズムである*1.

もう一つ例を挙げる．$\mathcal{O}_C$ を p 進完備な高さ 1 の付値環とし，その商体 C は代数的閉体であると仮定する．簡単のため p は $\mathcal{O}_C$ で 0 でない（つまり C は標数 0 の体）とする．環 $\mathcal{O}_C$ は [5, Definition 3.5] の意味でのパーフェクトイド環（perfectoid ring）である．特に次の性質を満たす：標数 p の完全環

$$\mathcal{O}_{C^\flat} := \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_C/p$$

を係数とする Witt ベクトルのなす環 $W(\mathcal{O}_{C^\flat})$ を考える．環準同型

$$\theta\colon W(\mathcal{O}_{C^\flat}) \to \mathcal{O}_C$$

で，イデアル (p) で割ると射影 $\mathcal{O}_{C^\flat} \to \mathcal{O}_C/p$, $(x_0, x_1, \ldots) \mapsto x_0$ となるものが一意的に存在する．さらに θ の核 $\mathrm{Ker}\,\theta$ は一つの非零因子 $\xi \in W(\mathcal{O}_{C^\flat})$ で生成される．詳細は [5, Section 3] または [8, Section 2] を参照.

例 2.5 (1) 環 $W(\mathcal{O}_{C^\flat})$ は p を非零因子として持つため，通常の Frobenius 射 $\phi\colon W(\mathcal{O}_{C^\flat}) \to W(\mathcal{O}_{C^\flat})$ から $W(\mathcal{O}_{C^\flat})$ 上の δ 構造が誘導される．このとき $(W(\mathcal{O}_{C^\flat}), \mathrm{Ker}\,\theta)$ はプリズムである．

(2) $\theta([p^\flat]) = p$ を満たす元 $p^\flat \in \mathcal{O}_{C^\flat}$ が存在する．（ここで $[p^\flat] \in W(\mathcal{O}_{C^\flat})$ は Teichmüller 持ち上げを表す.）自然数 $m \geq 1$ に対し $W(\mathcal{O}_{C^\flat})/[p^\flat]^m$ は $W(\mathcal{O}_{C^\flat})$ から誘導される自然な δ 構造を持つ．このとき

$$(W(\mathcal{O}_{C^\flat})/[p^\flat]^m, \mathrm{Ker}\,\theta)$$

はプリズムである．詳細は例えば [11, Section 2] を参照.

次に Breuil–Kisin 加群について述べる．

定義 2.6 プリズム (A, I) 上の **Breuil–Kisin 加群**とは有限生成射影 A 加群 M と A 加群の準同型

$$F_M\colon \phi^* M \to M$$

*1 ここでは $(\mathcal{E}) \subset \mathfrak{S}$ の $\mathfrak{S}_m$ への像を同じ記号を用いて表している．同様の記法を以降ことわりなく用いる．

で余核 $\operatorname{Coker} F_M$ が $I \cdot \operatorname{Coker} F_M = 0$ を満たすものの組である．ここで $\phi^* M$ は準同型 $\phi_A \colon A \to A$ による M の係数拡大を表す．（$I \subset A$ が Cartier 因子であるため，準同型 F_M は単射である．例えば [12, Section 3.1] を参照．）

プリズム $(W(k), (p))$ 上の Breuil–Kisin 加群は $W(k)$ 上の Dieudonné 加群に他ならない．

注意 2.7　ここでの Breuil–Kisin 加群は [1, Definition 4.24] で minuscule Breuil–Kisin 加群とよばれているものである．

次にプリズマティック Dieudonné クリスタルを説明する．以下の概念を用いる．

定義 2.8（Bhatt–Scholze [6]）　$W(k)$ 上の完備正則局所環 R で剰余体が k であるもの全体のなす圏 $\mathcal{C}_{W(k)}$ を考える．射は $W(k)$ 上の局所的な準同型全体からなる．プリズム (A, I) と環準同型 $g \colon R \to A/I$ の組 $((A, I), g)$ 全体からなる圏を $(R)_{\Delta}$ とかく．環準同型 g を省略して単に $(A, I) \in (R)_{\Delta}$ とかくことも多い．圏 $(R)_{\Delta}$（より正確にはその反対圏 $(R)_{\Delta}^{\mathrm{op}}$）に，平坦被覆で生成される Grothendieck 位相を入れたものを R に付随する**プリズマティックサイト**（prismatic site）という．

もちろん，プリズマティックサイト $(R)_{\Delta}$ は任意の環 R について定義できるが，本稿では $\mathcal{C}_{W(k)}$ の対象のみに対して考える．

注意 2.9　プリズムの平坦被覆については [6, Definition 3.2] を参照．(A, I) を A におくる関手は $(R)_{\Delta}$ 上の層をなす．この層を $\mathcal{O}_{\Delta}$ とかく．（より正確には $(R)_{\Delta}^{\mathrm{op}}$ 上の層というべきだが，誤解の余地がないとき「$(R)_{\Delta}$ 上の層」ということにする．）

注意 2.10　定義 2.8 において圏 $\mathcal{C}_{W(k)}$ の対象 R は正則であると仮定していることに注意せよ．この正則性のもとで，Breuil–Kisin 型のプリズム $(W(k)[[t_1, \ldots, t_n]], (\mathcal{E}))$（例 2.4）が存在して R と $W(k)[[t_1, \ldots, t_n]]/\mathcal{E}$ が $W(k)$ 上同型となる．この事実は主結果の証明で重要である．（逆に，任意の Breuil–Kisin 型のプリズム $(W(k)[[t_1, \ldots, t_n]], (\mathcal{E}))$ に対して $W(k)[[t_1, \ldots, t_n]]/\mathcal{E} \in \mathcal{C}_{W(k)}$ である．）

以下では $R \in \mathcal{C}_{W(k)}$ とする．

定義 2.11（[7], [1]）　R 上の**プリズマティック Dieudonné クリスタル**（prismatic Dieudonné crystal）とは $(R)_{\Delta}$ 上の $\mathcal{O}_{\Delta}$ 加群の層 $\mathcal{M}$ と射 $\varphi_{\mathcal{M}} \colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ の組で以下を満たすものである．

- 任意の $(A, I) \in (R)_{\Delta}$ に対して $\varphi_{\mathcal{M}} \colon \mathcal{M}(A, I) \to \mathcal{M}(A, I)$ は $\varphi_{\mathcal{M}}(ax) = \phi_A(a)\varphi_{\mathcal{M}}(x)$（$a \in A, x \in \mathcal{M}(A, I)$）を満たす準同型である．さらに $\mathcal{M}(A, I)$ と

$\varphi_{\mathcal{M}}$ が誘導する A 加群の準同型 $\phi^*(\mathcal{M}(A,I)) \to \mathcal{M}(A,I)$ の組はプリズム (A,I) 上の Breuil–Kisin 加群（定義 2.6）である．

- $(R)_{\Delta}$ の任意の射 $(A,I) \to (B,J)$ に対し，自然な B 加群の準同型

$$\mathcal{M}(A,I) \otimes_A B \to \mathcal{M}(B,J)$$

は同型である．

例 2.12　Anschütz–Le Bras によって $\operatorname{Spec} R$ 上の p 可除群のなす圏から R 上のプリズマティック Dieudonné クリスタルのなす圏への関手

$$\mathcal{G} \mapsto \mathcal{M}(\mathcal{G}) := \mathcal{E}xt^1_{(R)_{\Delta}}(\underline{\mathcal{G}^{\mathrm{op}}}, \mathcal{O}_{\Delta})$$

が構成されている．さらに Anschütz–Le Bras はこの関手が圏同値であることを証明している．この結果はより一般に quasisyntomic 環とよばれる環のクラスに対して適用できる．詳細は論文 [1] を参照．本稿の主結果の証明では，Anschütz–Le Bras が構成した関手を用いるが，圏同値になるという事実を用いる必要はない．注意 3.9 を参照．

3　主結果

まず冒頭でも述べた Scholze–Weinstein による p 可除群の分類定理を述べる．例 2.5 での記号を用いる．

定理 3.1（Scholze–Weinstein [16, Theorem 14.4.1]）　$\operatorname{Spec} \mathcal{O}_C$ 上の p 可除群のなす圏はプリズム $(W(\mathcal{O}_{C^\flat}), \operatorname{Ker}\theta)$ 上の Breuil–Kisin 加群のなす圏と圏同値である．

本節では，上の定理をプリズマティックコホモロジーを用いて証明できることを説明する．より正確には，以下の結果が得られる．引き続き例 2.5 での記号を用いる．

定理 3.2（[11]）　任意の自然数 $m \geq 1$ に対し，$\operatorname{Spec} \mathcal{O}_C/p^m$ 上の p 可除群のなす圏はプリズム $(W(\mathcal{O}_{C^\flat})/[p^\flat]^m, \operatorname{Ker}\theta)$ 上の Breuil–Kisin 加群のなす圏と圏同値である．

注意 3.3　m についての極限をとることで，定理 3.1 は定理 3.2 から従うことが簡単にわかる．Scholze–Weinstein による定理 3.1 の元の証明は論文 [15] の結果を用いたものであり，リジッド幾何学が中心的な役割を果たしている．

注意 3.4　$\operatorname{Spec} \mathcal{O}_C/p$ 上の p 可除群のなす圏がプリズム $(W(\mathcal{O}_{C^\flat})/[p^\flat], \operatorname{Ker}\theta)$ 上の Breuil–Kisin 加群のなす圏と圏同値であることは Lau の結果 [13, Theorem 5.7] によって既に知られていた．

以下でプリズマティック Dieudonné クリスタルに対する変形理論を述べる．

定義 3.5　M_0 を $(W(k),(p))$ 上の Breuil–Kisin 加群とする．$R \in \mathcal{C}_{W(k)}$ をとる．**R 上の M_0 の変形**とは R 上のプリズマティック Dieudonné クリスタル $\mathcal{M}$（定義 2.11）と $(W(k),(p))$ 上の Breuil–Kisin 加群の同型 $\mathcal{M}(W(k),(p)) \simeq M_0$ の組である．

以下で説明するように R 上の M_0 の変形は多くの情報を持った対象である．

注意 3.6　R 上の M_0 の変形 $\mathcal{M}$ をとる．例 2.5 において $\mathcal{O}_C$ が $W(k)$ 上の代数であるとする．このとき自然なプリズムの射

$$(W(k),(p)) \to (W(\mathcal{O}_{C^\flat})/[p^\flat], \operatorname{Ker}\theta)$$

が存在する．この射によって M_0 を $(W(\mathcal{O}_{C^\flat})/[p^\flat], \operatorname{Ker}\theta)$ 上に基底変換したものを同じ記号 M_0 で表す．プリズム $(A,I) := (W(\mathcal{O}_{C^\flat})/[p^\flat]^m, \operatorname{Ker}\theta)$ を考える．このとき $A/I = \mathcal{O}_C/p^m$ に注意せよ．$W(k)$ 上の準同型 $g\colon R \to \mathcal{O}_C/p^m$ で R の極大イデアルを $(p) \subset \mathcal{O}_C/p^m$ にうつすもの全体からなる集合を

$$\operatorname{Hom}(R, \mathcal{O}_C/p^m)_e$$

とかく．$g \in \operatorname{Hom}(R, \mathcal{O}_C/p^m)_e$ が与えられると，$((A,I),g) \in (R)_{\Delta}$ とみなせ，(A,I) 上の Breuil–Kisin 加群 $\mathcal{M}(A,I)$ が得られる．この Breuil–Kisin 加群を $\mathcal{M}_g := \mathcal{M}(A,I)$ とかく．$\mathcal{M}_g$ は自然に M_0 の変形とみなせる．つまり自然な射 $(W(\mathcal{O}_{C^\flat})/[p^\flat]^m, \operatorname{Ker}\theta) \to (W(\mathcal{O}_{C^\flat})/[p^\flat], \operatorname{Ker}\theta)$ による $\mathcal{M}_g$ の基底変換が M_0 と自然に同型である．以上から $g \mapsto \mathcal{M}_g$ という構成によって集合の写像

$$\mathrm{ev}_{\mathcal{M}}\colon \operatorname{Hom}(R, \mathcal{O}_C/p^m)_e \to \left\{ \begin{array}{c} (A,I) \text{ 上の Breuil–Kisin 加群で} \\ M_0 \text{ の変形であるものの同型類} \end{array} \right\}$$

が得られる．

以下の定理が論文 [11] で得られたプリズマティック Dieudonné クリスタルの変形理論についての主結果であり，普遍変形の存在とその性質を記述するものである．

定理 3.7（[11]）　M_0 を $(W(k),(p))$ 上の Breuil–Kisin 加群とする．このとき，以下の性質を持つ $R^{\mathrm{univ}} := W(k)[[t_1,\ldots,t_d]]$ 上の M_0 の変形 $\mathcal{M}^{\mathrm{univ}}$ が存在する．ここで d は M_0 から定まる 0 以上の整数である（注意 3.8 参照）．

(1)　任意の $R \in \mathcal{C}_{W(k)}$ に対して基底変換から誘導される写像

$$\operatorname{Hom}(R^{\mathrm{univ}}, R)_e \to \left\{ \; R \text{ 上の } M_0 \text{ の変形の同型類} \; \right\}, \quad h \mapsto h^*(\mathcal{M}^{\mathrm{univ}})$$

は全単射である．

(2) 任意の $W(k)$ 上の $\mathcal{O}_C$ と任意の $m \geq 1$ に対して，注意 3.6 での写像

$$\mathrm{ev}_{\mathcal{M}^{\mathrm{univ}}} \colon \mathrm{Hom}(R^{\mathrm{univ}}, \mathcal{O}_C/p^m)_e \to \left\{ \begin{array}{c} (W(\mathcal{O}_{C^\flat})/[p^\flat]^m, \mathrm{Ker}\,\theta) \text{ 上の} \\ \text{Breuil–Kisin 加群で} \\ M_0 \text{ の変形であるものの同型類} \end{array} \right\}$$

は全単射である．

(3) 任意の $R \in \mathcal{C}_{W(k)}$ をとる．Breuil–Kisin 型のプリズム $(\mathfrak{S}, (\mathcal{E}))$ で $R = \mathfrak{S}/\mathcal{E}$ となるものをとる（注意 2.10 参照）．任意の $m \geq 1$ に対して例 2.4 でのプリズム $(\mathfrak{S}_m, (\mathcal{E}))$ を考える．このとき，注意 3.6 と同様にして定義される写像

$$\mathrm{ev}_{\mathcal{M}^{\mathrm{univ}}} \colon \mathrm{Hom}(R^{\mathrm{univ}}, R_m)_e \to \left\{ \begin{array}{c} (\mathfrak{S}_m, (\mathcal{E})) \text{ 上の Breuil–Kisin 加群で} \\ M_0 \text{ の変形であるものの同型類} \end{array} \right\}$$

は全単射である．ここで $R_m = \mathfrak{S}_m/\mathcal{E}$ であり R を極大イデアルの m 乗で割ったものに等しい．

ただし $\mathrm{Hom}(R^{\mathrm{univ}}, R)_e$ と $\mathrm{Hom}(R^{\mathrm{univ}}, R_m)_e$ はそれぞれ局所的な $W(k)$ 上の準同型 $R^{\mathrm{univ}} \to R$, $R^{\mathrm{univ}} \to R_m$ 全体からなる集合である．

注意 3.8　$P^1 \subset \phi^*(M_0)/p\phi^*(M_0)$ を F_{M_0} から誘導される準同型 $\phi^*(M_0)/p\phi^*(M_0) \to M_0/pM_0$ の核とする．この部分空間 P^1 を M_0 の **Hodge フィルトレーション**とよぶ．$\phi^*(M_0)/p\phi^*(M_0)$ と P^1 の k 上のベクトル空間としての次元をそれぞれ n, s とおくと，定理 3.7 において $d = s(n-s)$ が成り立つ．実際，定理の証明では R^{univ} を $W(k)$ 上の Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}(n,s)$ の適当な点における局所環の完備化とみなして $\mathcal{M}^{\mathrm{univ}}$ を構成する．

定理 3.2 がどのようにして定理 3.7 から導かれるかを簡単に説明する．詳細は [11, Section 6] を参照．まず，注意 3.4 で述べた Lau の結果を用いることで，定理 3.2 は以下の主張に帰着できることがわかる：$\mathcal{G}_0$ を $\mathrm{Spec}\,k$ 上の p 可除群とし，M_0 を $\mathcal{G}_0$ に付随する Dieudonné 加群とする．$\mathcal{G}^{\mathrm{univ}}$ を $\mathcal{G}_0$ の普遍変形とする（[10, Corollaire 4.8] 参照）．このときプリズマティック Dieudonné クリスタル $\mathcal{M}(\mathcal{G}^{\mathrm{univ}})$ （例 2.12 参照）は M_0 の変形であり，定理 3.7 で与えられる M_0 の普遍変形 $\mathcal{M}^{\mathrm{univ}}$ と同型である．この主張は $\mathcal{M}^{\mathrm{univ}}$ と $\mathcal{M}(\mathcal{G}^{\mathrm{univ}})$ のそれぞれの「接空間でのふるまい」を比較することで証明できる．

注意 3.9　例 2.12 で述べたように，任意の $R \in \mathcal{C}_{W(k)}$ に対して関手 $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{M}(\mathcal{G})$ が $\mathrm{Spec}\,R$ 上の p 可除群のなす圏から R 上のプリズマティック Dieudonné クリスタルのなす圏への圏同値であることを Anschütz–Le Bras が証明した．この事実を用いると $\mathcal{M}^{\mathrm{univ}}$ と $\mathcal{M}(\mathcal{G}^{\mathrm{univ}})$ が同型であることはすぐにわかる．さらに，定理 3.7 の (1) で述べた性質を持つ M_0 の変形が存在することを，この事実と p 可除群の変形理論の帰結として得ることもできる．しかし Anschütz–Le Bras の証明では Scholze–Weinstein による定理 3.1 が使われて

いることに注意されたい．論文 [11] では定理 3.7 を p 可除群を用いずに証明している．その結果として定理 3.1 の別証明が得られるのである．

注意 3.10　より一般に，論文 [11] では任意の $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_p$ 上の簡約群 G とその minuscule な余指標 μ に対して，定理 3.7 と同じ主張が**プリズマティック G-μ-ディスプレイ**（prismatic G-μ-display）とよばれる対象について成立することを証明している．その応用として，不分岐な局所志村データに付随する局所志村多様体の整モデルが形式的に滑らか（formally smooth）であることを証明した．より正確な主張及び先行研究については [11, Section 5] を参照．この事実は Pappas–Rapoport によって予想されていた（[14, Conjecture 3.3.5]）．

プリズマティック G-μ-ディスプレイは Drinfeld, Bhatt–Lurie によって独立に導入された**プリズマティック F-ゲージ**（prismatic F-gauge）とよばれる概念（[9], [3], [4], [2] などを参照）と深く関係している．これについての詳細は論文 [12] を参照されたい．

4　定理 3.7 の証明について

最後に定理 3.7 の証明について簡単に説明する．証明の詳細は [11, Section 4] を参照．以下の定理が本質的に用いられる．この定理は R の次元が 1 以下の場合は [1, Theorem 5.12] で証明されており，一般の場合は論文 [12] で証明されている．

定理 4.1（[1, Theorem 5.12], [12]）　任意の $R \in \mathcal{C}_{W(k)}$ と，Breuil–Kisin 型のプリズム $(\mathfrak{S}, (\mathcal{E}))$ で $R = \mathfrak{S}/\mathcal{E}$ となるものをとる．このとき対応 $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}(\mathfrak{S}, (\mathcal{E}))$ によって R 上のプリズマティック Dieudonné クリスタルのなす圏と $(\mathfrak{S}, (\mathcal{E}))$ 上の Breuil–Kisin 加群のなす圏が圏同値となる．

Breuil–Kisin 型のプリズム

$$(\mathfrak{S}^{\mathrm{univ}}, (\mathcal{E}^{\mathrm{univ}})) := (W[[t_1, \dots, t_{d+1}]], (p - t_{d+1}))$$

を考える．t_{d+1} を p にうつすことで自然な同型 $\mathfrak{S}^{\mathrm{univ}}/\mathcal{E}^{\mathrm{univ}} \simeq R^{\mathrm{univ}}$ が得られる．定理 4.1 より M_0 の R^{univ} 上の変形を与えることと，$(\mathfrak{S}^{\mathrm{univ}}, (\mathcal{E}^{\mathrm{univ}}))$ 上の Breuil–Kisin 加群で M_0 の変形であるものを与えることは同値である．実際には，Breuil–Kisin 加群としての変形を与えることの方が実用上ずっと簡単である．以降では M_0 の $(\mathfrak{S}^{\mathrm{univ}}, (\mathcal{E}^{\mathrm{univ}}))$ 上の Breuil–Kisin 加群としての変形 M で，対応する R^{univ} 上の変形が定理 3.7 の条件を満たすものをどのように構成するかを説明する．

構成の鍵となるのは Breuil–Kisin 加群に対する **Grothendieck–Messing 変形理論**である．$(A_m, I_m) := (\mathfrak{S}_m, (\mathcal{E}))$ または $(A_m, I_m) := (W(\mathcal{O}_{C^\flat})/[p^\flat]^m, \operatorname{Ker}\theta)$ とおく．M' を (A_m, I_m) 上の Breuil–Kisin 加群とする．このとき Grothendieck–Messing 変形理論により，M' の (A_{m+1}, I_{m+1}) 上への変形を与えることと，M' の Hodge フィルトレーション

の A_{m+1}/I_{m+1} 上への持ち上げを与えることが同値となる．詳細は [11, Section 3] を参照．この事実を用いることで M の候補を見つけることができる．

どのように定理 3.7 の (1), (2), (3) を確認するのかを説明する．論理の順番としては，(2), (3), (1) の順に証明する．より正確には，(2) の写像が全単射であることを証明する際に，集合としての全単射であるということだけではなく，ある種の線形性を満たすことも証明する．ここの議論では $\mathcal{O}_C$ が十分多くの p 乗根を持つことが本質的に使われる．この (2) よりも精密な主張から (3) が自動的に導かれる．最後に (1) は (3) と定理 4.1 から導かれる．

謝辞

「代数的整数論とその周辺 2023」にて講演の機会を与えてくださった千田雅隆先生，三枝洋一先生，甲斐亘先生に感謝を申し上げます．

参考文献

[1] J. Anschütz and A.-C. Le Bras. Prismatic Dieudonné theory. *Forum Math. Pi*, 11:Paper No. e2, 92, 2023.

[2] B. Bhatt. Prismatic F-gauges, 2022. `https://www.math.ias.edu/~bhatt/teaching/mat549f22/lectures.pdf`.

[3] B. Bhatt and J. Lurie. Absolute prismatic cohomology, 2022. `arXiv:2201.06120`.

[4] B. Bhatt and J. Lurie. The prismatization of p-adic formal schemes, 2022. `arXiv:2201.06124`.

[5] B. Bhatt, M. Morrow, and P. Scholze. Integral p-adic Hodge theory. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 128:219–397, 2018.

[6] B. Bhatt and P. Scholze. Prisms and prismatic cohomology. *Ann. of Math. (2)*, 196(3):1135–1275, 2022.

[7] B. Bhatt and P. Scholze. Prismatic F-crystals and crystalline Galois representations. *Camb. J. Math.*, 11(2):507–562, 2023.

[8] K. Česnavičius and P. Scholze. Purity for flat cohomology. *Ann. of Math. (2)*, 199(1):51–180, 2024.

[9] V. Drinfeld. Prismatization, 2022. `arXiv:2005.04746`.

[10] L. Illusie. Déformations de groupes de Barsotti-Tate (d'après A. Grothendieck). *Astérisque*, (127):151–198, 1985. Seminar on arithmetic bundles: the Mordell conjecture (Paris, 1983/84).

[11] K. Ito. Deformation theory for prismatic G-displays, 2023. `arXiv:2306.05361`.

[12] K. Ito. Prismatic G-displays and descent theory, 2023. `arXiv:2303.15814`.

[13] E. Lau. Dieudonné theory over semiperfect rings and perfectoid rings. *Compos. Math.*, 154(9):1974–2004, 2018.

[14] G. Pappas and M. Rapoport. p-adic shtukas and the theory of global and local Shimura varieties. *Camb. J. Math.*, 12(1):1–164, 2024.

[15] P. Scholze and J. Weinstein. Moduli of p-divisible groups. *Camb. J. Math.*, 1(2):145–237, 2013.

[16] P. Scholze and J. Weinstein. *Berkeley lectures on p-adic geometry*, Vol. 389 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2020.