潜在的保型性と局所大域整合性について

東京大学大学院数理科学研究科　松本晃二郎
Kojiro Matsumoto
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

概要：F を CM 体、n を正整数、l を素数とする。本稿では潜在的保型性定理を今まで知られていなかったいくつかの場合に拡張する方法について説明する。さらに潜在的保型性を示すときにもっと詳しい性質を同時に理解する方法を導入し、それが局所大域整合性や Ramanujan 予想に応用されることについても説明する。

目 次

1　導入

F を CM 体（すなわち総虚な CM 体か総実体）、n は正整数、G_F を F の絶対ガロア群とする。さらに、$\mathbb{Z}^n_+ := \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \mid \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n\}$ とおき、$\lambda \in (\mathbb{Z}^n_+)^{\mathrm{Hom}(F,\mathbb{C})}$ に対して、V_λ を最高ウェイトが λ の $\prod_{\mathrm{Hom}(F,\mathbb{C})} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約な代数的表現とする。

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ のカスピダル表現 π がコホモロジカルでウェイトが $\lambda \in (\mathbb{Z}^n_+)^{\mathrm{Hom}(F,\mathbb{C})}$ であることを、π の無限成分 π_∞ と V_λ の双対表現 $V_\lambda^\vee$ の無限小指標が等しいことで定義する。この条件は π の有限素点成分 π^∞ が $\varinjlim_K H^*(X_K, V_\lambda)$ の $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F^\infty)$ の $\mathbb{C}$ 上の表現としての部分表現になっていることと同値である。ここで、K は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F^\infty)$ のコンパクト開部分群全体を走っており、X_K は $\mathrm{GL}_{n,F}$ のレベル K の局所対称空間を表している。

このとき、全ての素数 l と体の同型 $\iota : \overline{\mathbb{Q}_l} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ に対して、n 次元半単純 l 進 Galois 表現 $r_\iota(\pi) : G_F \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_l})$ が [11] と [16] において構成されている。この対応に関して次の予想がある。

予想 1.1. （局所大域整合性）

π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ のコホモロジカルなカスピダル表現とする。このとき、全ての素数 l と体の同型 $\iota : \overline{\mathbb{Q}_l} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$、$F$ の有限素点 $v \nmid l$ に対して、

$$\iota \mathrm{WD}(r_\iota(\pi)|_{G_{F_v}})^{F-ss} \cong \mathrm{rec}_{F_v}(\pi_v |\det|_v^{\frac{1-n}{2}})$$

が成立する。

Remark 1.2. これは v が l を割るところでも期待されているが、それについては [8] や [4] を参照。

予想 1.3. （潜在的保型性）

$r : G_F \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_l})$ を既約かつほとんど全ての F の有限素点で不分岐であり、全ての l 進素点で *de Rham* かつ *Hodge-Tate* ウェイトが正則な l 進表現とすると、F の有限次 *CM* 拡大体 E と $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$ のコホモロジカルな尖点表現 Π、体の同型 $\iota : \overline{\mathbb{Q}_l} \to \mathbb{C}$ が存在して、$r|_{G_E} \cong r_\iota(\Pi)$ が成立する。

Remark 1.4. 1 この予想は F を有限次拡大しなくとも良いことが期待されているが、それは $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{Q}}$ の場合以外にはほとんど知られていない。

2 ここで、$\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_l}(F_v, \overline{\mathbb{Q}_l})$ に対する $r|_{G_{F_v}}$ の τ-Hodge-Tate ウェイトを $\mathrm{HT}_\tau(r|_{G_{F_v}}) = \{\cdots, \underbrace{i, \cdots\cdots, i}_{\dim_{\overline{\mathbb{Q}_l}}(r|_{G_{F_v}} \otimes_{\tau, F_v} \widehat{\overline{F_v}}(i))^{G_{F_v}}}, \cdots\} \in \mathbb{Z}^n / S_n$ で定義しており、$r|_{G_{F_v}}$ の Hodge-Tate ウェイトが正則であることは任意の τ に対して、$\mathrm{HT}_\tau(r|_{G_{F_v}})$ が相異なる n 個の整数からなることで定義した。

これらの予想について今までわかっていたことを述べる。
まず、局所大域整合性に関して述べる。

- [21] において、半単純成分の対応 $\iota \mathrm{WD}(r_\iota(\pi)|_{G_{F_v}})^{ss} \cong \mathrm{rec}_{F_v}(\pi_v |\det|_v^{\frac{1-n}{2}})^{ss}$ はわかっている。したがって、残された問題はモノドロミー作用素の部分である。

- さらに π が共役自己双対性 $\pi^c \cong \pi^\vee$ を持つ場合は、局所大域整合性は完全にわかっている。（[18], [17], [7], [8]）この場合は $r_\iota(\pi)$ はある種のユニタリ志村多様体のエタールコホモロジーの中に実現されることがわかっており、局所大域整合性は $r_\iota(\pi)|_{G_{F_v}}$ に対するウェイトモノドロミー予想という幾何的な予想に帰着されて示された。しかし、一般の場合は $r_\iota(\pi)$ はそのような幾何学的な解釈を持つかどうかわかっておらず、この場合の手法を拡張することは困難であると考えられる。

- π が本質的自己双対性を持つとは限らない場合、2 次元でウェイトが 0 の場合か 2 次元で通常な場合にのみ、剰余表現に対する技術的な仮定のもとで潜在的保型性を用いることでモノドロミー作用素まで含めた対応が示さ

れている。([2]、[20]) しかし、この場合の手法は 2 次元でしか機能しない手法だったので、本稿ではこれを一般次元でも機能するものに修正したものを紹介する。

次に、潜在的保型性について述べる。

- 局所大域整合性の場合と同様に、共役自己双対性がある場合はよくわかっている。([5])
- 一般の場合は、通常なものや 2 次元で parallel ウェイトなものの対称積表現の場合にはそれなりにわかっているもあるが、それ以外の場合はほとんどわかっていなかった。([15]、[6])

これらの予想に関して、本稿では次の結果について説明する。(より詳細な結果は [13] 参照。)

定理 1.5. $\mathcal{R} := (M, S, \{r_\lambda\}_\lambda, \{Q_v(X)\}_{v\notin S}, \{H_\tau\}_{\tau\in\mathrm{Hom}(F,\overline{M})})$ を既約でとても弱い G_F の l 進表現の整合系で純であるか保型的であるとする。さらに次のいずれかの条件を仮定する。(これらの用語の定義は *Appendix* を参照。)

1 総奇または総偶なランク *1* のとても弱い G_{F^+} の l 進表現の整合系 $\mathcal{X}$ が存在して、$\mathcal{R} \cong \mathcal{R}^\vee \otimes \mathcal{X}|_{G_F}$ が成立する。

2 $|\lambda - \lambda'| \geq n$ が任意の $\tau \in \mathrm{Hom}(F, \overline{M})$ と $\lambda \neq \lambda' \in H_\tau$ に対して成立する。

このとき、F の有限次 *CM* 拡大 E と $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$ のコホモロジカルなカスピダル表現 Π が存在して、$\mathcal{R}|_{G_E} \cong \mathcal{R}_\Pi$ である。

さらに、ディリクレ密度正な素数 l と任意の $\iota : \overline{\mathbb{Q}_l} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ と $v \nmid l$ に対して、$\iota\mathrm{WD}(r_\iota(\pi)|_{G_{F_v}})^{F-ss} \cong \mathrm{rec}_{F_v}(\pi_v|\det|_v^{\frac{1-n}{2}})$ が成立する。

さらに、ここから次のような応用が得られる。

系 1.6. π をウェイト $\lambda \in (\mathbb{Z}^n_+)^{\mathrm{Hom}(F,\mathbb{C})}$ の $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ のコホモロジカルなカスピダル表現であって、ディリクレ密度 *1* の素数 l と任意の $\iota : \overline{\mathbb{Q}_l} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ に対して $r_\iota(\pi)|_{G_{F(\zeta_l)}}$ の剰余表現 $\overline{r_\iota(\pi)}|_{G_{F(\zeta_l)}}$ が既約になっているとする。さらに次のいずれかが成立していると仮定する。

1 $n = 2$。(この場合は *[1, Lemma 7.1.10]* により、ディリクレ密度 *1* の l で剰余既約になることはわかっている。)

2 総奇または偶な代数的な *Hecke* 指標 $\chi : \mathbb{A}^\times_{F^+}/(F^+)^\times \to \mathbb{C}^\times$ が存在して、$\pi \cong \pi^\vee \otimes \chi \circ N_{F/F^+}$ が成立する。

3 $\lambda_{\tau,i} - \lambda_{\tau,i+1} \geq n - 1$ が任意の $\tau \in \mathrm{Hom}(F, \mathbb{C})$ と $i = 1, \cdots, n-1$ に対して成立する。

このとき、正なディリクレ密度の l と任意の $\iota : \overline{\mathbb{Q}_l} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ と $v \nmid l$ に対して、$\iota\mathrm{WD}(r_\iota(\pi)|_{G_{F_v}})^{F-ss} \cong \mathrm{rec}_{F_v}(\pi_v|\det|_v^{\frac{1-n}{2}})$ が成立する。

系 1.7. *(Ramanujan 予想)*
π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ のコホモロジカルなカスピダル表現とすると、任意の F の有限素点 v に対して π_v は *tempered* である。

実際、系 1.6 の 2、3 の状況では $\mathcal{R}_\pi$ は定理 1.5 の仮定を満たすことが [9, Theorem 1.3] からわかるが、先ほども述べたように [21] においてすでに半単純成分の対応はわかっており、モノドロミー作用素の部分は体を有限次拡大しても変わらないので結果を得る。1 の場合は Symm^2 をとって 2 の場合と同様の議論をすれば良い。詳しくは [13, Proposition 2.23, Theorem 6.9] を参照。

系 1.7 に関して、π は CM を持たず、π_v は不分岐であると仮定して良い。簡単のため π の中心指標は自明であるとする。このとき π はユニタリであり、π_v が tempered であることは $\mathrm{rec}_{F_v}(\pi_v)$ のフロベニウス固有値の複素絶対値が 1 であることと同値である。一方で、全ての正整数 k に対する $\mathrm{Symm}^k\mathcal{R}_\pi$ に定理 1.5 を適応することができる[1]ので、F の有限次 CM 拡大 E と $\mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{A}_E)$ のユニタリなコホモロジカルなカスピダル Π、v の下にない素数 l、$\iota : \overline{\mathbb{Q}_l} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ が存在して $\mathrm{Symm}^k r_\iota(\pi)|_{G_E} \cong r_\iota(\Pi)$ と $\iota\mathrm{WD}(r_\iota(\Pi)|_{G_{E_w}})^{F-ss} \cong \mathrm{rec}_{E_v}(\Pi_w|\det|_w^{-n})$ が任意の $w \mid v$ に対して成立する。したがって、特に Π_w は不分岐であり、$\mathrm{rec}_{E_w}(\Pi_w)$ のフロベニウス固有値の複素絶対値は $q_w^{-\frac{1}{2}}$ 以上 $q_w^{\frac{1}{2}}$ 以下であることがわかる。(q_w は E_w の剰余体の位数。[13, Theorem 2.11] を参照。) したがって、$\mathrm{rec}_{F_v}(\pi_v)$ のフロベニウス固有値の複素絶対値が $q_v^{-\frac{1}{2k}}$ 以上 $q_v^{\frac{1}{2k}}$ 以下であることがわかり、主張が得られる。完全な議論が知りたい方は [13, Theorem 6.10] を参照。

以降の節において、定理 1.5 の証明について説明する。特に、2 節では保型性持ち上げ定理と局所大域整合性について説明し、3 節では主定理を実際に自己双対な場合に示す。

2 保型性持ち上げ定理と局所大域整合性

前節と同様、F は CM 体で n は正整数とする。

定義 2.1. l を素数、$v \mid l$ を F の有限素点とする。
1 ρ_1、$\rho_2 : G_{F_v} \to \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_l}})$ を連続表現とする。
このとき、$\rho_1 \sim \rho_2$ を次の 3 条件が成立することで定義する。
(1) $\overline{\rho_1} \cong \overline{\rho_2}$。
(2) ρ_1 と ρ_2 はクリスタリンであり、これらの Hodge-Tate weight は等しい。
(3) ρ_1 と ρ_2 は $\overline{\rho_1}$ のクリスタリン持ち上げ環の中で共通の既約成分に含まれる。(クリスタリン持ち上げ環は [12] で導入されたものを用いている。より詳しい性質は [13, section 3.3] を参照。)

[1]正確にはこの定理の仮定を満たすかはわからないが、それに近いことを示すことができ、それで十分である。[13, Proposition 6.8, Lemma 6.3] を参照。

2 $r_1, r_2 : G_F \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_l})$ を剰余既約な連続表現とする。これに対し、$r_i^\circ : G_F \to \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_l}})$ であり、$r_i^\circ \otimes \overline{\mathbb{Q}_l} \cong r_i$ を満たすものが $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_l}})$ の共役を除いて定まる。このとき、$r_1|_{G_{F_v}} \sim r_2|_{G_{F_v}}$ であることを $r_1^\circ|_{G_{F_v}} \sim r_2^\circ|_{G_{F_v}}$ で定義する。

定理 2.2. $l \geq 2(n+1)$ を素数とし、$\iota : \overline{\mathbb{Q}_l} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$、$\lambda \in (\mathbb{Z}_+^n)^{\mathrm{Hom}(F,\overline{\mathbb{Q}_l})}$、$r : G_F \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_l})$ が以下の条件を満たすと仮定する。

1 $\overline{r}$ は *decomposed generic* である。(この定義は *[13, Definition 4.22]* を参照。定理 *1.5* の状況ではほとんど全ての λ に対して、$\overline{r_\lambda}$ はこの仮定を満たすことが *[13, Lemma 6.3, Lemma 6.19]* からわかるので、以降の議論でもあまり気にしないことにする。)

2 $\overline{r}|_{G_{F(\zeta_l)}}$ は既約である。

3 $\zeta_l \notin F$。

4 r はほとんど全ての F の有限素点において不分岐である。

5 任意の $v \mid l$ に対して、$r|_{G_{F_v}}$ はクリスタリンであり、$\mathrm{HT}_\tau(r|_{G_{F_v}}) = \{\lambda_{\tau,1} + n-1, \lambda_{\tau,2} + n-2, \cdots, \lambda_{\tau,n}\}$ が任意の $\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_l}(F, \overline{\mathbb{Q}_l})$ に対して成立する。

6 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ のウェイト $\iota\lambda$ のコホモロジカルなカスピダル表現 π が存在して次の性質を満たす。(ここで、$(\iota\lambda)_{\tau,i} = \lambda_{\iota^{-1}\tau,i}$ と置いた。)

(1) $\overline{r} \cong \overline{r_\iota(\pi)}$。

(2) 任意の $v \mid l$ に対して、π_v は不分岐であり、$r_\iota(\pi)|_{G_{F_v}} \sim r|_{G_{F_v}}$ である。

(3) 任意の $v \nmid l$ に対して、$N(r_\iota(\pi)|_{G_{F_v}}) = N(r|_{G_{F_v}})$ が成り立つ。($N(r|_{G_{F_v}})$ は、$r|_{G_{F_v}}$ に対応する *Weil-Deligne* 表現のモノドロミー作用素の共役類を表す。)

(4) 任意の $v \nmid l$ に対して、$\iota\mathrm{WD}(r_\iota(\pi)|_{G_{F_v}})^{F-ss} \cong \mathrm{rec}_{F_v}(\pi_v|\det|_v^{\frac{1-n}{2}})$ が成り立つ。

このとき、$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ のウェイト $\iota\lambda$ のコホモロジカルなカスピダル表現 Π が存在して、$r \cong r_\iota(\Pi)$ であり、$\iota\mathrm{WD}(r_\iota(\Pi)|_{G_{F_v}})^{F-ss} \cong \mathrm{rec}_{F_v}(\Pi_v|\det|_v^{\frac{1-n}{2}})$ が任意の $v \nmid l$ に対して成立する。

この定理の証明の概略について述べる。

まず、最後の局所大域整合性を得る部分以外は古典的によく用いられていた保型性持ち上げ定理を単純に一般化したものであり(共役自己双対な場合は [19, Theorem 7.1] を参照)、最近の結果である [9, Theorem 1.3] と [14, Section 7.2] により技術的な問題が解決されたことにより使えるようになったものである。詳しくは [13, Theorem 4.52] を参照。

最後の局所大域整合性を得るために、次の 2 つの結果を用いる。

定理 2.3. π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ のコホモロジカルでカスピダルな保型表現とし、l を素数、$\iota : \overline{\mathbb{Q}_l} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ を体の同型とする。

このとき全ての $v \nmid l$ に対して、$\iota\mathrm{WD}(r_\iota(\pi)|_{G_{F_v}})^{ss} \cong \mathrm{rec}_{F_v}(\pi_v|\det|_v^{\frac{1-n}{2}})^{ss}$ と $N(r_\iota(\pi)|_{G_{F_v}}) \leq N(\mathrm{rec}_{F_v}(\pi_v))$ が成立する。ここで、冪零行列の順序は *Jordan* 標準形を考えることにより n の分割と対応させることにより定めており、n の分

割の順序は大きい順に足していっても常に不等号が成立し続けるという順序によって定めている。

Proof. [21] を参照。 □

補題 2.4. v を F の有限素点、$X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ を冪零行列とする。このとき、$\mathrm{GL}_n(F_v)$ の *paraholic subgroup* K_v が存在して、任意の *Iwahori fixed vector* を持つ $\mathrm{GL}_n(F_v)$ の既約 *smooth* 表現 σ に対して、次が得られる。

(1) もし $\sigma^{K_v} \neq 0$ ならば、$N(\mathrm{rec}_{F_v}(\sigma)) \leq X$ が成立する。

(2) もし σ は *generic* であり、$N(\mathrm{rec}_{F_v}(\sigma)) \leq X$ を満たすならば、$\sigma^{K_v} \neq 0$ が成立する。

Proof. [13, Lemma 2.6] を参照。 □

これらを用いて、局所大域整合性を得る方法について説明する。

まず、Arthur-Clozel の可解底変換定理から、$\pi_v^{\mathrm{Iw}_v} \neq 0$ であると仮定して良いことに注意する。K_v を Lemma 2.4 を $N(\mathrm{rec}_{F_v}(\pi_v))$ に適用することによって定まる paraholic subgroup とする。このとき、π_v は generic なので、$\pi_v^{K_v} \neq 0$ である。保型性持ち上げ定理の示すときに、レベルを K_v に固定しながら議論することにより、$\Pi_v^{K_v} \neq 0$ が得られる。したがって、$N(\mathrm{rec}_{F_v}(\Pi_v)) \leq N(\mathrm{rec}_{F_v}(\pi_v))$ が導かれるが、仮定 (3)、(4) から $N(\mathrm{rec}_{F_v}(\pi_v)) = N(r_\iota(\pi)|_{G_{F_v}}) = N(r|_{G_{F_v}}) = N(r_\iota(\Pi)|_{G_{F_v}})$ である。したがって、$N(\mathrm{rec}_{F_v}(\Pi_v)) \leq N(r_\iota(\Pi)|_{G_{F_v}})$ が得られ、定理 2.3 と合わせて $\iota\mathrm{WD}(r_\iota(\pi)|_{G_{F_v}})^{F-ss} \cong \mathrm{rec}_{F_v}(\pi_v|\det|_v^{\frac{1-n}{2}})$ を得る。[2]

3 潜在的保型性と局所大域整合性

前節までと同様に、F は CM 体で n は正整数であるとする。この節では、定理 1.5 の証明について説明する。簡単のため自己双対な場合のみ説明する。

まず、共役自己双対の場合によく用いられていた性質について述べる。

定義 3.1. l を素数とし、$v \mid l$ を F の有限素点、$\rho : G_{F_v} \to \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_l}})$ を連続表現とする。

1 ρ が対角化可能であることを、ρ がクリスタリンかつクリスタリン指標の直和 $\rho_2 := \chi_1 \oplus \cdots \oplus \chi_n$ が存在して、$\rho_1 \sim \rho_2$ が成立する。

2 ρ が潜在的対角化可能であることを、F_v を有限次拡大すれば ρ が対角化可能になることで定義する。

Remark 3.2. [13, Proposition 3.31] から、Fontaine-Laffaille なら潜在的対角化可能である。

[2]実際には少し議論がいる。[13, Proposition 2.22] を参照。

定理 3.3. $\mathcal{R} := (M, S, \{r_\lambda\}_\lambda, \{Q_v(X)\}_{v\notin S}, \{H_\tau\}_{\tau\in\mathrm{Hom}(F,\overline{M})})$ を既約でとても弱い G_F の l 進表現の整合系で純であるか保型的であり、さらに $\mathcal{R}\cong\mathcal{R}^\vee$ であると仮定する。

このとき、F の有限次 *CM* 拡大 E と $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$ のコホモロジカルなカスピダル表現 Π が存在して、$\mathcal{R}|_{G_E}\cong\mathcal{R}_\Pi$ である。

さらに、正なディリクレ密度の素数 l と任意の $\iota : \overline{\mathbb{Q}_l} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$、$v\nmid l$ に対して、$\iota\mathrm{WD}(r_\iota(\pi)|_{G_{F_v}})^{F-ss}\cong\mathrm{rec}_{F_v}(\pi_v|\mathrm{det}|_v^{\frac{1-n}{2}})$ が成立する。

この証明のために、以下の共役自己双対な場合の結果を用いる。

命題 3.4. *(1)* d は正整数。

(2) $l\geq 2(d+1)$ は素数で $F\not\subseteq F^+(\zeta_l)$ を満たすもの。

(3) $\mu : G_{F^+}\longrightarrow\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}^\times$ は総奇または総偶な連続指標で l 進素点で *de Rham* になっているもの。

(4) $\overline{r} : G_F\longrightarrow\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_l)$ は連続表現で次の条件を満たすもの。

・$\overline{r}|_{G_{F(\zeta_l)}}$ は既約。

・d は $\overline{r}$ を $G_{F(\zeta_l)}$ の全ての副 *l-Sylow* 部分群で位相的に生成される閉部分群に制限した時の既約部分商のうち最大の次元以上である。

・G_F-同変かつ対称な *perfect pairing* $\overline{r}\times\overline{r}^c\to\overline{\mu}|_{G_F}$ が存在する。

(5) S は F の有限素点の有限集合であり、次の条件を満たす。

・$S=S^c$。

・任意の $v\in S$ は F^+ 上分裂する。

・S は全ての F の l 進素点を含む。

・$\overline{r}$ と μ は S の外で不分岐である。

(6) 任意の $v\in S$ に対して、$\overline{r}|_{G_{F_v}}$ の持ち上げ $\rho_v : G_{F_v}\to\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_l}})$ を以下の条件を満たす連続表現とする。

・もし $v\nmid l$ なら、ρ_v^{ss} は不分岐かつ $N(\rho_v)=N(\rho_{v^c})(=N(\rho_{v^c}^\vee\mu|_{G_{F_{v^c}}}))$ が成立する。

・もし $v|l$ なら、ρ_v は *Hodge-Tate* ウェイトが正則かつ潜在的対角化可能であり、$\rho_{v^c}^c\sim\rho_v^\vee\mu|_{G_{F_v}}$ が成立する。

この時、$\overline{r}$ の持ち上げ $r : G_F\to\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_l}})$ が存在して、次の条件を満たす。

(a) G_F-同変かつ対称な *perfect pairing* $r\times r^c\to\mu|_{G_F}$ が存在する。

(b) 任意の $v\notin S$ に対して、$r|_{G_{F_v}}$ は不分岐。

(c) 任意の $v\mid l$ に対して、$r|_{G_{F_v}}\sim\rho_v$ が成立する。

(d) 任意の $v\in S\setminus\{u|l\}$ に対して、$N(r|_{G_{F_v}})=N(\rho_v)$ が成立する。

さらに、任意の $\iota : \overline{\mathbb{Q}_l}\xrightarrow{\sim}\mathbb{C}$ に対して、F の有限次 *CMGalois* 拡大 E と $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$ のコホモロジカルなカスピダル表現 π で $r|_{G_E}\cong r_\iota(\pi)$ が成立するものが存在する。

Proof. [13, Proposition 5.8] を参照。 □

以下で、定理 3.3 の証明の概略を述べる。

まず、素数 l と $\lambda \mid l$ を $\overline{r_\lambda}|_{G_{F(\zeta_l)}}$ が既約で、r_λ は全ての l 進素点で Fontaine-Laffaille であるものとする。(このような l は、Proposition A.4 からディリクレ密度 1 で存在する。)

ここで、単純に $\mathrm{Ind}_{G_F}^{G_{F^+}} r_\lambda$ を考えてしまうと、Hodge-Tate regular にならないので、剰余的に自明で共役自己双対な指標 $\theta : G_F \to \overline{\mathbb{Q}_l}^\times$ で $\mathrm{Ind}_{G_F}^{G_{F^+}}(r_\lambda\theta)$ が Hodge-Tate regular になるようなものを考える。この時、この表現自体は自己双対ではないかもしれないが、剰余表現は自己双対になっている (したがって複素共役が自明だと思って、共役自己双対性だと思える) のでこの表現に命題 3.4 を用いることを考えたい。そのために次の結果を用いる。

命題 3.5. $\mathcal{R} := (M, S, \{r_\lambda\}_\lambda, \{Q_v(X)\}_{v\notin S}, \{H_\tau\}_{\tau\in\mathrm{Hom}(F,\overline{M})})$ を既約なとても弱い G_F の l 進表現の整合系で純であるか保型的であるとする。この時、整数 w が存在して、正なディリクレ密度の l と全ての $\lambda \mid l$ と $v \mid l$ に対して、有限次拡大 F'_v/F_v が存在して、$r_\lambda^c|_{G_{F'_v}} \sim r_\lambda^\vee \varepsilon_l^{-w}|_{G_{F'_v}}$ が成立する。

Proof. [13, Lemma 6.4, Lemma 6.18] を参照。 □

この結果と命題 3.4 を用いることによって、正なディリクレ密度の l に対しては F^+ の有限次 CM 拡大 E と $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A}_E)$ の(本質的)共役自己双対かつコホモロジカルなカスピダル表現 π が存在して、$r_\iota(\pi)$ と $(\mathrm{Ind}_{G_F}^{G_{F^+}} r_\lambda\theta)|_{G_E}$ は定理 2.2 の仮定を満たす。(本質的共役自己双対の場合は局所大域整合性は完全に解決されていることに注意。)したがって、$\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A}_E)$ のコホモロジカルなカスピダル表現 Π が存在して、$r_\iota(\Pi) \cong (\mathrm{Ind}_{G_F}^{G_{F^+}}(r_\lambda\theta))|_{G_E}$ かつ $\iota\mathrm{WD}(r_\iota(\Pi)|_{G_{E_v}})^{F-ss} \cong \mathrm{rec}_{E_v}(\Pi_v|\det|_v^{\frac{1-2n}{2}})$ が全ての E の有限素点 $v \nmid l$ に対して成立する。Arthur-Clozel の可解底変換定理から、$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{EF})$ のコホモロジカルなカスピダル表現 Π_1 が存在して、$r_\iota(\Pi_1) \cong r_\lambda|_{G_{FE}}$ が成立するが、Π が局所大域整合性を満たしていることと定理 2.3 を用いることにより $\iota\mathrm{WD}(r_\iota(\Pi_1)|_{G_{(FE)_v}})^{F-ss} \cong \mathrm{rec}_{(FE)_v}(\Pi_{1,v}|\det|_v^{\frac{1-n}{2}})$ が全ての FE の有限素点 $v \nmid l$ に対して成立することを示すことができ、証明が終了する。この部分の詳細は [13, Lemma 5.2] を参照。

A　Galois 表現の整合系についての補足

Galois 表現の整合系に関して必要になる事柄を補足する。F は代数体で n は正整数とする。

定義 A.1.
- ランク n のとても弱い G_F の l 進表現の整合系というのは、次のデータからなるもの $\mathcal{R} = (M, S, \{Q_v(X)\}_{v\notin S}, \{r_\lambda\}_\lambda, \{H_\tau\}_{\tau\in\mathrm{Hom}(F,\overline{M})})$ のことである。

  1 M は代数体。

  2 S は F の有限素点の有限集合。

3 $v \notin S$ に対して、$Q_v(X) \in M[X]$ は次数 n のモニック多項式。

4 $\tau \in \mathrm{Hom}(F, \overline{M})$ に対して、H_τ は $\mathbb{Z}^n/\mathfrak{S}_n$ の元。

5 M の素イデアル λ に対して、$r_\lambda : G_F \to \mathrm{GL}_n(\overline{M_\lambda})$ は半単純連続表現で次の条件を満たす。

(a) もし $v \notin S$ かつ $v \nmid \mathrm{char}\mathbb{F}_\lambda$ ならば、$r_\lambda|_{G_{F_v}}$ は不分岐であり、$\det(TI_n - r_\lambda(\mathrm{Frob}_v)) = Q_v(X)$ が成立する。

(b) ディリクレ密度 1 の素数の集合 $\mathcal{L}$ が存在して、任意の $l \in \mathcal{L}$ と $\lambda \mid l$、$v \mid l$ に対して、$r_\lambda|_{G_{F_v}}$ はクリスタリン表現であり、$\mathrm{HT}_{\iota\tau}(r_\lambda) = H_\tau$ が任意の $\tau \in \mathrm{Hom}(F, \overline{M})$ と M 上の埋め込み $\iota : \overline{M} \hookrightarrow \overline{M_\lambda}$ に対して成立する。

- ランク n の非常に弱い G_F の l 進表現の整合系というのは、上の条件のうち 5 の (b) 以外の条件を満たすデータからなるもののことである。

定義 A.2. π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ のコホモロジカルなカスピダル表現とすると、次のデータを考えることができる。

・S_π は π が分岐する F の有限素点全体の集合。

・M_π は π の Hecke 体、すなわち $M_\pi = \mathbb{Q}(\mathrm{rec}_{F_v}(\pi_v)(\mathrm{Frob}_v)$ の特性多項式の係数 $\mid \pi_v$ が不分岐)。[10, Theorem 3.13] から、これは代数体になることが知られている。

・任意の $v \notin S_\pi$ に対して, $Q_v(X) := \det(XI_n - \mathrm{rec}_{F_v}(\pi_v|\det|_v^{\frac{1-n}{2}})(\mathrm{Frob}_v))$。

・任意の λ of M_π に対して、$r_{\pi,\lambda} : G_F \to \mathrm{GL}_n(\overline{M_{\pi,\lambda}})$ を連続半単純表現で v が S_π に含まれず、$\mathrm{char}\mathbb{F}_\lambda$ も割らなければ、$r_{\pi,\lambda}|_{G_{F_v}}$ は不分岐かつ $\det(TI_n - r_{\pi,\lambda}(\mathrm{Frob}_v)) = Q_v(T)$ になるもの。

・任意の $\tau \in \mathrm{Hom}(F, \overline{M})$ に対して、$H_{\pi,\tau} := \{\lambda_{\tau,i} + n - i \mid i = 1, \cdots, n\} \in (\mathbb{Z}^n/\mathfrak{S}_n)$。

この時、$\mathcal{R}_\pi := (M_\pi, S_\pi, \{Q_{\pi,v}(X)\}, \{r_{\pi,\lambda}\}, \{H_{\pi,\tau}\})$ はランク n の非常に弱い G_F の l 進表現の整合系であり、これを保型的な整合系と呼ぶ。さらに、Dirichlet 密度 1 の素数 l と任意の $\lambda \mid l$ に対して $\overline{r_{\pi,\lambda}}$ が既約なら、とても弱い G_F の l 進表現の整合系になることが [13, Corollary 4.24] からわかる。

定義 A.3.

1 非常に弱い G_F の l 進表現の整合系 $\mathcal{R} := (M, S, \{Q_v(X)\}, \{r_\lambda\}, \{H_\tau\})$ に対して、$\mathcal{R}$ が既約であるというのをディリクレ密度 1 の素数 l と任意の $\lambda \mid l$ に対して、r_λ が既約であることで定義する。

2 $\mathcal{R} := (M, S, \{Q_v(X)\}, \{r_\lambda\}, \{H_\tau\})$ ランク n のとても弱い G_F の l 進表現の整合系とする。$\mathcal{R}$ が正則であることを任意の τ に対して、H_τ が n 個の相異なる整数からなることで定義する。

3 非常に弱い G_F の l 進表現の整合系 $\mathcal{R} := (M, S, \{Q_v(X)\}, \{r_\lambda\}, \{H_\tau\})$ と整数 w に対して、$\mathcal{R}$ がウェイト w で純であることを、任意の $v \notin S$ と任意の

$Q_v(X)$ の根 $\alpha \in \overline{M}$、埋め込み $\iota : \overline{M} \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対して、$|\iota(\alpha)|^2 = q_v^w$ が成立することで定義する。

命題 A.4. $\mathcal{R} = (M, S, \{Q_v(X)\}, \{r_\lambda\}, \{H_\tau\})$ をランク n で既約かつ正則なランク n のとても弱い G_F の l 進表現の整合系とする。

この時、ディリクレ密度 *1* の素数 l と任意の $\lambda \mid l$ に対して、$\overline{r_\lambda}|_{G_{F(\zeta_l)}}$ は既約である。

Proof. [5, Proposition 5.3.2] を参照。 □

参考文献

[1] P. B. Allen, F. Calegari, A. Caraiani, T. Gee, D. Helm, B. V. Le Hung, J. Newton, P. Scholze, R. Taylor, and J. A. Thorne *Potential automorphy over CM fields*, Ann. of Math. (2), vol. 197, no. 3, pp. 897-1113, 2023, issn: 0003-486X,1939-8980. doi: 10.4007/annals.2023.197.3.2.

[2] P. B. Allen and J. Newton *Monodromy for some rank two Galois representations over CM fields*, Doc. Math., vol. 25, pp. 2487-2506, 2020, issn: 1431-0635,1431-0643.

[3] J. Arthur and L. Clozel *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*, (Annals of Mathematics Studies). Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989, vol. 120, pp. xiv+230, isbn: 0-691-08517-X; 0-691-08518-8.

[4] B. Hevesi *Ordinary parts and local-global compatibility at $\ell = p$*, 2023. arXiv: 2311.13514 [math.NT].

[5] T. Barnet-Lamb, T. Gee, D. Geraghty, and R. Taylor *Potential automorphy and change of weight*, (Annals of Mathematics Studies). Ann. of Math. (2), vol. 179, no. 2, pp. 501-609, 2014, issn: 0003-486X,1939-8980. doi: 10.4007/annals.2014.179.2.3. [Online]. Available: https://doi.org/10.4007/annals.2014.179.2.3.

[6] G. Boxer, F. Calegari, T. Gee, J. Newton, and J. A. Thorne *The Ramanujan and Sato-Tate Conjectures for Bianchi modular forms*, 2023. arXiv: 2309.15880 [math.NT].

[7] A. Caraiani *Local-global compatibility and the action of monodromy on nearby cycles*, Duke Math. J., vol. 161, no. 12, pp. 2311-2413, 2012, issn: 0012-7094,1547- 7398. doi: 10.1215/00127094-1723706. [Online]. Available: https://doi.org/10. 1215/00127094-1723706.82

[8] A. Caraiani *Monodromy and local-global compatibility for* $l = p$, Algebra Number Theory, vol. 8, no. 7, pp. 1597-1646, 2014, issn: 1937-0652,1944-7833. doi: 10.2140/ ant.2014.8.1597. [Online]. Available: https://doi.org/10.2140/ant.2014.8. 1597.

[9] A. Caraiani and J. Newton *On the modularity of elliptic curves over imaginary quadratic fields*, 2023. arXiv: 2301.10509 [math.NT].

[10] L. Clozel *Motifs et formes automorphes: Applications du principe de fonctorialit'e*, in Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988), ser. Perspect. Math. Vol. 10, Academic Press, Boston, MA, 1990, pp. 77-159, isbn: 0-12-176651-9.

[11] M. Harris, K.-W. Lan, R. Taylor, and J. Thorne *On the rigid cohomology of certain Shimura varieties*, Res. Math. Sci., vol. 3, Paper No. 37, 308, 2016, issn: 2522- 0144,2197-9847. doi: 10.1186/s40687-016-0078-5. [Online]. Available: https: //doi.org/10.1186/s40687-016-0078-5.

[12] M. Kisin *Potentially semi-stable deformation rings*, J. Amer. Math. Soc., vol. 21, no. 2, pp. 513-546, 2008, issn: 0894-0347,1088-6834. doi: 10.1090/S0894-0347- 07-00576-0. [Online]. Available: https://doi.org/10.1090/S0894-0347-07- 00576-0.

[13] K. Matsumoto *On the potential automorphy and the local-global compatibility for the monodromy operators at* $p \neq l$ *over CM fields*, 2023, arXiv : 2312.01551.

[14] K. Miagkov and J. A. Thorne *Automorphy lifting with adequate image*, Forum Math. Sigma, vol. 11, Paper No. e8, 31, 2023, issn: 2050-5094. doi: 10.1017/fms. 2023.3. [Online]. Available: https://doi.org/10.1017/fms.2023.3.

[15] L. Qian *Potential automorphy for* GL_n, Invent. Math., vol. 231, no. 3, pp. 1239-1275, 2023, issn: 0020-9910,1432-1297. doi: 10.1007/s00222-022-01161-6. [On- line]. Available: https://doi.org/10.1007/s00222-022-01161-6.

[16] P. Scholze *On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties*, Ann. of Math. (2), vol. 182, no. 3, pp. 945-1066, 2015, issn: 0003-486X,1939-8980. doi: 10.4007/annals.2015.182.3.3. [Online]. Available: https://doi.org/10.4007/ annals.2015.182.3.3.

[17] S. W. Shin *Galois representations arising from some compact Shimura varieties*, Ann. of Math. (2), vol. 173, no. 3, pp. 1645-1741, 2011, issn:

0003-486X,1939-8980. doi: 10.4007/annals.2011.173.3.9. [Online]. Available: https://doi.org/10. 4007/annals.2011.173.3.9.

[18] R. Taylor and T. Yoshida *Compatibility of local and global Langlands correspondences*, J. Amer. Math. Soc., vol. 20, no. 2, pp. 467-493, 2007, issn: 0894-0347,1088- 6834. doi: 10.1090/S0894-0347-06-00542-X. [Online]. Available: https://doi. org/10.1090/S0894-0347-06-00542-X.

[19] J. Thorne *On the automorphy of l-adic Galois representations with small residual image*, J. Inst. Math. Jussieu, vol. 11, no. 4, pp. 855-920, 2012, With an appendix by Robert Guralnick, Florian Herzig, Richard Taylor and Thorne, issn: 1474-7480,1475- 3030. doi: 10.1017/S1474748012000023. [Online]. Available: https://doi.org/ 10.1017/S1474748012000023.

[20] Y. Yang *An ordinary rank-two case of local-global compatibility for automorphic representations of arbitrary weight over CM fields*, 2021. arXiv: 2111.00318.

[21] I. Varma *Local-global compatibility for regular algebraic cuspidal automorphic representations when $l \neq p$*, 2014. arXiv: 1411.2520 [math.NT].

謝辞： この原稿は「代数的整数論とその周辺」2023 において筆者により発表された内容をもとに書かれたものである。筆者に講演の機会を与えていくださったオーガナイザーの方々に感謝を申し上げたいと思います。本研究は東京大学数理科学研究科の WINGS-FMSP program からの支援を受けている。

Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo 153-8914, Japan.

Email address: soccerkjr2252@g.ecc.u-tokyo.ac.jp