Screw 関数のゼータ関数への応用 [1]

東京工業大学 理学院 数学系　鈴木正俊 (Suzuki, Masatoshi)
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

1. はじめに

講演でお話した [6] および [7] の内容 (の一部) は, それぞれ [8] および [9] で解説した. ここで同じような解説を繰り返しても益はないと思われるので, 本論では [7] と同じ理論から得られる [5] の結果を解説し, [7] との関係を述べることとする.

2. Li's criterion

論文 [5] の結果は, Riemann 予想に対する規準の一つである Li の規準に関するものである. Riemann 予想は Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の非自明零点に関する予想であるが, Riemann ξ-関数

$$\xi(s) := \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s).$$

を用いると若干簡単に述べられる. $\xi(s)$ は整関数である.

Riemann 予想 (RH)　$\xi(\rho)=0$ ならば $\Re(\rho)=1/2$.

Li の規準は, Li 係数と呼ばれる正整数 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$\lambda_n := \sum_{\rho}\left[1-\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^n\right] \tag{2.1}$$

で定められる数列により述べられる. ここで ρ は $\zeta(s)$ の非自明零点, 即ち $\xi(s)$ の零点, を重複度を込めて渡り, 和は

$$\sum_{\rho} := \lim_{T\to\infty}\sum_{|\Im(\rho)|\leqslant T}$$

により定められるものとする. 関数等式 $\xi(1-s)=\xi(s)$, $\overline{\xi(\bar{s})}=\xi(s)$ から ρ が $\xi(s)$ の零点ならば $1-\rho$, $\bar{\rho}$, $1-\bar{\rho}$ もそうである. 特に任意の λ_n は実数である.

Li 係数という名称は, λ_n が次のベキ級数展開の係数になるところから来ている:

$$\frac{1}{(1-w)^2}\frac{\xi'}{\xi}\left(\frac{1}{1-w}\right) = \lambda_1 + \lambda_2 w + \sum_{n=2}^{\infty}\lambda_{n+1}w^n. \tag{2.2}$$

ここで変数変換

$$s = \frac{1}{1-w}$$

は s 平面の右半平面 $\Re(s) \geqslant 1/2$ を w 平面の単位円板に写す一次変換で, $s=1 \ \mapsto\ w=0$, $\Re(s)=1/2 \ \mapsto\ |w|=1$. したがってベキ級数 (2.2) が $|w|<1$ で収束することは RH の必要十分条件になっている. つまり λ_n の適当なオーダー評価が RH と同値になる. しかし, Li は λ_n のオーダー評価ではなく, 非負性が RH と同値なことを発見した.

Li's criterion　RH は全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\lambda_n \geqslant 0$ であることと同値.

[1] この研究は基盤研究 (C)（研究代表者：鈴木正俊, 研究課題番号：17K05163, 23K03050）の助成を受けています.

RH が $\lambda_n \geqslant 0$ を導くことは, (2.1) の表示と, 零点の複素共役に関する対称性, および $\Re(s) = 1/2$ ならば $|1 - 1/s| = 1$ であることに注意すれば直ちに分かる.

逆に, もしすべての λ_n が非負ならば, Vivanti-Pringsheim の定理により, ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{n+1} w^n$ は収束半径を $R (\leqslant 1)$ としたとき $w = R$ に特異点を持つ. このとき (2.2) から, $\xi'(s)/\xi(s)$ は $s = 1/(1-R) \in (1, \infty]$ に特異点を持つことになる. しかし, $\xi'(s)/\xi(s)$ は $(1, \infty)$ 上で正則なことが知られているので, $R = 1$ でなければ矛盾が生ずる. 先に注意したように, $R = 1$ は RH を意味する. (この議論は Li の原論文のものではなく, 筆者の早稲田大学での講演の際, 鈴木雄太氏によって指摘されたものである.)

3. Complements by Bombieri–Lagarias

Li の規準以前 (そしておそらく今も), Riemann 予想へ取り組むヒントとして最も有力視されていたのは, 解析数論における Weil の明示公式と Selberg 跡公式の類似と, Weil が彼の有限体上の代数曲線のゼータ関数の Riemann 予想の証明に基いて定式化した, Weil 分布の非負性であったと思われる. Bombieri と Lagarias [1] は, Li 係数の非負性が Weil 分布の非負性から従うことを示した. Fourier 変換を

$$\widehat{f}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{izx}\, dx$$

と表すと, Weil 分布 $W : C_c^{\infty}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ は

$$W(f) := \sum_{\rho} \widehat{f}(\rho)$$

で定められる線形汎関数である. 和の意味は (2.1) と同一. $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ の位相は本論の解説では必要ないので省略する (例えば [8, §1.2] をみよ). さらに

$$\widetilde{f}(x) := \overline{f(-x)}, \qquad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y)\, dy$$

と定める. このとき次が知られている.

Weil's criterion RH は全ての $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ に対し $W(f * \widetilde{f}) \geqslant 0$ であることと同値.

吉田 [10] はテスト関数 $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ を偶関数または奇関数に限っても, Weil の規準が成り立つことを示した. Bombieri–Lagarias は

$$g_n(x) := \begin{cases} e^{-x/2} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-x)^{j-1}}{(j-1)!} & \text{if } x > 0, \\ n/2 & \text{if } x = 0, \\ 0 & \text{if } x < 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

と定めると,

$$2\lambda_n = W(g_n * \widetilde{g_n}) \tag{3.2}$$

が成り立つことを示した. この g_n は $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ に属さないので $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ の元による近似を考える必要はあるが, そういう細かいことを除けば, Weil 分布の非負性から λ_n の非負性が従う. この結果を Weil の規準の観点から見ると, 非加算無限個の f に対して確認する必要があった非負性 $W(f * \widetilde{f}) \geqslant 0$ は, Li の規準によって特定の加算無限個の f に対して確認すれば十分なことが示されたことになる.

さらに, 彼らは Weil の明示公式

$$W(f) = \widehat{f}(i/2) + \widehat{f}(-i/2) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} (f(\log n) + f(-\log n))$$
$$- (\log 4\pi + C_0) f(0) - \int_0^{\infty} \left\{ f(x) + f(-x) - 2e^{-x/2} f(0) \right\} \frac{e^{x/2} dx}{e^x - e^{-x}}$$

を用いて, Li 係数の明示式

$$\lambda_n = -\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \eta_{j-1} + 1 - (\log 4\pi + C_0) \frac{n}{2} - \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} (1 - 2^{-j}) \zeta(j) \tag{3.3}$$

を示した. ここで C_0 は Euler-Mascheroni 定数. η_j は $s = 1$ での Laurent 展開

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j (s-1)^j \tag{3.4}$$

の係数で, より明示的には次のように書ける.

$$\eta_j = \frac{(-1)^j}{j!} \lim_{x \to \infty} \left\{ \sum_{m \leqslant x} \frac{\Lambda(m)(\log m)^j}{m} - \frac{1}{j+1} (\log x)^{j+1} \right\}.$$

このような Li 係数の解釈は, Bombieri [2] の Weil 分布の非負性が RH を導くことの別証明や, Lagarias [4] による保型 L 関数に対する Li 係数の研究に応用された. いっぽう, Bombieri–Lagarias は $\xi(s)$ の零点集合を同等の対称性をもつより一般の集合でおきかえても, Li の規準の類似が成り立つことを初等的な議論により示している.

さて, 等式 (3.2) は無条件に成り立ち, Li 係数 λ_n の非負性は Weil 分布の非負性と等価である. この状況において, テスト関数 $g_n(x)$ は RH の情報を持っていない. これに対し [5] の主結果は, λ_n とノルムが等しいことが RH の必要十分条件となるような $L^2(\mathbb{R})$ の関数族を与えるものである. この場合は Li 係数との等式が非自明であり, それが成り立てば正値性は自動的に従う.

4. Results

まず Laurent 展開 (3.4) の係数を用いて, 各正整数 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, 変数 s の関数を

$$\begin{aligned} H_n(s) := \frac{\xi(s)}{\xi(s) + \xi'(s)} \Bigg\{ &\frac{1}{s-1} + \left[1 - \left(1 - \frac{1}{s} \right)^n \right] \left(\frac{\xi'}{\xi}(s) - \frac{1}{s-1} - \frac{\xi'}{\xi}(0) - 1 \right) \\ &- \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-1)^{j-1}}{s^j} \sum_{k=1}^{j-1} \Big[(-1)^k \eta_k + (1 - 2^{-k-1}) \zeta(k+1) \Big] s^k \Bigg\} \end{aligned} \tag{4.1}$$

により定める. $n = 1$ の場合, 右辺の 2 行目は 0 と解釈する. さらに, 変数 z の関数を

$$G_n(z) := H_n \left(\frac{1}{2} - iz \right) \tag{4.2}$$

により定める. このとき次が成り立つ.

命題 1. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $G_n(z)$ を実軸上に制限し $z \in \mathbb{R}$ の関数と見たとき, それは有界かつ実解析的で, しかも $L^2(\mathbb{R})$ に属す.

この命題によって実軸上で $G_n(z)$ の L^2-ノルムを考えることができる．このノルムが Li 係数と次のように関係する．

定理 1. $G_n(z)$ を正整数 n に対して, (4.1) と (4.2) で定まる実軸上の関数とする．このとき, RH と等式

$$\lambda_n = \frac{1}{2\pi}\|G_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \tag{4.3}$$

が任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ について成り立つことは同値である．

等式 (4.3) が成り立てば Li 係数の非負性が得られる．したがって Li の規準により, 等式 (4.3) から RH が従う．つまり, 非自明なのは RH を仮定すれば等式 (4.3) が成り立つことである．

等式 (4.3) を RH を証明するのに用いるのは難しいかもしれないが, Li 係数と G_n は明示的に与えられているので, もし等式 (4.3) が成り立たない n を見つけることができれば, それは RH の反証になる．

5. Outline of the proof

以下では RH を仮定すれば等式 (4.3) が成り立つことを示す．まず $\mathcal{Z}$ で $\xi(s)$ の零点全体の集合を表し, $\rho \in \mathcal{Z}$ の重複度を m_ρ で表す．このとき, Weil の明示公式を用いて次が示される．

命題 2. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$H_n(s) = \frac{1}{\xi(s)+\xi'(s)} \sum_{\rho\in\mathcal{Z}} m_\rho \left[1-\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^n\right] \frac{\xi(s)}{s-\rho}, \quad s \in \mathbb{C}$$

が成り立つ．(最初に RH を仮定したが, この命題の証明には必要ない.)

いま $\rho \in \mathcal{Z}$ に対し

$$F_\rho(z) := \frac{1}{\xi(s)+\xi'(s)}\sqrt{\frac{m_\rho}{\pi}}\frac{\xi(s)}{s-\rho}, \quad s = \frac{1}{2} - iz \tag{5.1}$$

と定めると, これらが $L^2(\mathbb{R})$ に属すことが無条件に言える．このとき, RH から等式 (4.3) を導く議論において最も本質的なのが次の命題である．証明には de Branges 空間の理論を用いる．

命題 3. RH を仮定すると $\{F_\rho(z)\}_{\rho\in\mathcal{Z}}$ は $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交系を成す．

等式 (4.3) を示そう．命題 2 から

$$G_n(z) = \sum_{\rho\in\mathcal{Z}} \sqrt{\pi m_\rho}\left[1-\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^n\right] F_\rho(z). \tag{5.2}$$

ここで $\Re(\rho) = 1/2$ ならば

$$\left(1-\frac{1}{\bar\rho}\right) = \left(1-\frac{1}{\rho}\right)^{-1}$$

であることに注意すると,

$$\begin{aligned}\left|1-\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^n\right|^2 &= \left[1-\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^n\right]\left[1-\left(1-\frac{1}{\bar\rho}\right)^n\right] \\ &= \left[1-\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^n\right] + \left[1-\left(1-\frac{1}{\bar\rho}\right)^n\right]\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって命題 3 と (2.1) から

$$\begin{aligned}\|G_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \pi\sum_{\rho\in\mathcal{Z}} m_\rho \left\{\left[1-\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^n\right]+\left[1-\left(1-\frac{1}{\bar{\rho}}\right)^n\right]\right\} \\ &= 2\pi\lambda_n.\end{aligned}$$

このようにして RH から等式 (4.3) が従う． □

6. 論文 [7] との関連

H^2 を $L^2(0,\infty)$ の元 f の Fourier 変換 $\widehat{f}$ 全体が成す Hilbert 空間とする．H^2 は $L^2(\mathbb{R})$ の真の閉部分空間である．上半平面 $\{\Im(z)>0\}$ 上で定義された有界な正則関数 $\Theta(z)$ で, $\Theta(x)=\lim_{y\to 0+}\Theta(x+iy)$ がほとんどすべての $x\in\mathbb{R}$ に対して定義され, $|\Theta(x)|=1$ を満たすものを inner function という．$\Theta(z)$ が inner function のとき, ΘH^2 を $\Theta(x)\widehat{f}(x)$ ($\widehat{f}\in H^2$) 全体が成す集合とすると, ΘH^2 は H^2 の閉部分空間を成す．したがって H^2 における ΘH^2 の 直交補空間

$$\mathcal{K}(\Theta) := H^2 \ominus \Theta H^2$$

が定義される．これを Θ で生成されるモデル部分空間とよぶ．

RH を仮定すると, [3, Theorem 1] により

$$\Theta_\xi(z) := \frac{\xi(s)-\xi'(s)}{\xi(s)+\xi'(s)}, \quad s=\frac{1}{2}-iz$$

は inner function であることが分かり, モデル部分空間 $\mathcal{K}(\Theta_\xi)$ が定義される．このとき, (5.1) の $\{F_\rho\}_{\rho\in\mathcal{Z}}$ は $\mathcal{K}(\Theta_\xi)$ の正規直交基底になる．(証明は, Θ_ξ が有理型なことから $\mathcal{K}(\Theta_\xi)$ とある de Branges 空間の同型を作り, de Branges 空間の一般論を用いて行う.) (5.2) の右辺は $L^2(\mathbb{R})$ で収束するので, (4.2) の G_n たちは $\mathcal{K}(\Theta_\xi)$ に属す.

いっぽう [7] では, $f\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ に対して (5.2) のような和により

$$\mathcal{P}_f(z) := \sum_{\rho=1/2-i\gamma\in\mathcal{Z}} \sqrt{\pi m_\rho}\,\widehat{f}(\gamma)F_\rho(z) \tag{6.1}$$

と定め, $C_c^\infty(\mathbb{R})$ のノルム

$$\|f\|_0 := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\|\mathcal{P}_f\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

に関する完備化 $\mathcal{H}_0$ を導入した．このように $\mathcal{H}_0$ を定めるだけなら RH は不要である．[7] の主結果は, RH が成り立つことと

$$\|f\|_0^2 = W(f*\widetilde{f}), \quad \forall f\in C_c^\infty(\mathbb{R}) \tag{6.2}$$

が同値であること, および RH の下で, $\mathcal{H}_0$ と $\mathcal{K}(\Theta_\xi)$ が Hilbert 空間として等長同型だという主張だった．この (6.2) は (4.3) と本質的に同じものであり, 証明の筋道もほぼ同様である．[7] の執筆時には気付いていなかったが, Li 係数と Weil 分布の関係と同じ理由で, 等式 (6.2) は (3.1) の $g_n(x)$ たちに対して確かめれば十分である．$g_n(x)$ たちは $C_c^\infty(\mathbb{R})$ の元でないが, $\mathcal{H}_0$ には無条件で属し, $\mathcal{H}_0$ 上に延長された $\mathcal{P}$ により

$$\mathcal{P}_{g_n} = G_n$$

が成り立つからである．こういった意味で, [5] と [7] は相補的なものと言えよう．

7. 考えられる問題

ゼータ関数の零点の研究にモデル部分空間や de Branges 空間の理論を利用するという方針は甚だ萌芽的段階なので, 色々な問題が考えられる. 最後に, 著者の備忘と読者への出題を兼ねて, 幾つかの問題を箇条書きにしておくことにする.

(1) [5, 7] では Riemann ゼータ関数の場合のみを扱っているが, Dedekind ゼータ関数をはじめとする保型 L 関数に拡張することが可能であろう. そのような一般化には記法の煩わしさや計算の複雑化以上の本質的障害があるだろうか?

(2) $\mathcal{K}(\Theta_\xi)$ において (4.2) の $\{G_n\}_{n\geqslant 1}$ が張る部分空間は稠密か?

(3) 小さな n について等式 (4.3) を無条件に証明できるか? 例えば $n=1$ の場合,

$$\lambda_1 = -\frac{\xi'}{\xi}(0) = \sum_\rho \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}C_0 + 1 - \frac{1}{2}\log 4\pi = 0.0230957+, \tag{7.1}$$

$$H_1(s) = \frac{\xi(s)}{s(\xi(s)+\xi'(s))}\left(\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} - \frac{\xi'}{\xi}(0)\right) \tag{7.2}$$

だが, $\lambda_1 = (2\pi)^{-1}\|G_1\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$ を RH を仮定せずに証明できるか?

(4) RH を仮定せずに $\{F_\rho\}_{\rho\in\mathcal{Z}}$ たちの直交性をどの程度まで言えるか?

(5) RH を仮定したとき, F_ρ たちの直交性を de Branges 空間の理論を用いずに直接証明できるか?

(6) RH を仮定しないとき, (4.3) を不等式に変えれば証明できるか?

少なくともこれらの問題に対して筆者はアイディアを持っていない.

8. 謝辞

講演の機会を与えてくださいました研究代表者の千田 雅隆氏およびプログラム委員の三枝 洋一氏, 甲斐 亘氏にこの場を借りて感謝申し上げます.

References

[1] E. Bombieri, J. C. Lagarias, Complements to Li's criterion for the Riemann hypothesis, *J. Number Theory* **77** (1999), no. 2, 274–287.

[2] E. Bombieri, Remarks on Weil's quadratic functional in the theory of prime numbers. I, *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.* **11** (2000), no. 3, 183–233 (2001).

[3] J. C. Lagarias, Hilbert spaces of entire functions and Dirichlet L-functions, *Frontiers in number theory, physics, and geometry. I*, 365–377, *Springer, Berlin*, 2006.

[4] J. C. Lagarias, Li coefficients for automorphic L-functions, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **57** (2007), no. 5, 1689–1740.

[5] M. Suzuki, Li coefficients as norms of functions in a model space, *J. Number Theory* **252** (2023), 177–194..

[6] M. Suzuki, Aspects of the screw function corresponding to the Riemann zeta-function, *J. Lond. Math. Soc.* **108** (2023), no.4, 1448–1487.

[7] M. Suzuki, On the Hilbert space derived from the Weil distribution, `https://arxiv.org/abs/2301.00421`.

[8] M. Suzuki, On the screw function of the Riemann zeta function, 数理解析研究所講究録 No.2259 解析的整数論とその周辺 (2023), 115–122

[9] M. Suzuki, On the Hilbert space defined as the completion of Weil's hermitian form, 数理解析研究所講究録 解析的整数論とその周辺 (2024), 掲載予定.

[10] H. Yoshida, On Hermitian forms attached to zeta functions, *Zeta functions in geometry (Tokyo, 1990)*, 281–325, Adv. Stud. Pure Math., 21, *Kinokuniya, Tokyo*, 1992.