正則超尖点表現に対する局所 Jacquet–Langlands 対応について

京都大学数学教室（白眉センター）　大井　雅雄
Masao Oi
Department of Mathematics (Hakubi Center),
Kyoto University

1　背景：局所 Jacquet–Langlands 対応と Henniart の結果

本稿では Charlotte Chan 氏（University of Michigan）との共同研究 [CO23] において得られた結果を報告する．

まず今回の研究の背景・動機となる，局所 Jacquet–Langlands 対応と，その明示的記述に関する Henniart の結果を簡単に紹介したい．

本節では F を p 進体（すなわち $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大）とする．また G を F 上の一般線型群 GL_n とし，G' をその内部形式とする．$\Pi_{\mathrm{disc}}(G)$（あるいは $\Pi_{\mathrm{disc}}(G')$）という記号で，$G(F)$（あるいは $G'(F)$）の既約離散系列表現の同型類の集合を表すことにする．このとき $\Pi_{\mathrm{disc}}(G)$ と $\Pi_{\mathrm{disc}}(G')$ は**局所 Jacquet–Langlands 対応**と呼ばれる対応により関係付けられるのであった：

定理 1.1 (**局所 Jacquet–Langlands 対応**, [Rog83, DKV84])**.** 以下の条件（**指標関係式**）を満たす全単射 $\Pi_{\mathrm{disc}}(G) \xleftrightarrow{1:1} \Pi_{\mathrm{disc}}(G')\colon \pi \leftrightarrow \pi'$ が一意に存在する：

> 代数閉体上で共役となるような任意の正則半単純元 $g \in G(F)$ および $g' \in G'(F)$ の組について，表現の Harish-Chandra 指標に関する等式
>
> $$\Theta_{\pi}(g) = e(G') \cdot \Theta_{\pi'}(g')$$
>
> が成立する（ただし $e(G')$ は G' の Kottwitz 符号を表す）．

さて一般に，p 進体上の簡約群の表現論においては，**超尖点表現**と呼ばれるクラスの離散系列表現たちが，分類理論の観点から基本的な役割を果たすのであった．GL_n の場合には，既約超尖点表現の同型類に関する明示的な分類理論が知られている（Bushnell–Kutzko の **type の理論**, [BK93]）．この分類理論はやや複雑な見た目をしているが，**本質的馴超尖点表現**と呼ばれる特別なクラスの表現に絞れば，簡明な解釈を持つことが知られている．具体的には，本質的馴超尖点表現の同型類の集合（$\Pi_{\mathrm{tame}}(G)$ と書くことにする）は，**許容対**という組 (E, θ)（ここで，E は F の馴

分岐 n 次拡大で，θ は許容性と呼ばれる条件を満たす $E^{\times}$ の指標）の同値類の集合と一対一に対応する（Howe による分類，[How77]）：

$$\Pi_{\mathrm{disc}}(G) \supset \Pi_{\mathrm{tame}}(G) \xleftrightarrow{1:1} \{\text{許容対 } (E,\theta)\}/\sim : \pi_{(E,\theta)} \leftrightarrow (E,\theta).$$

また同様の分類理論は GL_n の内部形式についても知られており，中でも本質的馴超尖点表現と呼ばれるクラスの表現については，やはり許容対を用いた単純な解釈がある（ここで，許容対の定義自体は G の場合でも G' の場合でも全く同じであることに注意）：

$$\Pi_{\mathrm{disc}}(G') \supset \Pi_{\mathrm{tame}}(G') \xleftrightarrow{1:1} \{\text{許容対 } (E,\theta)\}/\sim : \pi'_{(E,\theta)} \leftrightarrow (E,\theta).$$

これらを踏まえれば，局所 Jacquet–Langlands 対応を，本質的馴超尖点表現の場合に許容対の言葉で具体的に書き下すことはできないだろうか，と考えるのは自然な発想である．それを特殊な設定下で実際にやってみせたのが Henniart による結果である：

定理 1.2 ([Hen92, Hen93])**.** G' は $G'(F) = D^{\times}$（ただし D は F 上の中心的斜体）となる GL_n の内部形式であるとする．また，n は奇素数であると仮定する．このとき，任意の許容対 (E,θ) に対して，それに伴う $G(F)$ および $G'(F)$ の本質的馴超尖点表現 $\pi_{(E,\theta)}$ と $\pi'_{(E,\theta)}$ は，局所 Jacquet–Langlands 対応の下で対応する．

本稿で考察したいのは，この定理 1.2 の一般の p 進簡約群への拡張である．

Henniart による [Hen92, Hen93] の主定理は，実際にはもう少し一般的なものであるが，定理 1.2 では簡単のために特殊な場合にのみ絞って述べている．一方で，2011 年には Bushnell–Henniart によって，完全に一般の設定下で（G' や n についての仮定なしに），本質的馴超尖点表現の局所 Langlands 対応の記述が得られている（[BH11]）．その意味では，[BH11] に比べると [Hen92, Hen93] の結果はあくまで部分的なものである．にも関わらず，上の説明において Henniart の結果を引用し，「この定理の一般化を考察する」とした理由は，Henniart による証明にある．[BH11] の証明が明示的局所 Langlands 対応に関する様々な蓄積を総動員するものであるのに比べ，[Hen92, Hen93] の証明は，ある一つのスマートなトリックに基づく実に単純なものである．本稿で考察するのは，Henniart の結果をその証明手法も含めて一般化する，ということである．

2 p 進簡約群の局所 Jacquet–Langlands 対応

以下では G を F 上の連結簡約代数群とする（F は引き続き p 進体とする）．定理 1.2 の G への一般化を論じる上では，まずそもそも「G の局所 Jacquet–Langlands 対応」とは何なのか，ということから考えなくてはならない．そこで必要となるのが**局所 Langlands 対応**である．これを述べるための記号を二つ用意する．まず先と同様に，$\Pi_{\mathrm{disc}}(G)$ という記号で，$G(F)$ の既約離散系列表現の同型類の集合を表す．そして $\Phi_{\mathrm{disc}}(G)$ という記号で，G の L パラメータの同値類の集合を

表す．ここで，G の L パラメータとは，準同型 $W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \widehat{G} \rtimes W_F$ であって諸々の条件を満たすもののことであった（W_F は F の Weil 群，$\widehat{G}$ は G の Langlands 双対群を表す）．

予想 2.1 (**局所 Langlands 予想**)**.** $\Pi_{\mathrm{disc}}(G)$ から $\Phi_{\mathrm{disc}}(G)$ へのある自然な写像 (**局所 Langlands 対応**) が存在する．言い換えれば，$\Pi_{\mathrm{disc}}(G)$ の $\Phi_{\mathrm{disc}}(G)$ の元でラベル付けされる自然な分割

$$\Pi_{\mathrm{disc}}(G) = \bigsqcup_{\phi \in \Phi_{\mathrm{disc}}(G)} \Pi_\phi^G$$

が存在する．ここで Π_ϕ^G は，「自然な写像」の $\phi \in \Phi_{\mathrm{disc}}(G)$ におけるファイバーのことであり，ϕ についての L **パケット**と呼ばれる．更に，各 $\phi \in \Phi_{\mathrm{disc}}(G)$ について，その L パケット Π_ϕ^G は単射な写像 $\Pi_\phi^G \hookrightarrow \mathrm{Irr}(\mathcal{S}_\phi)\colon \pi \mapsto \rho_\pi$ を備えている．ただし，$\mathcal{S}_\phi$ は ϕ から定まる有限群（しばしば S **群**などと呼ばれる）であり，$\mathrm{Irr}(\mathcal{S}_\phi)$ はその既約表現の同型類の集合を表す．

局所 Langlands 対応の存在は一般にはまだ予想に過ぎない．それどころか，どのようにすれば「自然な写像」の正確な意味，すなわち対応の特徴付けを定式化できるかについても，完全に一般の群では未だに知られていないと思われる．また，定式化ができている群の場合であっても，たとえば S 群をどのように定義するかに関して様々な方法がある．上で述べたかたちの「局所 Langlands 対応」はこれらの点をごまかした曖昧な記述になっている（また離散系列表現の場合しか考えていない）が，ここではこれ以上の細部には言及せずに話を進めてしまうことにする．ただし後に具体例を紹介する際には多少の説明は加える．局所 Langlands 対応に関する詳細な解説については，たとえば [Mie20] あるいは [Kal23] などを参照されたい．

さて予想 2.1 を基にして，「G の局所 Jacquet–Langlands 予想」を定式化しよう．そのためにまず G の内部捻り $\psi\colon G \to G'$ を一つ固定する（したがって G' は特に F 上の連結簡約群であり，ψ は $\overline{F}$ 上の同型である）．このとき G と G' の Langlands 双対群は Galois 作用込みで同型になるため，半直積群 $G \rtimes W_F$ と $G' \rtimes W_F$ を同一視することができ，したがって L パラメータの集合 $\Phi_{\mathrm{disc}}(G)$ と $\Phi_{\mathrm{disc}}(G')$ も同一視できる．そこで，G および G' に対して予想 2.1（局所 Langlands 対応の存在）を仮定することで，各 L パケット同士の対応 $\Pi_\phi^G \leftrightarrow \Pi_\phi^{G'}$ が得られる．この対応関係のことを G（および G'）についての**局所 Jacquet–Langlands 対応**と呼ぶことにする．局所 Jacquet–Langlands 対応は次の**指標関係式**を満たすと期待されている：

予想 2.2 (局所 Jacquet–Langlands 対応の指標関係式)**.** G および G' についての局所 Jacquet–Langlands 対応の下で，L パケット Π_ϕ^G と $\Pi_\phi^{G'}$ が対応しているとする．このとき，代数閉体上で共役となる（内部捻り ψ を通して）任意の強正則半単純元 $g \in G(F)$ および $g' \in G'(F)$ の組について，表現の Harish-Chandra 指標に関する等式

$$e(G) \cdot \sum_{\pi \in \Pi_\phi^G} \dim \rho_\pi \cdot \Theta_\pi(g) = e(G') \cdot \sum_{\pi' \in \Pi_\phi^{G'}} \dim \rho_{\pi'} \cdot \Theta_{\pi'}(g')$$

が成立する．ただし $e(-)$ は Kottwitz 符号を，$\rho_{(-)}$ は予想 2.1 の中で導入された S 群 $\mathcal{S}_\phi$ の既約表現を表す．

p 進簡約群の既約（許容）表現はその Harish-Chandra 指標によって一意に決まるため（**指標の一次独立性**），局所 Jacquet–Langlands 対応は指標関係式によって特徴付けられることに注意しておく．この指標関係式は，**エンドスコピー指標関係式**と呼ばれる，局所 Langlands 対応が満たすと期待される一般的な等式の特殊な場合となっている．先にも述べた通り，局所 Langlands 対応の正確な定式化は未だ知られていないはずだが，その満たすべき性質（必要条件）に関しては様々な研究が行われている．エンドスコピー指標関係式はそのような一連の「必要条件」の代表例である．その意味で，予想 2.2 は予想 2.1 の一部であると解釈することもできる．

以下では，G と G' について，「予想 2.2 と予想 2.1 が成り立つ」という意味で，局所 Langlands 対応および局所 Jacquet–Langlands 対応の存在を仮定して話を進める．

3　p 進簡約群の正則超尖点表現

次に，GL_n（およびその内部形式）の場合における「本質的馴超尖点表現」の概念を，一般の p 進簡約群の場合にはどう捉えれば良いのか，ということを考える．ここで注目するのが，Kaletha によって導入された**正則超尖点表現**というクラスの表現（[Kal19]）である．正則超尖点表現は，p 進簡約群の超尖点表現の明示的構成法に関する **Yu の理論**（[Yu01]）と呼ばれる理論に基づいて定義される表現である．Yu の構成法に則って超尖点表現を構成するには，まず **Yu データ**と呼ばれる複雑なインプットデータを指定する必要がある．Kaletha は表現が「正則性」という条件を満たしていれば，そのインプットデータを等価な，しかし大幅に簡略化されたデータで置き換えられることを見抜いた．その簡略化されたデータとは，**馴楕円的正則対**と呼ばれる，G の馴分岐楕円的極大トーラス S と $S(F)$ の「正則な」指標 θ から成る組 (S, θ) である．

したがってまとめると，$\Pi_{\mathrm{reg}}(G)$ を $G(F)$ の正則超尖点表現の同型類の集合とするとき，Yu および Kaletha の理論によって全単射

$$\Pi_{\mathrm{disc}}(G) \supset \Pi_{\mathrm{reg}}(G) \xleftrightarrow{1:1} \{\text{ 馴楕円的正則対 } (S, \theta)\}/\sim\colon \pi_{(S,\theta)} \leftrightarrow (S, \theta)$$

が得られる．実は GL_n の場合には，正則超尖点表現は本質的馴超尖点表現に他ならず，また馴楕円的正則対と許容対も全く等価な概念となる（[Kal19, Lemma 3.7.7]）．更に精密に，Yu および Kaletha の理論は，GL_n の場合の Howe の構成法の完全なる一般化だと捉えることができる．（なおこれらの事項に関する若干の詳細は，筆者の「表現論とその周辺分野における最近の進展」の報告集（RIMS 講究録）[Oi23] にもまとめたので，ここではこれ以上深掘りしないことにしておく．）

4　主定理とその証明のアイディア

p 進体 F 上の連結簡約群 G とその内部捻り $\psi\colon G \to G'$ を固定していたことを思い出そう．(S, θ) を G の馴楕円的正則対として，$S' := \psi(S) \subset G'$ とおく．このとき，必要ならば ψ を内部共役で取り替えることにより，ψ の S への制限 $\psi|_S\colon S \to S'$ が F 有理的であると仮定してよい．特に，$S(F)$ の指標 θ を ψ で押し出すことにより，$S'(F)$ の指標 $\theta' := \theta \circ \psi^{-1}$ が得られる．次の

補題は，馴椅円的正則対の定義に戻ることで簡単に証明できる：

補題 4.1. Galois コホモロジーの自然な射 $H^1(F,S) \to H^1(F,G)$ が単射であると仮定する．このとき，上述の手続きによって得られる組 (S',θ') は G' の馴椅円的正則対を成す．

「簡単に証明できる」とは書いたが，証明についてすこしだけコメントをしておく．馴椅円的正則対の「正則性」の定義はいくつかの条件からなるが，中でも重要なのが「S の Weyl 群による固定化群が自明」という条件である．ここで気を付けなくてはいけないのが，「S の Weyl 群」というのが「Weyl 群の F 値点」ではなく「 F 値点の Weyl 群」を指す点である．もし補題の単射性の条件があれば，実はこれら二通りの群が一致することが確認できる．一方で，(G,S) と (G',S') は内部捻りによって結ばれているため，Galois コホモロジーの単射性が (G,S) について成り立てば，(G',S') についても成り立つことが分かる．更に，S の（G 内の）Weyl 群と S' の（G' 内の）Weyl 群は有理的に同型であるので，これらの F 値点も同型となる．したがって，θ の S の Weyl 群による固定化群が自明であれば，θ' の S' の Weyl 群による固定化群も自明であることが帰結される．

G の馴椅円的正則対 (S,θ) に対応する $G(F)$ の正則超尖点表現を，$\pi_{(S,\theta)}$ という記号で表していたことを思い出そう．もし補題 4.1 の単射性の条件が成り立っていれば，(S',θ') も G' の馴椅円的正則対になるので，それに付随する $G'(F)$ の正則超尖点表現 $\pi_{(S',\theta')}$ が定まる．

以上の準備の下で，今回の主定理を説明しよう：

定理 4.2. $\pi_{(S,\theta)}$ を含む G の L パケットを Π_ϕ^G とおく．p が G の絶対 Weyl 群の位数を割らないと仮定する．また，以下の三条件を仮定する：

(1) $H^1(F,S) \to H^1(F,G)$ は単射である．
(2) L パケット Π_ϕ^G と $\Pi_\phi^{G'}$ はともに一元集合であり，対応する $\mathrm{Irr}(\mathcal{S}_\phi)$ の元は一次元である．
(3)「Henniart の不等式」が成り立つ．

このとき，$\Pi_\phi^{G'}$ に含まれるただ一つの元は $\pi_{(S',\theta')}$ である．

以下ではこの定理の証明の概略を説明したいのだが，まずはその前に，元となった Hennairt による定理 1.2 の証明のアイディアを紹介しておきたい．そこで，この段落では一時的に $G=\mathrm{GL}_n$ とし，G' をその内部形式とする．局所 Jacquet–Langlands 対応は表現の Harish-Chandra 指標の式によって特徴付けられるのであるから，$\pi_{(E,\theta)}$ と $\pi'_{(E,\theta)}$ の Harish-Chandra 指標を具体的に計算して比較するのが，定理 1.2 を示す上で一番直接的な方針であると言える．しかし全ての正則半単純元での Harish-Chandra 指標を求めようとすると，その記述はかなり複雑なものとなり，技術的に大変高度になる．そこで Henniart が考えたのは，「Harish-Chandra 指標の値が簡単になるような正則半単純元」にのみ注目するということである．Henniart はそのような元を **very 正則半単純元**と呼んだ．very 正則半単純元はあくまで特別なクラスの正則半単純元であるので，その上での Harish-Chandra 指標の挙動が指定されたからといって，超尖点表現が一意に定まるとは限らない（すくなくともアプリオリには）．しかし Henniart は，very 正則半単純元が適切な意味で「十分にたくさん」に存在すれば，超尖点表現を very 正則半単純元での指標値から特定できる，とい

うことを証明した．そしてここでの「十分にたくさん」の意味は，GL_n の極大トーラスに関連するある種の不等式によって定式化される．

以上の前置きを踏まえて，定理 4.2 の証明のアイディアを紹介したい．まず最初に，Henniart による GL_n の「very 正則半単純元」の概念を，p 進簡約群の場合に一般化する．

定義 4.3. p 進簡約群 $G(F)$ の正則半単純元 γ が，位相的 Jordan 分解 $\gamma = \gamma_0\gamma_+$ をもち，更に γ_0 が正則半単純元であるとき，γ は **very 正則半単純元**であるという．ここで位相的 Jordan 分解 $\gamma = \gamma_0\gamma_+$ とは，次のような条件を満たす分解のことである*1：

(1) $\gamma_0\gamma_+ = \gamma_+\gamma_0$ が成り立つ．
(2) γ_0 は $G(F)$ の中心を法として有限位数であり，その位数は p と素である．
(3) γ_+ は $G(F)$ の中心を法として副 p 的である．すなわち，$\lim_{n\to\infty} \gamma_+^{p^n} = 1$ が（$G(F)$ の中心を法として）成り立つ．

まず私たちは，一般の p 進簡約群の場合でも，正則超尖点表現 $\pi_{(S,\theta)}$ の very 正則半単純元における Harish-Chandra 指標の値が，次のような簡明な形をとることを証明した：

定理 4.4 ([CO23, Corollary 6.21])**.** 任意の楕円的 very 正則半単純元 $\gamma \in G(F)$ について，

$$\Theta_{\pi_{(S,\theta)}}(\gamma) = \varepsilon_{(G,S)} \sum_{w \in S\backslash N_G(T_\gamma,S)} \Delta_{(S,\theta)}({}^w\gamma)\cdot\theta({}^w\gamma)$$

が成り立つ．ここで $\varepsilon_{(G,S)}$ は (G,S) から定まる符号で，$\Delta_{(S,\theta)}$ は (S,θ) から明示的に定まる関数である（詳細は省略する；[CO23, Corollary 6.21] 参照）．また γ の連結中心化群として定まる G の極大トーラスを T_γ と書き，$N_G(T_\gamma,S) := \{n \in G(F) \mid {}^nT_\gamma = S\}$ とする．特に，$N_G(T_\gamma,S)$ が空集合であれば（言い換えると，γ が $S(F)$ の元と $G(F)$ 共役でなければ），$\Theta_{\pi_{(S,\theta)}}(\gamma) = 0$ である．

馴超尖点表現の指標に関しては Adler–Spice [AS09]，DeBacker–Spice [DS18]，Spice [Spi18, Spi21] などの仕事により精密な明示公式が与えられている．定理 4.4 は，Adler–DeBacker–Spice による指標公式（やその証明の一部）を，very 正則半単純元の場合に書き直したに過ぎない．また，Adler–DeBacker–Spice の指標公式がこのように簡略化され得ることに関しては Kaletha によって既に [Kal19] の中で指摘されており（これは [Kal19] で最も強調されている点の一つであった）*2，我々が見出した発見ではないことを注意しておく．我々の貢献はむしろ，以下に示すように，この観察を Henniart のトリックを一般化することに応用した点にある．

命題 4.5 ([CO23])**.** p は G の Weyl 群の位数を割らないと仮定する．もし「Henniart の不等式」が成り立つならば，$\pi_{(S,\theta)}$ は，超尖点表現というクラスの中において，定理 4.4 の条件を満たすただ一つの表現として特徴づけられる．

---

*1 位相的 Jordan 分解は常に存在するとは限らないが，γ が楕円的な元であれば存在する．[Spi08] 参照．

*2 ただ，[Kal19] で考察されていたのは **shallow** と呼ばれるクラスの正則半単純元であり，これは very 正則半単純元よりは遥かに狭いクラスとなっている．

この命題 4.5 こそが定理 4.2 の証明の最大の肝であるのだが，これについても本稿では [Oi23] を引用するに留めることにする．以下では定理 4.2 の証明の概略を簡単に説明したい（定理 4.4 や命題 4.5 の中に登場した「Henniart の不等式」の説明は一旦後回しにする）．

定理 4.2 の証明のスケッチ． π' を $\Pi_\phi^{G'}$ に属する唯一の元とする．このとき，局所 Langlands 対応の性質から π' が $G'(F)$ の超尖点表現であると分かる[*3]．指標関係式および定理の仮定 (2) により，等式

$$e(G')\cdot\Theta_{\pi'}(g') = e(G)\cdot\Theta_{\pi_{(S,\theta)}}(g)$$

が任意の very 正則半単純元 $g'\in S'(F)$ について成り立つ．ここで，$g := \psi^{-1}(g')\in S(F)$ とおいた（これもまた $G(F)$ の very 正則半単純元である）．定理 4.4 により，右辺は

$$e(G)\cdot\Theta_{\pi_{(S,\theta)}}(g) = e(G)\cdot\varepsilon_{(G,S)}\sum_{w\in S\backslash N_G(T_g,S)}\Delta_{(S,\theta)}({}^w g)\cdot\theta({}^w g)$$

で与えられる．定理の仮定 (1) の下では，(G,S) の Weyl 群と (G',S') の Weyl 群は ψ を通して同一視できるのであった．また $\theta' := \theta\circ\psi^{-1}$ と定義していたことを思い出しながら，$\Delta_{(S,\theta)}$ なども計算すれば，右辺は更に

$$e(G')\cdot\varepsilon_{(G',S')}\sum_{w\in S'\backslash N_{G'}(T_{g'},S')}\Delta_{(S',\theta')}({}^w g')\cdot\theta'({}^w g')$$

と書き換えられる．これは $\Theta_{\pi_{(S',\theta')}}$ の g' での値に他ならず，定理の仮定 (3) の下では，命題 4.5 から $\pi'\cong\pi_{(S',\theta')}$ であることが導かれる． □

この証明から分かるように，定理 4.2 の主張内で課されている雑多な仮定たちは，Henniart による [Hen92] の証明がそのまま機能するための仮定と言うこともできる．したがって今回の結果の核心は，「定理 4.2 の仮定が全て満たされる例を果たしてどれくらい発見できるのか？」という点にある．以下では，まず Henniart 不等式の説明をした後に，定理の具体例について説明したい．

5 Henniart の不等式

Henniart の不等式は G の馴楕円的正則対 (S,θ) から以下のようにして定まる．

ここでは簡単のために，S が不分岐であると仮定して説明をする．まず $S(F)$ の指標 θ の「深度 0 部分」の情報を用いて，$S\subset G^0\subset G$ となるような馴分岐 Levi 部分群 G^0（すなわち G^0 は F 有理的な部分群であって，F の馴分岐拡大体上では Levi 部分群となるもの）を自然に構成することができる．S が G 内で楕円的であることから，G^0 と G には「S に伴う parahoric 部分群」を定めることができる．これらの整モデルの特殊ファイバーの最大簡約商を $\mathbb{S}$，$\mathbb{G}^0$，$\mathbb{G}$ と書く（これらは F の剰余体 $\mathbb{F}_q$ 上の代数群となっている）．このとき，**Henniart の不等式**は

$$\frac{|\mathbb{S}(\mathbb{F}_q)|}{|\mathbb{S}(\mathbb{F}_q)\smallsetminus\mathbb{S}_{\mathrm{reg}}(\mathbb{F}_q)|} > 2\cdot|W_{\mathbb{G}^0(\mathbb{F}_q)}(\mathbb{S})|$$

[*3] 一般に，離散的で $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 部分が自明な L パラメータの L パケットは超尖点表現のみからなると期待されており，ここでは局所 Langlands 対応の「自然な性質」としてそれも仮定している．

で与えられる．ここで，$\mathbb{S}_{\mathrm{reg}}$ は $\mathbb{S}$ の $\mathbb{G}$ 内における正則半単純元からなる集合で，$W_{\mathbb{G}^0(\mathbb{F}_q)}(\mathbb{S})$ は $\mathbb{S}$ の $\mathbb{G}^0(\mathbb{F}_q)$ 内における Weyl 群を表す．この不等式は「$\mathbb{S}(\mathbb{F}_q)$ の**非**正則半単純元が $\mathbb{S}(\mathbb{F}_q)$ 全体の中で占める割合が十分に小さく（裏を返せば，正則半単純元が十分に多い），その割合が $2\cdot|W_{\mathbb{G}^0(\mathbb{F}_q)}(\mathbb{S})|$ で評価できる」と言っているのである．

S が一般の（不分岐でない）場合にも，Henniart 不等式の定義は概ね同様ではある．ただ，parahoric 部分群の代わりにその正規化群を考える必要があり，それによって $\mathbb{G}$ や $\mathbb{S}$ が非連結になり得ることに注意しなくてはならない．特に，一般には $\mathbb{G}$ や $\mathbb{S}$ は連結成分が無限個ある群にもなり得る．その場合に上のような不等式を定式化するためには，適切な商をとって $\mathbb{G}(\mathbb{F}_q)$ や $\mathbb{S}(\mathbb{F}_q)$ を有限群で置き換える必要があり，Henniart の不等式の見た目はやや複雑になる．

Henniart の不等式は，インプットデータの馴楕円的正則対 (S,θ) さえ具体的に与えられれば，明示的に書き下すことができる．たとえば S が不分岐で，parahoric 部分群が「Chevalley 的」なものである場合には，Henniart の不等式は群 $\mathbb{G}$ の Dyinkin タイプに関するケース・バイ・ケースの計算で記述することができる（[CO23, Appendix A] 参照）．この場合には特に，剰余位数 q が十分大きければ Henniart の不等式が成立することを証明できる．一方で S が不分岐でないと，たとえ q がいくら大きくとも Henniart の不等式が成立しない場合がある．

6　具体例

以下では，定理 4.2 が実際に適用できるような具体例をいくつか説明する．定理 4.2 においては，p が G の絶対 Weyl 群の位数を割らないとした上で，G の馴楕円的正則対 (S,θ) についての以下の三条件を仮定していたことを思い出そう：

(1) $H^1(F,S)\to H^1(F,G)$ は単射である．
(2) L パケット Π_ϕ^G と $\Pi_\phi^{G'}$ はともに一元集合であり，対応する $\mathrm{Irr}(\mathcal{S}_\phi)$ の元は一次元である．
(3)「Henniart の不等式」が成り立つ．

6.1　GL_n の場合

まず初めに，$G=\mathrm{GL}_n$ の場合を考察する．先にも述べた通り，GL_n の場合の正則超尖点表現に対する局所 Jacquet–Langlands 対応の明示的記述は，Bushnell–Hennairt [BH11] によって完全な答えが与えられている．したがってこの場合を考察しても新しい結果は出てこないのだが，「[BH11] あるいは [Hen92, Hen93] のどれくらいの部分をこの手法でカバーできるのか」という問題はそれはそれで興味深い．

(S,θ) を $G=\mathrm{GL}_n$ の馴楕円的正則対とする．S は楕円的極大トーラスであるから，抽象的には $\mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ という形で与えられる（E/F は n 次拡大）．このことから，Hilbert の定理 90 と Shapiro の補題を用いて，定理 4.2 の仮定 (1) が満たされることは容易に確認できる．また定理 4.2 の仮定 (2) については，$G=\mathrm{GL}_n$ であることから，いつでも満たされている．したがって考察す

べきは，定理 4.2 の仮定 (3) の Henniart の不等式である．

Henniart の不等式は，拡大体 E/F の情報が具体的に与えられさえすれば，明示的に記述することが可能である．たとえば n が奇素数の場合には，E/F は不分岐であるか完全分岐であるかの二通りである．E/F が不分岐であれば，Henniart の不等式は

$$\frac{q^n-1}{q-1} > 2n$$

で与えられる．実は n が奇素数であることに注目すれば，この不等式が常に成立していることを簡単に確認できる．特に，p と n が素である限りは，Henniart の定理が復元されることになる．

6.2 SO_{2n+1} の深度 0 超尖点表現の場合

次に $G=\mathrm{SO}_{2n+1}$ の場合を考察する（この場合には，Arthur [Art13] および Mœglin–Renard [MR18] によって，局所 Langlands 対応および局所 Jacquet–Langlands 対応は与えられている）．

定理 4.2 の仮定を全て満たす組 (S,θ) の例を探すのが目標であった．まずは G の楕円的極大トーラス S を構成する．$E\supset E_{\pm}\supset F$ を，F の不分岐拡大の列であって，$[E:E_{\pm}]=2$，$[E_{\pm}:F]=n$ であるものとする．すると，$G=\mathrm{SO}_{2n+1}$ の楕円的極大トーラス S であって，

$$S\cong \mathrm{Ker}(\mathrm{Nr}_{E/E_{\pm}}\colon \mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\to \mathrm{Res}_{E_{\pm}/F}\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$$

なるものが存在する．この S が定理 4.2 の仮定 (1) を満たすことは，Galois コホモロジーの単純な計算によって確認できる（詳細は [CO23, Section 9.4.2] 参照）．また，この S は不分岐な楕円的極大トーラスであり，さらには「Chevalley 的」なものになっているため，n に比べて q が十分大きければ Henniart の不等式が成立することが示せる（前節参照）．

さてこの（[Art13] および [MR18] の）設定下において，$G=\mathrm{SO}_{2n+1}$ の L パラメータ ϕ の S 群 $\mathcal{S}_{\phi}$ は

$$\mathcal{S}_{\phi}:=\mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}(\phi))/\{\pm1\}$$

で与えられる．$\widehat{G}=\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ であるから，ϕ は $W_F\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の $2n$ 次元斜交表現と見なすことができる．もしこの表現が既約であれば，$\mathcal{S}_{\phi}$ は自明であるので，とくに定理 4.2 の仮定 (2) も満たされることになる（Π_{ϕ}^{G} が一元集合で $\mathcal{S}_{\phi}$ の一次元表現に対応していれば，$\Pi_{\phi}^{G'}$ もそうであることが簡単に確認できる）．したがってあとは，「$\pi_{(S,\theta)}$ に対応する L パラメータ ϕ が既約になるような θ」の具体例を考察すれば良い．

以下では，$\theta\colon S(F)\to\mathbb{C}^{\times}$ を深度 0 の正則指標としてとる．このとき，対応する正則超尖点表現 $\pi_{(S,\theta)}$ は，Deligne–Lusztig 表現 $R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta)$ のコンパクト誘導として実現される．Deligne–Lusztig 表現 $R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta)$ は有限簡約群 $\mathbb{G}(\mathbb{F}_q)=\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{F}_q)$ の表現であるが，「Lusztig 双対性」と呼ばれる操作によって，ここから $\widehat{\mathbb{G}}=\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_q)$ の半単純元 s を定めることができる．ここで決定的に重要となるのが，ϕ と s の関係を記述する Lust–Stevens による結果（[LS20]）である．これは大雑把に言えば，ϕ の既約分解の様子が s の特性多項式の情報で記述できることを主張するものである．もし

正則指標 θ を，対応する s が正則半単純元となるようにとれば，その特性多項式は既約多項式になるので，Lust–Stevens の結果から ϕ の既約性が従う．

以上を整理すると，上述の S の選び方の下で，

- q および n を，S についての Henniart の不等式が成り立つようにとり，
- θ を深度 0 の正則指標であって，付随する Deligne–Lusztig 表現の Lusztig 双対が正則半単純になるようにとれば，

定理 4.2 の仮定が全て満たされる (S, θ) の例が得られることが分かる．

謝辞

この度，RIMS 研究集会「代数的整数論とその周辺 2023」での講演の機会を与えてくださったオーガナイザーの千田雅隆先生，三枝洋一先生，甲斐亘先生に感謝いたします．

参考文献

[Art13] J. Arthur, *The endoscopic classification of representations: Orthogonal and symplectic groups*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 61, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

[AS09] J. D. Adler and L. Spice, *Supercuspidal characters of reductive p-adic groups*, Amer. J. Math. **131** (2009), no. 4, 1137–1210.

[BH11] C. J. Bushnell and G. Henniart, *The essentially tame Jacquet-Langlands correspondence for inner forms of* $\mathrm{GL}(n)$, Pure Appl. Math. Q. **7** (2011), no. 3, Special Issue: In honor of Jacques Tits, 469–538.

[BK93] C. J. Bushnell and P. C. Kutzko, *The admissible dual of* $\mathrm{GL}(N)$ *via compact open subgroups*, Annals of Mathematics Studies, vol. 129, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[CO23] C. Chan and M. Oi, *Characterization of supercuspidal representations and very regular elements*, preprint, `arXiv:2301.09812`, 2023.

[DKV84] P. Deligne, D. Kazhdan, and M.-F. Vignéras, *Représentations des algèbres centrales simples p-adiques*, Representations of reductive groups over a local field, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984, pp. 33–117.

[DS18] S. DeBacker and L. Spice, *Stability of character sums for positive-depth, supercuspidal representations*, J. Reine Angew. Math. **742** (2018), 47–78.

[Hen92] G. Henniart, *Correspondance de Langlands-Kazhdan explicite dans le cas non ramifié*, Math. Nachr. **158** (1992), 7–26.

[Hen93] ———, *Correspondance de Jacquet-Langlands explicite. I. Le cas modéré de degré* *premier*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1990–91, Progr. Math., vol. 108, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993, pp. 85–114.

[How77] R. E. Howe, *Tamely ramified supercuspidal representations of* Gl_n, Pacific J. Math. **73** (1977), no. 2, 437–460.

[Kal19] T. Kaletha, *Regular supercuspidal representations*, J. Amer. Math. Soc. **32** (2019), no. 4, 1071–1170.

[Kal23] ______, *Representations of reductive groups over local fields*, ICM—International Congress of Mathematicians. Vol. IV. Sections 5–8, EMS Press, Berlin, 2023, pp. 2948–2975.

[LS20] J. Lust and S. Stevens, *On depth zero L-packets for classical groups*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **121** (2020), no. 5, 1083–1120.

[Mie20] Y. Mieda, *Arthur's classification and its applications*, Algebraic number theory and related topics 2016, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, vol. B77, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2020, pp. 75–126.

[MR18] C. Mœglin and D. Renard, *Sur les paquets d'Arthur des groupes classiques et unitaires non quasi-déployés*, Relative aspects in representation theory, Langlands functoriality and automorphic forms, Lecture Notes in Math., vol. 2221, Springer, Cham, 2018, pp. 341–361.

[Oi23] 大井 雅雄, 超尖点表現の Harish-Chandra 指標による特徴付け, RIMS 講究録「表現論とその周辺分野における最近の進展 2023」.

[Rog83] J. D. Rogawski, *Representations of* $\mathrm{GL}(n)$ *and division algebras over a p-adic field*, Duke Math. J. **50** (1983), no. 1, 161–196.

[Spi08] L. Spice, *Topological Jordan decompositions*, J. Algebra **319** (2008), no. 8, 3141–3163.

[Spi18] ______, *Explicit asymptotic expansions for tame supercuspidal characters*, Compos. Math. **154** (2018), no. 11, 2305–2378.

[Spi21] ______, *Explicit asymptotic expansions in p-adic harmonic analysis II*, preprint, `arXiv:2108.12935`, 2021.

[Yu01] J.-K. Yu, *Construction of tame supercuspidal representations*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 3, 579–622.