一点抜き CM 楕円曲線に付随する副 p 外 Galois 表現の核について

On the kernels of pro-p outer Galois representations associated to once-punctured CM elliptic curves

慶應義塾大学・理工学部 石井 竣 *

Shun Ishii

Faculty of Science and Technology, Keio University

1 導入

本稿では, 類数 1 の虚二次体上に定義された虚数乗法を持つ楕円曲線から原点を除いて得られる双曲的代数曲線に付随する副 p 外 Galois 表現の核の特徴づけに関して筆者が得た結果 [Ish23b] 並びに関連する先行研究を解説する.

まず双曲的代数曲線に関する (副 p) 外 Galois 表現を導入する. 以下, 本節では p を素数, F を代数体として, F の代数閉包 $\bar{F}$ を固定する. F 上の双曲的代数曲線 X に対して, 適当な基点に関するエタール基本群の間に以下のホモトピー完全列が存在する.

$$1 \to \pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{F}}) \to \pi_1^{\text{ét}}(X) \to G_F := \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to 1.$$

ここで, $X_{\bar{F}}$ は X の $\mathrm{Spec}(\bar{F})$ への基底変換 $X \times_F \bar{F}$ を表す. この完全列は F の絶対 Galois 群 G_F から X の幾何的基本群 $\pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{F}})$ の外部自己同型群 $\mathrm{Out}(\pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{F}})) := \mathrm{Aut}(\pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{F}}))/\mathrm{Inn}(\pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{F}}))$ への準同型

$$\rho_X : G_F \to \mathrm{Out}(\pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{F}}))$$

を引き起こす. この準同型 ρ_X を X に付随する外 Galois 表現と呼ぶ. また, 幾何的基本群 $\pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{F}})$ の最大副 p 商 $\pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{F}})^{(p)}$ への外作用を表す準同型写像

$$\rho_{X,p} : G_F \to \mathrm{Out}(\pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{F}})^{(p)})$$

を X に付随する副 p 外 Galois 表現と呼ぶ. 本稿では主に X が三点抜き射影直線または一点抜き楕円曲線の場合の (副 p) 外 Galois 表現を考察する. これらの場合に於いては, 幾何的基本群 $\pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{F}})$ は階数 2 の自由群の副有限完備化と同型である.

双曲的代数曲線に付随する外 Galois 表現は特に遠アーベル幾何学の文脈から多くの研究が行われており, 一連の研究によって外 Galois 表現 ρ_X は単射であることが証明されている: この主張は X

* E-mail : ishii.shun@keio.jp

が三点抜き射影直線の場合には Belyi により, 種数 1 の双曲的代数曲線の場合には Voevodsky により, アフィン双曲的代数曲線の場合には松本により, そして一般の場合には星-望月により証明された.

Theorem (Belyi [Bel79], Voevodsky [Voe91], 松本 [Mat96, Theorem 2.1], 星-望月 [HM11, Theorem C])**.** 外 Galois 表現 ρ_X は単射である.

一方で本稿で考察する副 p 外 Galois 表現 $\rho_{X,p}$ については, 外部自己同型群 $\mathrm{Out}(\pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{F}})^{(p)})$ の開部分群

$$\ker\left[\mathrm{Out}(\pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{F}})^{(p)}) \to \mathrm{Aut}(\pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{F}})^{(p),\mathrm{ab}}/p)\right]$$

が副 p 群であることから単射になり得ない. ここで $\pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{F}})^{(p),\mathrm{ab}}$ は $\pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{F}})^{(p)}$ の最大アーベル商を表す. 特に, 核の固定体 $\bar{F}^{\ker(\rho_{X,p})}$ は上記の副 p 部分群の逆像に対応する F の有限次拡大体の副 p 拡大である.

本稿では副 p 外 Galois 表現の核の固定体 $\bar{F}^{\ker(\rho_{X,p})}$ の体論的, 整数論的な性質を考察する. そのような性質の一例として, F の剰余標数が p とは異なるある有限素点 v で曲線 X が良還元を持つならば $\bar{F}^{\ker(\rho_{X,p})}/F$ は v で不分岐であることが同値であることがエタール基本群の特殊化の議論から従う.

特に有理数体上の三点抜き射影直線 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \setminus \{0,1,\infty\}$ に付随する副 p 外 Galois 表現に関しては多くの先行研究が行われている. 特に Sharifi は, 当時未解決であった Deligne の予想の伊原版 (cf . 定理 2.1) を仮定することにより, 以下の特徴付けを証明した.

Theorem (Sharifi [Sha02])**.** p を正則な奇素数とする. この時, 体 $\bar{\mathbb{Q}}^{\ker(\rho_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}\setminus\{0,1,\infty\},p})}$ は p 次円分体 $\mathbb{Q}(\mu_p)$ の p 外不分岐**最大**副 p 拡大である.

本稿における主結果 (cf. 定理 2.8) は上記定理の一点抜き CM 楕円曲線における類似である.

Theorem (I. [Ish23b, Theorem 2.13])**.** K を類数 1 の虚二次体, p を K において 2 つの異なる素点に分解するような奇素数とする. X を K の極大整環に虚数乗法を持つ K 上の楕円曲線から原点を除いて得られる一点抜き楕円曲線とし, 以下の条件を仮定する.

1. K の法 p 射類体 $K(p)$ の類数は p と互いに素である.
2. K の法 p^∞ 射類体 $K(p^\infty)$ 上の p を割る素点は 2 つのみである.
3. 予想 2.7 は正しい.

この時, X に付随する副 p 外 Galois 表現 $\rho_{X,p}$ の核の固定体 $\bar{K}^{\ker(\rho_{X,p})}$ は $K(E[p])$ 及び $K(p)$ の p 外不分岐最大副 p 拡大の合成体に等しい.

本稿の構成は次のようになっている. 次の Section 2 では研究の背景となった三点抜き射影直線に付随する副 p 外 Galois 表現に関する先行研究を紹介した後に本稿の主結果を述べる. 次の Section 3 にて主結果の証明の方針を述べる. 最後の Section 4 では, 本稿の内容と関連した問題を提案する.

2　先行研究と主結果

2.1　先行研究

本節では, 主結果と関連する三点抜き射影直線に付随する副 p 外 Galois 表現に関する先行研究について述べる. 本節の内容に関しては先駆的な研究を行なった伊原自身による概説 [Iha90] や [Iha02] があるので, 興味を持たれた方はそちらを参照されたい.

以下では p を奇素数とする. 有理数体上の三点抜き射影直線 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \setminus \{0,1,\infty\}$ に付随する副 p 外 Galois 表現

$$\rho_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}\setminus\{0,1,\infty\},p} \colon G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Out}(\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}} \setminus \{0,1,\infty\})^{(p)})$$

の核の固定体は p 次円分体 $\mathbb{Q}(\mu_p)$ の p 外不分岐最大副 p 拡大体に含まれることが前節の考察から従う. またこの外作用が自然に誘導する $\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}} \setminus \{0,1,\infty\})^{(p)}$ の最大アーベル商 (階数 2 の自由 $\mathbb{Z}_p$ 加群) への作用は p 進円分指標 $\chi\colon G_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Z}_p^{\times}$ を対角成分に持つスカラー行列である.

Anderson と伊原 [AI88] は体 $\bar{\mathbb{Q}}^{\ker(\rho_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}\setminus\{0,1,\infty\},p})}$ を生成する higher circular p-unit と呼ばれる p 単数の族を与えた他, 体 $\bar{\mathbb{Q}}^{\ker(\rho_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}\setminus\{0,1,\infty\},p})}$ が $\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$ の p 外不分岐な無限次の非アーベル副 p 拡大であることを証明した (cf. [AI88, Theorem A]). また, 同論文においては次の疑問が提起された:

Question 1 ([AI88, Page 272, (a)]). 体 $\bar{\mathbb{Q}}^{\ker(\rho_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}\setminus\{0,1,\infty\},p})}$ は $\mathbb{Q}(\mu_p)$ の p 外不分岐最大副 p 拡大か.

以下では $\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}} \setminus \{0,1,\infty\})^{(p)}$ のことを単に π_1 と略記し, その中心降下列を $\{\pi_1(m)\}_{m>0}$ と書く. 外部自己同型群 $\mathrm{Out}(\pi_1)$ にはフィルトレーション $\{F^m\mathrm{Out}(\pi_1)\}_{m>0}$ が

$$F^m\mathrm{Out}(\pi_1) \coloneqq \ker\left[\mathrm{Out}(\pi_1) \to \mathrm{Out}(\pi_1/\pi_1(m+1))\right]$$

によって定まる. $F^m\mathrm{Out}(\pi_1)$ の副 p 外 Galois 表現 $\rho_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}\setminus\{0,1,\infty\},p}$ による逆像を $F^mG_{\mathbb{Q}}$ と書く. 例えば $F^1G_{\mathbb{Q}} = G_{\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})}$ である. また, このフィルトレーションについて

$$gr^mG_{\mathbb{Q}} \coloneqq F^mG_{\mathbb{Q}}/F^{m+1}G_{\mathbb{Q}} \quad \text{および} \quad \mathfrak{g} \coloneqq \bigoplus_{m>0} gr^mG_{\mathbb{Q}}$$

と定義する. 各商 $gr^mG_{\mathbb{Q}}$ は $G_{\mathbb{Q}}/F^1G_{\mathbb{Q}} \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_p^{\times}$ の共役作用に関して m 回 Tate 捻り $\mathbb{Z}_p(m) \coloneqq \mathbb{Z}_p(\chi^m)$ の有限個の直和と同型である. また $G_{\mathbb{Q}}$ の交換子を取る操作は $\mathfrak{g}$ に $\mathbb{Z}_p$ 上の次数付き Lie 代数の構造を誘導する.

次に各奇数 $m \geq 3$ に対して $gr^mG_{\mathbb{Q}}$ に m 次 Soulé 元と呼ばれる特別な元が定まることを説明する. この元は m 次 Soulé 指標 $\chi_m\colon gr^mG_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Z}_p(m)$ に対して,

$$\chi_m(\sigma) \text{ は像 } \chi_m(gr^mG_{\mathbb{Q}}) \subset \mathbb{Z}_p(m) \text{ を生成する}$$

という条件を満たす元として定義される. ここに m 次 Soulé 指標 $\chi_m\colon G_{\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})} \to \mathbb{Z}_p(m)$ は 1 の原始 p^n 冪乗根よりなる基底 $(\zeta_n)_{n>0} \in \mathbb{Z}_p(1)$ について

$$\zeta_n^{\chi_m(\sigma)} = \left(\left(\prod_{1\leq a\leq p^n,(a,p)=1} (1-\zeta_n^a)^{a^{m-1}}\right)^{\frac{1}{p^n}}\right)^{\sigma-1}$$

という性質で特徴づけられる Kummer 指標である．この指標は伊原 [Iha86] によって導入された π_1 の最大メタアーベル商への Galois 作用を記述する Jacobi 和の普遍冪級数の係数に現れることが伊原-金子-行成により証明されている [IKY87].

χ_m の $F^m G_{\mathbb{Q}}$ への制限は非自明であり, 商 $gr^m G_{\mathbb{Q}}$ を経由する．Soulé 指標は数論的に興味深い性質を多く持っている (例えば市村-坂口 [IS87] を参照).

こうして定義された Soulé 元は次の著しい性質を持つ：

Theorem 2.1 (Deligne の予想の伊原版, proved by Hain-松本 [HM03] and Brown [Bro12])**.** $\{\sigma_m\}_{m\geq 3,\mathrm{odd}}$ は $\mathbb{Q}_p$ 上の次数付き Lie 代数 $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{Q}_p$ の自由生成元である.

この定理の主張は Deligne-伊原予想と呼ばれることが多い[*1]．定理 2.1 は, その生成部分については Hain-松本 [HM03] により, 自由部分については Brown[Bro12] により解決された.

一方, Sharifi は定理 2.1 が解決される以前に定理 2.1 の主張を仮定して以下の結果を証明した.

Theorem 2.2 (Sharifi [Sha02, Theorem 1.1])**.** p を正則な奇素数とする．この時, 疑問 1 は肯定的である.

定理 2.2 と定理 2.1 を合わせると, 全ての正則奇素数 p に対して疑問 1 は肯定的に解決されたことになる．なお, 非正則素数に対しては筆者の知る限り疑問 1 が肯定的である例も否定的である例も知られていない.

以下, 定理 2.2 の証明の概略を 2 つのステップに分けて述べる.

ステップ 1 (cf. [Sha02, §2]): Ω を $\mathbb{Q}(\mu_p)$ の p 外不分岐最大副 p 拡大体, $G:=\mathrm{Gal}(\Omega/\mathbb{Q}(\mu_p))$ とする．p が正則奇素数であることから, Galois 群 G は $\frac{p+1}{2}$ 元で生成される副 p 群である[*2]．また, その生成元として同型 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}(\mu_p))\cong\mathbb{Z}_p$ の生成元の $\mathrm{Gal}(\Omega/\mathbb{Q}(\mu_p))$ への持ち上げ γ と $m=3,5,\ldots,p$ 次の Soulé 元の $F^m G$ への持ち上げ $\sigma_m\in F^m G$ を取ることができる.

Sharifi の証明の重要なポイントは, $\{\sigma_m\}_{m=3,5,\ldots,p}$ から p より大きい奇数 m 次の Soulé 元の持ち上げ $\sigma_m\in F^m G$ を構成する群論的手続きを与える部分である.

まず, m 次 Soulé 元の持ち上げ $\sigma_m\in gr^m G_{\mathbb{Q}}$ が与えられたとする．商 $gr^m G_{\mathbb{Q}}$ は m 回 Tate 捻りの有限直和に同型なので, p 進円分指標 χ に対して $\gamma\sigma_m\gamma^{-1}\sigma_m^{-\chi(\gamma)^m}\in F^{m+1}G$ が成立する．こうして得られた $m+1$ 次の元を次のように修正することにより $m+(p-1)$ 次の Soulé 元 $\sigma_{m+(p-1)}$ が構成される:

Lemma 2.3 (Sharifi [Sha02, Lemma 2.1])**.** $\delta\in\mathrm{Gal}(\Omega/\mathbb{Q})$ を $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ の生成元の持ち上げとする．各 $g\in G$ 及び非負整数 m に対して

$$g^{\epsilon_m}:=(g\cdot\delta g^{\chi^{-m}(\delta)}\delta^{-1}\cdots\delta^{p-2}g^{\chi^{-m}(\delta^{p-2})}\delta^{-(p-2)})^{\frac{1}{p-1}}$$

[*1] 筆者の講演にてこの予想を定式化された当時の状況に関してコメントをくださいました伊原康隆先生に感謝申し上げます.

[*2] より強く, 群 $\mathrm{Gal}(\Omega/\mathbb{Q}(\mu_p))$ は階数 $\frac{p+1}{2}$ の**自由**副 p 群と同型である [NSW08, (10.7.13) Theorem].

と置き, この操作を j 回繰り返して得られる元を $g^{\epsilon_m^j}$ と書く. この時, 極限

$$g^{(m)} := \lim_{j\to\infty} g^{\epsilon_m^j}$$

が G に存在して $\delta g^{(m)}\delta^{-1} := (g^{(m)})^{\chi^m(\delta)}$ を満たす.

$m+1$ 次の元 $\gamma\sigma_m\gamma^{-1}\sigma_m^{-\chi(\gamma)^m}$ に補題 2.3 を適用して得られる元は $F^{m+(p-1)}G$ に含まれ, 実際に $m+(p-1)$ 次の Soulé 元の持ち上げとなっていることが証明される.

このように Soulé 元の持ち上げを明示的な形で構成した帰結として, 組み合わせ群論的な議論により $\{\sigma_m\}_{m\geq 3,\mathrm{odd}}$ が Galois 群 $F^1G = \mathrm{Gal}(\Omega/\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))$ を位相的に生成することが従う.

ステップ 2 (cf. [Sha02, §3]) : $\mathcal{G}$ を記号 $\{\tilde{\sigma}_m\}_{m\geq 3,\mathrm{odd}}$ を基底とする自由副 p 群とし, 各 $\tilde{\sigma}_m$ を σ_m に移す準同型写像

$$\mathcal{G} \to \mathrm{Gal}(\Omega/\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))$$

を考えると, ステップ 1 によりこれは全射である. $\mathcal{G}$ には上記の全射に関する $\{F^mG\}_{m>0}$ の逆像によりフィルトレーション $\{F^m\mathcal{G}\}_{m>0}$ が誘導されるが, ここにもう 1 つのフィルトレーション $\{\tilde{F}^m\mathcal{G}\}_{m>0}$ を

各奇数 $m\geq 3$ に対して $\tilde{\sigma}_m\in\tilde{F}^m\mathcal{G}$ を満たす最速の中心降下フィルトレーション

と定義する (このようなフィルトレーションは一意に存在する). その特徴付けにより任意の $m>0$ に対して $\tilde{F}^m\mathcal{G}\subset F^m\mathcal{G}$ が従う. また, フィルトレーション $\tilde{F}^m\mathcal{G}$ に付随する $\mathbb{Z}_p$ 上次数付き Lie 代数 $\tilde{\mathfrak{g}} := \oplus_{m>0}\tilde{F}^m\mathcal{G}/\tilde{F}^{m+1}\mathcal{G}$ は $\{\tilde{\sigma}_m\}_{m\geq 3,\mathrm{odd}}$ の像によって自由生成される.

よって定理 2.1 により, 自然な写像 $\tilde{\mathfrak{g}}\otimes\mathbb{Q}_p\to\mathfrak{g}\otimes\mathbb{Q}_p$ は同型であることが従う. 更に低い次数から順番に比較することにより, 全ての $m>0$ について等号 $\tilde{F}^m\mathcal{G}=F^m\mathcal{G}$ が成立する. 特に両者の共通部分は等しいが, 普遍性によって定義されたフィルトレーション $\{\tilde{F}^m\mathcal{G}\}_{m>0}$ の共通部分は自明である. 一方で $\{F^m\mathcal{G}\}_{m>0}$ の共通部分は定義から拡大 $\Omega/\bar{\mathbb{Q}}^{\ker(\rho_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}\setminus\{0,1,\infty\},p})}$ の Galois 群の逆像であるため, 望みの等号 $\Omega=\bar{\mathbb{Q}}^{\ker(\rho_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}\setminus\{0,1,\infty\},p})}$ を得る.

Remark 2.4 (cf. [Sha02, Theorem 1.3]). 上記の証明の帰結として, p が正則奇素数であれば Soulé 元 $\{\sigma_m\}_{m\geq 3,\mathrm{odd}}$ は $\mathbb{Q}_p$ をテンソルする前の $\mathbb{Z}_p$ 上の次数付き Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の自由生成元であることが従う. 一方で非正則素数 p については, Sharifi は $\mathbb{Q}(\mu_p)$ の最大多重 $\mathbb{Z}_p$ 拡大に対する一般 Greenberg 予想の下で Soulé 元は Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を生成**しない**ことを示した. 関連する研究については McCallum-Sharifi [MS03] も参照されたい.

2.2 主結果

本節では p を奇素数, K を類数 1 の虚二次体, E を K の整数環 O_K に虚数乗法を持つ K 上の楕円曲線とする. E から原点 O を除くことで得られる双曲的代数曲線 $X := E\setminus\{O\}$ を一点抜き CM 楕円曲線と呼ぶ.

一点抜き CM 楕円曲線 X に付随する副 p 外 Galois 表現を考察する前に, まず E に付随する副 p 外 Galois 表現を考察する. この場合は副 p 外 Galois 表現は p 進 Tate 加群 T_pE に付随する p 進表

現であることに注意する.

Lemma 2.5. 楕円曲線 E に付随する副 p 外 Galois 作用 $\rho_{E,p}$ の核の固定体 $\bar{K}^{\ker(\rho_{E,p})}$ は, K に E の p 等分点の座標を添加した体 $K(E[p])$ と K の法 p^∞ 射類体 $K(p^\infty)$ の合成体である.

Proof. 以下の完全列があることに注意する.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Gal}(K(E[p^\infty])/K(p^\infty)) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Gal}(K(E[p^\infty])/K) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Gal}(K(p^\infty)/K) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & O_K^\times \arrow[r] & (O_K \otimes \mathbb{Z}_p)^\times \arrow[r] & (O_K \otimes \mathbb{Z}_p)^\times / O_K^\times \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

ここで p は奇素数であるから, $O_K^\times$ の $(O_K \otimes \mathbb{F}_p)^\times$ への自然な写像は単射である. 故に $\mathrm{Gal}(K(E[p^\infty])/K(p^\infty) \cdot K(E[p]))$ から $O_K^\times$ への単射の像は自明になり, 望みの等号 $K(E[p^\infty]) = K(p^\infty) \cdot K(E[p])$ を得る. □

補題 2.5 と類似した議論を辿ることで, 一点抜き楕円曲線 X に付随する副 p 外 Galois 表現に対しても以下の主張を証明することができる.

Lemma 2.6 (cf. [Ish23b, Lemma 2.13])**.** X に付随する副 p 外 Galois 表現の核の固定体 $\bar{K}^{\ker(\rho_{X,p})}$ は, $K(E[p])$ と K の法 p 射類体 $K(p)$ の p 外不分岐最大副 p 拡大体との合成体に含まれる.

Proof. 証明は $p > 3$ の場合と $p = 3$ の場合に分けて行う. まず $p > 3$ の場合を考える. 完全列

$$1 \to \rho_{X,p}(G_{K(E[p])}) \to \rho_{X,p}(G_{K(p)}) \to \mathrm{Gal}(K(E[p])/K(p)) \to 1$$

は, $\rho_{X,p}(G_{K(E[p])})$ が副 p 群であり $\mathrm{Gal}(K(E[p])/K(p))$ の位数が p と互いに素であることから分裂する.

セクション $s\colon \mathrm{Gal}(K(E[p])/K(p)) \to \rho_{X,p}(G_{K(p^\infty)})$ を固定する. 今, s の像 $\mathrm{Im}(s)$ は自己同型群 $\mathrm{Aut}_K(X) = O_K^\times$ が基本群の関手性により定める単射準同型 $O_K^\times \to \mathrm{Out}(\pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{K}})^{(p)})$ の像に含まれる (cf. [Ish23b, Lemma 2.13]). このことからセクション s は直積分解

$$\rho_{X,p}(G_{K(E[p])}) \times \mathrm{Gal}(K(E[p])/K(p)) \xrightarrow{\sim} \rho_{X,p}(G_{K(p)})$$

を誘導する. 従って $\bar{K}^{\ker(\rho_{X,p})}$ は, $K(p)$ のある副 p 拡大体と $K(E[p])$ の合成体である. $X \times_K K(E[p])$ が $K(E[p])$ の任意の剰余標数が p と異なる有限素点で良還元を持つことに注意すると分岐に関する主張も従う.

次に $p = 3$ の場合を考える. 上の証明は虚二次体 K が 3 次円分体 $\mathbb{Q}(\mu_3)$ と異なるならば $p = 3$ の場合でもそのまま適用できるので, 以下では $p = 3$ かつ $K = \mathbb{Q}(\mu_3)$ とする.

この場合には, $K(E[3])$ 上で E は 3 次 Fermat 曲線と同型である. 故に補題の主張を示すには初めから E が 3 次 Fermat 曲線であると仮定してよい. すると $K(E[3]) = K(3) = K$ であり, X は 3 の外の全ての K の有限素点で良還元を持つ. 故に $\bar{K}^{\ker(\rho_{X,3})}$ は K の 3 外不分岐最大副 3 拡大に含まれることが示された. □

三点抜き射影直線の場合の疑問 1 と補題 2.6 を元に, 筆者は論文 [Ish23b, Page 11] において次の疑問を提起した.

Question 2. 体 $\bar{K}^{\ker(\rho_{X,p})}$ は, $K(E[p])$ 及び $K(p)$ の p 外不分岐最大副 p 拡大体の合成体か.

本稿の主結果は疑問 2 がある仮定の下で肯定的であるというものである.

主結果を述べるために必要な予想を定式化する. 主結果では p は O_K において異なる極大イデアル $\mathfrak{p}$ とその共役 $\bar{\mathfrak{p}}$ の積に分解すると仮定しているので, 以下本節では (最後の命題 2.9 を除き) それを仮定する.

すると $\pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{K}})^{(p)}$ の最大アーベル商, すなわち p 進 Tate 加群への Galois 群 G_K への作用は $\mathfrak{p}$ 進 (resp. $\bar{\mathfrak{p}}$ 進)Tate 加群への Galois 作用を表す指標

$$\chi_1\colon G_K \to \mathbb{Z}_p^\times \quad \text{resp.} \quad \chi_2\colon G_K \to \mathbb{Z}_p^\times$$

に分解される. 最大副 p メタアーベル商への Galois 群 $G_{K(E[p^\infty])}$ の外作用については, Bloch の Deligne への手紙において導入された準同型

$$G_{K(E[p^\infty])} \to \mathbb{Z}_p[[T_pE]](1)$$

によって表される (その構成は例えば [Tsu95, Proposition 1.9] を参照). この冪級数は Jacobi 和の普遍冪級数の一点抜き楕円曲線類似であり, 角皆 [Tsu95] や中村 [Nak95] らにより CM を持つとは限らない一般の一点抜き楕円曲線の場合に研究されてきた. 特に [Nak95, Theorem A] においては, 先述した [IKY87] の類似にあたる冪級数の明示公式が与えられている.

我々の考察する状況においては, 上記冪級数の係数は明示的な特徴づけ [Nak95, (3.11.5)] を持つ Kummer 指標

$$\kappa_{(m_1,m_2)}\colon G^{\text{ab}}_{K(E[p^\infty])} \to \mathbb{Z}_p(m_1,m_2) \coloneqq \mathbb{Z}_p(\chi_1^{m_1}\chi_2^{m_2})$$

を用いて表される. ここで (m_1, m_2) は

$$I \coloneqq \{(m_1,m_2) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 1} \setminus \{(1,1)\} \mid m_1 \equiv m_2 \bmod |O_K^\times|\}$$

の元である [Ish23a, Lemma 3.1][*3]. 指標 $\kappa_{(m_1,m_2)}$ についても Soulé 指標と同様に非自明性や数論的に興味深い性質が (部分的にではあるが) 分かっている [Ish23a].

さて, 前節と同様に幾何的副 p 基本群 $\pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{K}})^{(p)}$ の中心降下列により外部自己同型群にフィルトレーションが定まる. 記号の濫用だが, $\rho_{X,p}$ によって逆像を取って定まる G_K 上のフィルトレーションを前節と同じ記号 $\{F^mG_K\}_{m>0}$ で表し,

$$gr^mG_K \coloneqq F^mG_K/F^{m+1}G_K \quad \text{および } \mathfrak{g} \coloneqq \bigoplus_{m>0} gr^mG_K$$

と定義する. 各商 $gr^mG_K \otimes \mathbb{Q}_p$ は $G_K/F^1G_K = \mathrm{Gal}(K(E[p^\infty])/K)$ の作用に関して $\mathbb{Q}_p(m_1,m_2) \coloneqq \mathbb{Z}_p(m_1,m_2) \otimes \mathbb{Q}_p$ たちの有限直和に同型である. ここに (m_1,m_2) は $m_1+m_2 = m$ となる整数の組 $(m_1,m_2) \in I$ を走る. また上に述べた指標 $\kappa_{(m_1,m_2)}$ を $F^{m_1+m_2}G_K$ に制限すると $gr^{m_1+m_2}G_K$ を経由する [Ish23b, Lemma 2.9].

以上の設定の下, 定理 2.1 の類似物を定式化する. なお, 現時点では定理 2.1 の証明手法の類似を辿って以下の予想 2.7 を証明する方針には幾つもの困難があり, 予想 2.7 の主張の生成部分も自由部分も証明されていないことを付記しておく.

[*3] Soulé 指標 χ_m の添字 m が 3 以上の奇数であったことと比較されたい.

Conjecture 2.7 (I. [Ish23b, Conjecture 2.10])**.** 各 $\boldsymbol{m}=(m_1,m_2)\in I$ に対し, $\sigma_{\boldsymbol{m}}\in gr^{m_1+m_2}G_K$ を条件:

$$\kappa_{\boldsymbol{m}}(\sigma_{\boldsymbol{m}})\text{ は }\kappa_{\boldsymbol{m}}(gr^{m_1+m_2}G_K)\subset\mathbb{Z}_p(m_1,m_2)\text{ を生成する}$$

を満たす $gr^{m_1+m_2}G_K$ の $\chi_1^{m_1}\chi_2^{m_2}$ 成分の元とする. この時, $\{\sigma_{\boldsymbol{m}}\}_{\boldsymbol{m}\in I}$ は $\mathbb{Q}_p$ 上の次数付き Lie 代数 $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{Q}_p$ の自由生成元である.

次の定理が本稿の主結果である.

Theorem 2.8 (I. [Ish23b, Theorem 2.13])**.** 次の 3 条件を仮定する.

1. K の法 p 射類体 $K(p)$ の類数は p と互いに素である.
2. p を割るような $K(p^\infty)$ 上の素点は 2 つのみである.
3. 予想 2.7 が成立する.

この時, 疑問 2 は肯定的である. 即ち, 一点抜き CM 楕円曲線 X に付随する副 p 外 Galois 表現 $\rho_{X,p}$ の核の固定体 $\bar{K}^{\ker(\rho_{X,p})}$ は $K(E[p])$ と $K(p)$ の p 外不分岐最大副 p 拡大の合成体に等しい.

最後に, $p=3$ かつ $K=\mathbb{Q}(\mu_3)$ の場合には疑問 2 が肯定的であることを付記しておく:

Proposition 2.9. $p=3$ かつ $K=\mathbb{Q}(\mu_3)$ の時, 疑問 2 は肯定的である.

Proof. まず, 補題 2.6 の後半と同様の考察により, E を 3 次 Fermat 曲線と仮定して良い. この時, 等号 $K=K(3)=K(E[3])$ が成立している.

主張を示すには, 一点抜き CM 楕円曲線 X に付随する副 3 外 Galois 表現 $\rho_{X,3}$ と有理数体上の三点抜き射影直線に付随する副 3 外 Galois 表現の核が一致することを証明すればよい. というのも $p=3$ は正則ゆえ, 定理 2.1 と定理 2.2 から後者の核の固定体は $K=\mathbb{Q}(\mu_3)$ の 3 外不分岐最大副 3 拡大と一致するからである.

一方の包含 $\ker(\rho_{X,3})\subset\ker(\rho_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}\setminus\{0,1,\infty\},3})$ については任意の双曲的代数曲線に対して成立する定理 [HM11, Theorem C] より従い, 逆の包含については 3 次 Fermat 曲線から射影直線への 3 点の外で不分岐な $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ 被覆に対して命題 [Hos12, Proposition 30] を適用すればよい. □

3 主結果の証明の概略

本節では, 論文 [Ish23b, §4] で与えている定理 2.8 の証明の概略を述べる. その証明は定理 2.2 の証明の方針を踏襲している.

Ω を $K(p)$ の p 外不分岐最大副 p 拡大体とする. この時, まず Galois 群 $G:=\mathrm{Gal}(\Omega/K(p))$ について, 定理 2.8 の最初の 2 つの仮定の下で

$$\dim_{\mathbb{F}_p}H^1(G,\mathbb{F}_p)=\frac{(p-1)^2}{|O_K^\times|}+2,\quad \dim_{\mathbb{F}_p}H^2(G,\mathbb{F}_p)=1$$

と計算される [NSW08, (10.7.13) Theorem]. 特に定理 2.2 の状況とは異なり, 群 G は自由ではない.

そのため, Soulé 元の持ち上げの構成の際には G の生成元の間の非自明な関係式の存在に注意する必要がある.

$$I_0 \coloneqq \{\boldsymbol{m} = (m_1, m_2) \in I \mid m_1, m_2 \le p-1\} \cup \{(p,1), (1,p)\}.$$

と置く. 群 G の生成元を次のようにとる. まず $\mathrm{Gal}(K(p^\infty)/K(p)) \cong \mathbb{Z}_p^2$ の生成元の持ち上げ $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{Gal}(\Omega/K(p))$ を取る. 次に各 $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2) \in I_0$ に対して Soulé 元の持ち上げ $\sigma_{\boldsymbol{m}} \in F^{m_1+m_2}G$ を予想 2.7 の仮定を満たすように選ぶことができる.

証明の次のステップは, 補題 2.3 を 2 回に分けて用いる部分である[*4]. 即ち $(m_1, m_2) \in I_0$ に対して $\sigma_{(m_1,m_2)}$ からはじめて $\sigma_{(m_1+(p-1),m_2)}$ 及び $\sigma_{(m_1,m_2+(p-1))}$ を構成する. この操作を帰納的に繰り返し, 全ての $(m_1, m_2) \in I$ について予想 2.7 の条件を満たす Soulé 元の持ち上げ $\sigma_{(m_1,m_2)} \in F^{m_1+m_2}G$ を帰納的に構成する. そして純群論的な考察により, 群 $\mathrm{Gal}(\Omega/K(p^\infty))$ が $\{\sigma_{\boldsymbol{m}}\}_{\boldsymbol{m}\in I}$ によって位相的に生成されることを証明する.

このステップは [Ish23b, §4.1] で実行されているが, 重要な点は以下である.

- 定理 2.2 の状況では商 $gr^m G$ には $\mathbb{Z}_p(m)$ の有限直和に同型であったが, 我々が考える状況では互いに同型でない Galois 加群が商に現れるため, σ_m から $\sigma_{m+(p-1)}$ を構成する方法をそのまま適用することはできない.
  論文 [Ish23b, §3] では, 二変数のフィルトレーション $F^{(m_1,m_2)}G \subset F^{m_1+m_2}G$ を導入してこれを克服している. このフィルトレーションは $F^{(m_1,m_2)}G$ の $gr^{m_1+m_2}G$ への像が $\mathbb{Z}_p(m_1, m_2)$ の有限直和と同型になるという性質を持っており, 片側の成分を増やした際の隣接商 $F^{(m_1,m_2)}G/F^{(m_1+1,m_2)}$ 及び $F^{(m_1,m_2)}G/F^{(m_1,m_2+1)}$ への Galois 作用も記述できる [Ish23b, Corollary 3.10].
  このフィルトレーションを用いることで, 各 Soulé 元 $\sigma_{(m_1,m_2)}$ の持ち上げを $\sigma_{(m_1,m_2)} \in F^{(m_1,m_2)}G_K \subset F^{m_1+m_2}G$ に構成することができる.
- $(p-1, p-1)$ 次の Soulé 元の持ち上げ $\sigma_{(p-1,p-1)}$ として交換子 $[\gamma_1, \gamma_2]$ を取ることができる. この考察は, 群 $F^1G = \mathrm{Gal}(\Omega/K(p^\infty))$ が Soulé 元の持ち上げ $\{\sigma_{\boldsymbol{m}}\}_{\boldsymbol{m}\in I}$ によって位相的に生成されることを示す際に必要になる.
- 例えば $\sigma_{(p,p)}$ については, $\sigma_{(p,1)}$ と $\sigma_{(1,p)}$ にそれぞれに補題 2.3 を適用するというふた通りの構成が考えられる. このような "重複部分" に関しては, $\sigma_{(p,1)}$ と $\sigma_{(1,p)}$ のどちらから構成しても得られる元は $\mathrm{Gal}(\Omega/K(p^\infty))$ のアーベル化上で一致する [Ish23b, Page 25, construction]. ここに定理の 2 つ目の素点の個数に関する仮定を用いる. この考察から, 群 $\mathrm{Gal}(\Omega/K(p^\infty))$ の生成元を考察する際には片方の構成は省いても良い.

以上の議論から, 群 $\mathrm{Gal}(\Omega/K(p^\infty))$ が Soulé 元の持ち上げ $\{\sigma_{\boldsymbol{m}}\}_{\boldsymbol{m}\in I}$ により位相的に生成されることが証明される. ひとたびこの主張が証明されれば, あとは前節にて説明した定理 2.2 の証明のステップ 2 を素直に二変数の状況に拡張することで望みの等号が証明される. 詳細は [Ish23b, §4.2] をご覧いただきたい.

[*4] 正確には補題 2.3 と全く同様にして示されるその二変数版 [Ish23b, Lemma 4.1] を用いる.

4　関連する問題

本稿のように, 三点抜き射影直線の (副 p) 外 Galois 表現に関する研究の一点抜き CM 楕円曲線類似を与える問題には未だ考察の余地が残されているように筆者には思われる. 例えば本稿の主結果を素数 p が虚二次体 K で惰性する場合に拡張することも重要な問題であり, 現在検証中である.

その他にも, 本稿では (副 p) 外 Galois 表現の核に関する結果を紹介したが, その像の特徴付けも重要な課題である. 特に有理数体上の三点抜き射影直線の外 Galois 表現による絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}}$ の像は Grothendieck-Teichmüller 群と呼ばれる群に含まれることが知られており, この包含が等号であるかは未解決である.

この Grothendieck-Teichmüller 群の “Lie 代数版” である安定導分代数には, その 12 次の部分に 691 を法としたある合同関係式が存在する (cf. [Iha02, Lecture I, (6.3)]). 同様に, 一点抜き CM 楕円曲線に対する安定導分代数 (cf. [Tsu03]) の中にも, Bernoulli 数の虚二次体類似である Hurwitz 数の p 可除性に関連した合同関係式を見出すことは興味深い問題であるように思われる.

謝辞

本稿は筆者の「代数的整数論とその周辺」2023 における講演に加筆と修正を加えたものです. 講演と本稿執筆の機会を与えてくださいましたプログラム作成委員の千田雅隆先生, 三枝洋一先生, 甲斐亘先生に改めて感謝を申し上げます. また本稿の執筆に際してご助言いただきました数理解析研究所の玉川安騎男先生と東京工業大学の山口永悟さんにこの場をお借りして感謝申し上げます. 本研究に際して, 筆者は JSPS 科研費 JP 23KJ1882 の助成を受けております.

参考文献

[AI88] Greg Anderson and Yasutaka Ihara, *Pro-l branched coverings of $\mathbf{P}^1$ and higher circular l-units*, Ann. of Math. (2) **128** (1988), no. 2, 271–293. MR 960948

[Bel79] Gennadii Vladimirovich Belyi, *Galois extensions of a maximal cyclotomic field*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), no. 2, 267–276, 479.

[Bro12] Francis Brown, *Mixed Tate motives over $\mathbb{Z}$*, Ann. of Math. (2) **175** (2012), no. 2, 949–976.

[HM03] Richard Hain and Makoto Matsumoto, *Weighted completion of Galois groups and Galois actions on the fundamental group of $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$*, Compositio Math. **139** (2003), no. 2, 119–167.

[HM11] Yuichiro Hoshi and Shinichi Mochizuki, *On the combinatorial anabelian geometry of nodally nondegenerate outer representations*, Hiroshima Math. J. **41** (2011), no. 3, 275–342.

[Hos12] Yuichiro Hoshi, *On monodromically full points of configuration spaces of hyperbolic curves*, The arithmetic of fundamental groups—PIA 2010, Contrib. Math. Comput.

Sci., vol. 2, Springer, Heidelberg, 2012, pp. 167–207.

[Iha86] Yasutaka Ihara, *Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications*, Ann. of Math. (2) **123** (1986), no. 1, 43–106.

[Iha90] ———, *Braids, Galois groups and some arithmetic functions*, ICM-90, Mathematical Society of Japan, Tokyo; distributed outside Asia by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1990, A plenary address presented at the International Congress of Mathematicians held in Kyoto, August 1990.

[Iha02] ———, *Some arithmetic aspects of Galois actions in the pro-p fundamental group of* $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$, Arithmetic fundamental groups and noncommutative algebra (Berkeley, CA, 1999), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 70, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 247–273.

[IKY87] Yasutaka Ihara, Masanobu Kaneko, and Atsushi Yukinari, *On some properties of the universal power series for Jacobi sums*, Galois representations and arithmetic algebraic geometry (Kyoto, 1985/Tokyo, 1986), Adv. Stud. Pure Math., vol. 12, North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 65–86.

[IS87] Humio Ichimura and Katsuhiko Sakaguchi, *The nonvanishing of a certain Kummer character* χ_m *(after C. Soulé), and some related topics*, Galois representations and arithmetic algebraic geometry (Kyoto, 1985/Tokyo, 1986), Adv. Stud. Pure Math., vol. 12, North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 53–64.

[Ish23a] Shun Ishii, *On Kummer characters arising from Galois actions on the pro-p fundamental groups of once-punctured CM elliptic curves*, arXiv : https://arxiv.org/pdf/2312.04175.pdf, 2023, preprint.

[Ish23b] ———, *On the kernels of the pro-p outer Galois representations associated to once-punctured CM elliptic curves*, arXiv : https://arxiv.org/pdf/2312.04196.pdf, 2023, preprint.

[Mat96] Makoto Matsumoto, *Galois representations on profinite braid groups on curves*, J. Reine Angew. Math. **474** (1996), 169–219.

[MS03] William G. McCallum and Romyar T. Sharifi, *A cup product in the Galois cohomology of number fields*, Duke Math. J. **120** (2003), no. 2, 269–310.

[Nak95] Hiroaki Nakamura, *On exterior Galois representations associated with open elliptic curves*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **2** (1995), no. 1, 197–231.

[NSW08] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt, and Kay Wingberg, *Cohomology of number fields*, second ed., Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[Sha02] Romyar T. Sharifi, *Relationships between conjectures on the structure of pro-p Galois groups unramified outside p*, Arithmetic fundamental groups and noncommutative algebra (Berkeley, CA, 1999), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 70, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 275–284.

[Tsu95] Hiroshi Tsunogai, *On the automorphism group of a free pro-l meta-abelian group and an application to Galois representations*, Math. Nachr. **171** (1995), 315–324.

[Tsu03] ———, *The stable derivation algebras for higher genera*, Israel J. Math. **136** (2003), 221–250.

[Voe91] Vladimir Voevodsky, *Galois representations connected with hyperbolic curves*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **55** (1991), no. 6, 1331–1342.