On ℓ-adic Galois analogue of polylogarithm functional equations

大阪大学大学院理学研究科数学専攻　白石 伝助
Densuke Shiraishi
Department of Mathematics, Graduate School of Science
Osaka University

1　序

本稿に関する研究の背景について述べる．1 つ以上の有理基点付き 3 点抜き射影直線の幾何的エタール基本亜群には, 基礎体の絶対 Galois 群が自然に作用する．基礎体が数体の場合, Belyi の定理より, この Galois 作用は忠実であり, その作用の様子は Galois アソシエーター (もしくは伊原アソシエーター) と呼ばれる非可換 1 コサイクルにより記述される．よって, Galois アソシエーターの振る舞いを調べることが数体の絶対 Galois 群の構造を詳細に記述するという観点から問題となるが, この問題を究明するために, 1980 年代に V. Drinfeld や伊原康隆により, Grothendieck–Teichmuller 理論が創始された．これは Drinfeld による KZ 微分方程式の理論の Galois 側（エタール類似物）に相当する．

Galois アソシエーターの挙動を解析するために, しばしば組合せ副有限群論の手法が用いられる．1980 年代末頃に, 伊原康隆や G. W. Anderson によりベータ関数 (やガンマ関数) のエタール類似物が導入され, その数論的な性質が Anderson，Coleman，伊原-金子-行成らにより解明された．これは, 3 点抜き射影直線上の $(0, 1)$ 実区間に沿った道に付随する Galois アソシエーター (Drinfeld アソシエーターのエタール類似物) を, 副有限 Fox 自由微分を通じて 2 変数のベキ級数と捉えることで定義される．また, その ℓ 進 Taylor 係数は本質的に ℓ 進 Soule 指標と呼ばれる絶対 Galois 群上の関数で記述される．ℓ 進 Soule 指標は Riemann ゼータ値の ℓ 進エタール類似物であり高次 ℓ 円単数の数論と密接に関係する．

そのような背景の下, 本稿の主役である ℓ 進 Galois ポリログは, 任意の素数 ℓ に対して, 従来の複素ポリログの ℓ 進エタール類似物として, 1999 年頃に Z. Wojtkowiak により導入された, 絶対 Galois 群上の ℓ 進特殊関数である．この関数は, 中村博昭と Wojtkowiak により導入された一般化 ℓ 進 Soule 指標と呼ぶべき関数（ℓ 進 Galois ポリログ指標）で記述され, 3 点抜き射影直線上の標準的な接基点 $\overrightarrow{01}$ を有理点 z に結ぶ道に付随する Galois アソシエーターの ℓ 進 Magnus 展開係数（所謂, ℓ 進反復積分）として定義される．これは従来の複素ポリログが 3 点抜き Riemann 球面上の道に沿った複素反復積分の母関数である KZ アソシエーター（i.e., KZ 微分方程式の基本解）における適切な項の係数であることの ℓ 進エタール類似である．さて, Galois アソシエーターの振る舞いを理解するために, その ℓ 進 Magnus 展開係数である ℓ 進 Galois ポリログの関数としての性質 (関数等式など) を調べることが問題となる．

本稿では, ℓ 進 Galois ポリログの関数等式について議論する．元来, 複素ポリログの関数等式に関する研究は, L. Euler に始まる 250 年以上の長い歴史があり, L. Lewin の著作 [Le81] に見られるように数多くの関数等式が知られている．一方, ℓ 進 Galois ポリログの関数等式に関しては, 中村博昭-Wojtkowiak の先行研究によりいくつかの典型的な関数等式が証明されていたが, そのリストの追加が課題とされていた．筆者は, 中村-Wojtkowiak の先行研究を踏襲し, 未解明であった ℓ 進 Galois トリログの Landen 型 3 項関数等式と Spence-Kummer 型 9 項関数等式を導出した．本稿では, [NS22](arXiv:2210.17182, 中村博昭との共同研究）と [Sh23](arXiv:2307.09414) に基づき, それらの結果を報告する．

謝辞

「代数的整数論とその周辺 2023」プログラム委員の千田雅隆先生, 三枝洋一先生, 甲斐亘先生に心より感謝申し上げます. また, 本稿の内容となる研究を遂行するにあたって, 数多くのご助言やコメントを指導教員の中村博昭先生にいただきました. この場をお借りして深く感謝申し上げます.

2 複素ポリログと ℓ 進 Galois ポリログ

この章では, 複素ポリログと ℓ 進 Galois ポリログの類似に着目しつつ, 両者の基本事項を述べる.

2.1 複素多重ポリログと複素 KZ アソシエーター

この節では [D90], [F04], [F16], [NW12] に基づき, KZ 微分方程式の理論の観点から複素多重ポリログの復習をする. まず記号の準備を行う. 連結な位相多様体 $V(\mathbb{C})$ および $V(\mathbb{C})$ 上の 2 つの基点 $b, *$ に対して, b を $*$ に結ぶ $V(\mathbb{C})$ 上の道の (端点を固定するホモトープによる) ホモトピー類のなす集合を $\pi_1^{\mathrm{top}}(V(\mathbb{C}); b, *)$ とする. さらに, $\gamma_1 \in \pi_1^{\mathrm{top}}(V(\mathbb{C}); b, *)$ と $\gamma_2 \in \pi_1^{\mathrm{top}}(V(\mathbb{C}); *, *')$ に対して, 道の合成 $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \in \pi_1^{\mathrm{top}}(V(\mathbb{C}); b, *')$ を左側の道 γ_1 から順に合成するものと定める.

3 点抜き Riemann 球面上の接基点 $\overrightarrow{01}$ を z に結ぶ道のホモトピー類 $\gamma \in \pi_1^{\mathrm{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\}; \overrightarrow{01}, z\right)$ に対して, $\omega := \frac{dt}{t}e_0 + \frac{dt}{t-1}e_1$ とし, γ に沿った複素反復積分の母関数 (Chen's formal power series)

$$G_{\overrightarrow{01}}^{z;\gamma}(e_0, e_1) := \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \int_\gamma \underbrace{\omega \ldots \omega}_{k \text{ times}}\right)^{\mathrm{op}} \in \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle \tag{1}$$

を考える. 非可換冪級数 $G_{\overrightarrow{01}}^{z;\gamma}(e_0, e_1)$ は形式的 KZ (Knizhnik-Zamolodchikov) 方程式と呼ばれる微分方程式と密接に関係する. 形式的 KZ 方程式とは $z = 0, 1, \infty$ を確定特異点に持つ Fuchs 型微分方程式

$$\frac{d}{dz}G = \left(\frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1}\right)G \tag{2}$$

であり, ただし G はある複素領域上の $\mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$ に値を持つ複素解析関数を表す. このとき, $G_{\overrightarrow{01}}^{z;\gamma}(e_0, e_1)$ は z に関する漸近挙動

$$G_{\overrightarrow{01}}^{z;\gamma}(e_0, e_1) \approx \mathbf{exp}(\log(z;\gamma) \cdot e_0) \quad (z \to 0)$$

で特徴付けられる KZ 方程式の基本解になっている. ここで, $\mathbf{exp}(\log(z;\gamma) \cdot e_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log^k(z;\gamma)}{k!} e_0^k$ であり, 対数関数 $\log(z;\gamma)$ を道 γ に依存する形で $\log(z;\gamma) := \int_{\delta_{\overrightarrow{10}}^{-1}\cdot\gamma} \frac{dt}{t}$ と定めている. なお, 道 $\delta_{\overrightarrow{10}} \in \pi_1^{\mathrm{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\}; \overrightarrow{01}, \overrightarrow{10}\right)$ は所謂 dch ("droit chemin") と呼ばれる道であり, 1 元集合からの自然な埋め込み $\pi_1^{\mathrm{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{R})\backslash\{0,1,\infty\}; \overrightarrow{01}, \overrightarrow{10}\right) \hookrightarrow \pi_1^{\mathrm{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\}; \overrightarrow{01}, \overrightarrow{10}\right)$ の像として定義される.

非可換冪級数 $G_{\overrightarrow{01}}^{z;\gamma}(e_0, e_1) \in \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$ を道 $\gamma \in \pi_1^{\mathrm{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\}; \overrightarrow{01}, z\right)$ に付随する KZ アソシエーターという. また, 各 $\gamma \in \pi_1^{\mathrm{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\}; \overrightarrow{01}, z\right)$ に対して

$$\gamma' := \delta_{\overrightarrow{10}} \cdot \phi_{\overrightarrow{10}}(\gamma) \in \pi_1^{\mathrm{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\}; \overrightarrow{01}, 1-z\right) \tag{3}$$

と定める. ただし, $\phi_{\overrightarrow{10}} \in \mathrm{Aut}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\}\right)$ は $\phi_{\overrightarrow{10}}(t) = 1 - t$ で決まる自己同型である. ここで, $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{N}^d$ に対して, 複素数 $Li_{\mathbf{k}}(z;\gamma)$ を以下の複素反復積分で定める.

$$Li_{\mathbf{k}}(z;\gamma) := \begin{cases} \int_\gamma \frac{1}{t} Li_{k_1,\cdots,k_d-1}(t;\gamma_t)\,dt & k_d \neq 1, \\ \int_\gamma \frac{1}{1-t} Li_{k_1,\cdots,k_{d-1}}(t;\gamma_t)\,dt & k_d = 1, \end{cases} \tag{4}$$

$$Li_1(z;\gamma) := -\log(1-z;\gamma') = \int_\gamma \frac{dt}{1-t}. \tag{5}$$

このとき, $G_{\overrightarrow{01}}^{z,\gamma}(e_0,e_1)\in\mathbb{C}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$ が以下のように展開されることが定義から確かめられる.

$$\begin{aligned}(6)\qquad G_{\overrightarrow{01}}^{z,\gamma}(e_0,e_1)=&1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log^k(z;\gamma)}{k!}e_0^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log^k(1-z;\gamma')}{k!}e_1^k-\sum_{k=2}^{\infty}Li_k(z;\gamma)e_0^{k-1}e_1\\&+\sum_{d=2}^{\infty}(-1)^d\sum_{\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_d)\in(\mathbb{Z}_{>1})^d}Li_{\mathbf{k}}(z;\gamma)e_0^{k_d-1}e_1\cdots e_0^{k_1-1}e_0+\cdots.\end{aligned}$$

複素数 $Li_{\mathbf{k}}(z;\gamma)$ および $\log(z;\gamma)$ は道のホモトピー類 $\gamma\in\pi_1^{\mathrm{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\};\overrightarrow{01},z\right)$ の取り方に依存することに注意する. こうして得られる写像

$$Li_{\mathbf{k}}(z):\pi_1^{\mathrm{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\};\overrightarrow{01},z\right)\to\mathbb{C},\quad \gamma\mapsto Li_{\mathbf{k}}(z;\gamma)$$

を指数 $\mathbf{k}$ の複素多重ポリログという. 特に, 指数 $\mathbf{k}$ の多重ゼータ値を以下で定義する.

$$(7)\qquad \zeta(\mathbf{k}):=Li_{\mathbf{k}}\left(\overrightarrow{10};\delta_{\overrightarrow{10}}\right)\in\mathbb{R}.$$

多重ゼータは本来ある種の級数 (cf. [Ka90]) で定義されていたものであるが, 以上のような複素反復積分による多重ゼータの捉え方は Drinfeld や Kontsevich らによって発見された見方である. なお, 道 dch (i.e., $\delta_{\overrightarrow{10}}\in\pi_1^{\mathrm{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\};\overrightarrow{01},\overrightarrow{10}\right)$) に付随する KZ アソシエーター

$$\Phi_{\mathrm{KZ}}(e_0,e_1):=G_{\overrightarrow{01}}^{\overrightarrow{10},\delta_{\overrightarrow{10}}}(e_0,e_1)\in\mathbb{C}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$$

は Drinfeld アソシエーターと呼ばれ, 多重ゼータ値の最良の母関数として認知されている [F11], [Ka90].

Remark 1. 組 $\left(2\pi\sqrt{-1},\Phi_{\mathrm{KZ}}\right)$ はアソシエーター関係式と呼ばれる一連の関係式群を満たしており, Drinfeld により導入された $\mathbb{C}$ 上の Grothendieck–Teichmuller トーサー $M(\mathbb{C})$ の元を定める.

$$\left(2\pi\sqrt{-1},\Phi_{\mathrm{KZ}}\right)\in M(\mathbb{C}):=\left\{(\mu,\varphi)\;\middle|\;\begin{array}{l}\mu\in\mathbb{C}^{\times}\text{かつ}\varphi\in\mathbb{C}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle\text{は群的であり,}\\ \text{組}(\mu,\varphi)\text{はアソシエーター関係式を満たす}\\ \text{(cf. [D90], [F16]).}\end{array}\right\}.$$

集合 $M(\mathbb{C})$ には自然に副代数多様体の構造が入る.

Remark 2. $G_{\overrightarrow{01}}^{z,\gamma}(e_0,e_1)\in\mathbb{C}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$ の各係数は $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathbb{Q}\left[\{Li_{\mathbf{k}}(z;\gamma)\}_{\mathbf{k}},\log(z;\gamma)\right]$ の元であることが [F04], [LM96], [N23] により証明されており, その明示公式が与えられている. 低次の項の係数の様子は以下の通りである.

$$\begin{aligned}(8)\qquad G_{\overrightarrow{01}}^{z,\gamma}(e_0,e_1)=&1+\log(z;\gamma)e_0+\log(1-z;\gamma')e_1+\frac{\log^2(z;\gamma)}{2}e_0^2-Li_2(z;\gamma)e_0e_1\\&+\Big(Li_2(z;\gamma)+\log(z;\gamma)\log(1-z;\gamma')\Big)e_1e_0+\frac{\log^2(1-z;\gamma')}{2}{e_1}^2+\frac{\log^3(z;\gamma)}{6}e_1^3\\&-Li_3(z;\gamma)e_0^2e_1+\Big(2Li_3(z;\gamma)-\log(z;\gamma)Li_2(z;\gamma)\Big)e_0e_1e_0+Li_{1,2}(z;\gamma)e_0e_1^2\\&-\left(Li_3(z;\gamma)-\log(z;\gamma)Li_2(z;\gamma)-\frac{\log^2(z;\gamma)\log(1-z;\gamma')}{2}\right)e_1e_0^2\\&+Li_{2,1}(z;\gamma)e_1e_0e_1-\left(Li_{1,2}(z;\gamma)+Li_{2,1}(z;\gamma)-\frac{\log(z;\gamma)\log^2(1-z;\gamma')}{2}\right)e_1^2e_0\\&+\frac{\log^3(1-z;\gamma')}{6}e_1^3+\cdots(\text{高次項}).\end{aligned}$$

2.2 ℓ 進 Galois 多重ポリログと ℓ 進 Galois アソシエーター

この節では, [W04], [W05], [NW99], [NW12], [NW20], [F07] に基づき ℓ 進 Galois ポリログの定義と基本事項を復習する. ℓ を素数とし, K を複素数体 $\mathbb{C}$ の部分体とする. また, $\overline{K}$ を $\mathbb{C}$ における K の代数

閉包とし, $G_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ を $\overline{K}$ を基点とする K の絶対 Galois 群とする.

V を $\overline{K}$ 上の代数多様体とし, b と $*$ を V の K 有理基点とする. このとき, 絶対 Galois 群 G_K が V 上の b を $*$ に結ぶ副 ℓ エタール道のなす副 ℓ 有限集合 $\pi_1^{\ell\text{-ét}}(V;b,*)$ に自然に作用する.

$$G_K \to \mathrm{Aut}\left(\pi_1^{\ell\text{-ét}}(V;b,*)\right), \quad \sigma \mapsto [\gamma \mapsto s_b(\sigma)\cdot\gamma\cdot s_*(\sigma)^{-1}].$$

ただし, $s_* : G_K \to \pi_1^{\ell\text{-ét}}(V,*)$ は K 有理基点 $*$ から π_1 の関手性により生じる自然な準同型を表している. ここで, 固定したエタール道 $\gamma \in \pi_1^{\ell\text{-ét}}(V;b,*)$ に対して, 上述の Galois 作用を記述する幾何的副 ℓ エタール基本群 $\pi_1^{\ell\text{-ét}}(V,b)$ に値を持つ G_K の非可換 1 コサイクル

$$\mathfrak{f}^{*,\gamma} : G_K \to \pi_1^{\ell\text{-ét}}(V,b), \quad \sigma \mapsto \mathfrak{f}_\sigma^{*,\gamma} := \gamma\cdot\sigma(\gamma)^{-1}$$

を考える. $\mathfrak{f}^{*,\gamma}$ を道 γ に付随する ℓ 進 Galois アソシエーターという.

以下では主に $V = \mathbb{P}^1_{\overline{K}}\backslash\{0,1,\infty\}$ かつ $b = \overrightarrow{01}$ の場合を考える. ここで, $\pi_1^{\ell\text{-ét}}\left(\mathbb{P}^1_{\overline{K}}\backslash\{0,1,\infty\},\overrightarrow{01}\right)$ は階数 2 の自由副 ℓ 群 $F_2^{(\ell)}$ であり, 0 と 1 の周りをそれぞれ反時計回りに 1 周する $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\}$ 上のループに対応する組 (l_0,l_1) を位相的生成系として持つ. さて, z を $\mathbb{P}^1_{\overline{K}}\backslash\{0,1,\infty\}$ の K 有理基点とし, $\gamma \in \pi_1^{\mathrm{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\};\overrightarrow{01},z\right)$ とする. 包含写像 $\overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$ から誘導される比較写像

$$\pi_1^{\mathrm{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\};\overrightarrow{01},z\right) \to \pi_1^{\ell\text{-ét}}\left(\mathbb{P}^1_{\overline{K}}\backslash\{0,1,\infty\};\overrightarrow{01},z\right)$$

により $\gamma \in \pi_1^{\ell\text{-ét}}\left(\mathbb{P}^1_{\overline{K}}\backslash\{0,1,\infty\};\overrightarrow{01},z\right)$ と見なす. $\sigma \in G_K$ に対する $\mathfrak{f}_\sigma^{z,\gamma} \in \pi_1^{\ell\text{-ét}}\left(\mathbb{P}^1_{\overline{K}}\backslash\{0,1,\infty\},\overrightarrow{01}\right)$ の挙動を見やすくするために, $l_0 \mapsto \mathbf{exp}(e_0) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}e_0^n$, $l_1 \mapsto \mathbf{exp}(e_1)$ かつ乗法的に定めた写像

$$\pi_1^{\ell\text{-ét}}\left(\mathbb{P}^1_{\overline{K}}\backslash\{0,1,\infty\},\overrightarrow{01}\right) \hookrightarrow \mathbb{Q}_\ell\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$$

を考える. これを ℓ 進 Magnus 埋め込みという. これによる $\mathfrak{f}_\sigma^{z,\gamma}$ の像を取ることにより非可換冪級数

$$\mathfrak{f}_\sigma^{z,\gamma}(e_0,e_1) \in \mathbb{Q}_\ell\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle \tag{9}$$

を得る. $\mathfrak{f}_\sigma^{z,\gamma}(e_0,e_1)$ は $\gamma \in \pi_1^{\mathrm{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\};\overrightarrow{01},z\right)$ に付随する KZ アソシエーター $G_{\overrightarrow{01}}^{z,\gamma}(e_0,e_1) \in \mathbb{C}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$ の ℓ 進エタール類似物であり,

$$\Phi_\sigma^\ell(e_0,e_1) := \mathfrak{f}_\sigma^{\overrightarrow{10},\delta_{\overrightarrow{10}}}(e_0,e_1) \in \mathbb{Q}_\ell\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$$

は Drinfeld アソシエーター $\Phi_{\mathrm{KZ}}(e_0,e_1) \in \mathbb{C}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$ の ℓ 進エタール類似物である. ここで, $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_d) \in \mathbb{N}^d$ に対して,

$$Li_{\mathbf{k}}^\ell(z;\gamma,\sigma) := (-1)^d\cdot\mathrm{Coeff}_{e_0^{k_d-1}e_1\cdots e_0^{k_1-1}e_1}\left(\mathfrak{f}_\sigma^{z,\gamma}(e_0,e_1)\right), \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{k}}^\ell(\sigma) := Li_k^\ell\left(\overrightarrow{10};\delta_{\overrightarrow{10}},\sigma\right). \tag{11}$$

と定める. ℓ 進数 $Li_{\mathbf{k}}^\ell(z;\gamma,\sigma)$ は道 γ の取り方に依存する. こうして得られる写像

$$Li_{\mathbf{k}}^\ell(z) : \pi_1^{\mathrm{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\};\overrightarrow{01},z\right)\times G_K \to \mathbb{Q}_\ell, \quad (\gamma,\sigma)\mapsto Li_{\mathbf{k}}^\ell(z;\gamma,\sigma),$$
$$\boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{k}}^\ell : G_K \to \mathbb{Q}_\ell, \quad \sigma \mapsto \boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{k}}^\ell(\sigma)$$

を, それぞれ指数 $\mathbf{k}$ の ℓ 進 Galois 多重ポリログおよび指数 $\mathbf{k}$ の ℓ 進 Galois 多重ゼータ値 (または ℓ 進多重 Soule 元) という. ℓ 進 Galois ポリログと複素ポリログの類似をまとめると表 1の通りになる. ℓ 進 Galois ゼータ値 $\boldsymbol{\zeta}_k^\ell$ の基本的な性質の一つとして, これは ℓ 進 Soule 指標 $\kappa_k^{(\ell)} : G_K \to \mathbb{Z}_\ell$ (cf. [I90]) や ℓ 進円分指標 $\chi_\ell : G_K \to \mathbb{Z}_\ell^\times$ を用いて以下のように記述される. 任意の $\sigma \in G_K$ に対して,

$$\boldsymbol{\zeta}_k^\ell(\sigma) = \begin{cases} \dfrac{\kappa_k^{(\ell)}(\sigma)}{(1-\ell^{k-1})\cdot(k-1)!} & (k : \text{奇数}), \\ \dfrac{1}{2\cdot k!}B_k\left(1-\chi_\ell(\sigma)^k\right) & (k : \text{偶数}) \end{cases}$$

が成り立つ. ただし, B_n は $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}T^n=\frac{T}{\mathbf{exp}(T)-1}$ で定まる n 次 Bernoulli 数である

次に, 中村博昭-Wojtkowiak([NW99]) により導入された一般化 ℓ 進 Soule 指標 (i.e., ℓ 進 Soule 指標のポリログ版) を導入しておく. 各 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して, $\zeta_n:=\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}\right)\in\overline{K}$ と定め, $z^{1/n}$ を固定した道 $\gamma\in\pi_1^{\mathrm{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\};\overrightarrow{01},z\right)$ に沿った z の n 冪根とする. このとき, 各 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して ℓ 進整数 $\tilde{\chi}_k^{z,\gamma}(\sigma)\in\mathbb{Z}_\ell$ を以下の Kummer property で定める.

$$\zeta_{\ell^n}^{\tilde{\chi}_k^{z,\gamma}(\sigma)}=\sigma\left(\prod_{i=0}^{\ell^n-1}(1-\zeta_{\ell^n}^{\chi_\ell(\sigma)^{-1}i}z^{1/\ell^n})^{\frac{i^{k-1}}{\ell^n}}\right)\Bigg/\prod_{i=0}^{\ell^n-1}(1-\zeta_{\ell^n}^{i+\rho_{z,\gamma}(\sigma)}z^{1/\ell^n})^{\frac{i^{k-1}}{\ell^n}}.$$

ただし, $\rho_{z,\gamma}:G_K\to\mathbb{Z}_\ell$ は γ に沿った z の ℓ 冪根に関する Kummer 1-コサイクル $\sigma(z^{1/\ell^n})=z^{1/\ell^n}\cdot\zeta_{\ell^n}^{\rho_{z,\gamma}(\sigma)}$ である. こうして得られる

$$\tilde{\chi}_k^{z,\gamma}:G_K\to\mathbb{Z}_\ell \tag{12}$$

を一般化 ℓ 進 Soule 指標 (もしくは ℓ 進 Galois ポリログ指標) と呼ぶ. 特に, 任意の $k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して, $\tilde{\chi}_k^{\overrightarrow{10},\delta_{\overrightarrow{10}}}$ は以下のように ℓ 進 Soule 指標 $\kappa_k^{(\ell)}$ を用いて記述される.

$$\tilde{\chi}_k^{\overrightarrow{10},\delta_{\overrightarrow{10}}}(\sigma)=\frac{1}{1-\ell^{k-1}}\kappa_k^{(\ell)}(\sigma)\quad(\sigma\in G_K).$$

また, ℓ 進 Galois ポリログ $Li_k^\ell(z)$ は一般化 ℓ 進 Soule 指標 $\tilde{\chi}_k^{z,\gamma}$ を用いて以下のように記述される.

$$Li_k^\ell\,(z;\gamma,\sigma)=(-1)^{k+1}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{\rho_{z,\gamma}(\sigma)^m}{m!}\frac{\tilde{\chi}_{k-m}^{z,\gamma}(\sigma)}{(k-1-m)!}\quad(\sigma\in G_K). \tag{13}$$

さらに, ℓ 進 Galois アソシエーター $\mathfrak{f}_\sigma^{z,\gamma}(e_0,e_1)\in\mathbb{Q}_\ell\langle\langle X,Y\rangle\rangle$ は以下のように展開される.

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}_\sigma^{z,\gamma}(e_0,e_1)=1&+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\rho_{z,\gamma}(\sigma))^k}{k!}e_0^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma))^k}{k!}e_1^k\\&-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\tilde{\chi}_k^{z,\gamma}(\sigma)}{(k-1)!}e_1e_0^{k-1}-\sum_{k=2}^{\infty}Li_k^\ell(z;\gamma,\sigma)\cdot e_0^{k-1}e_1\\&+\sum_{d=2}^{\infty}(-1)^d\sum_{\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_d)\in(\mathbb{Z}_{\geq 1})^d}Li_{\mathbf{k}}^\ell(z;\gamma)e_0^{k_d-1}e_1\cdots e_0^{k_1-1}e_1+\cdots\;(\sigma\in G_K).\end{aligned} \tag{14}$$

Remark 3. 任意の $\sigma\in G_K$ に対して, 組 $(\chi_\sigma(\sigma),\mathfrak{f}_\sigma^{\overrightarrow{10},\delta_{\overrightarrow{10}}})$ および $(\chi_\sigma(\sigma),\Phi_\sigma^\ell)$ はアソシエーター関係式と呼ばれる一連の関係式群を満たしており, それぞれ副 ℓ Grothendieck–Teichmuller 群 GT_ℓ および $\mathbb{Q}_\ell$ 上の Grothendieck–Teichmuller 群 $\mathrm{GT}(\mathbb{Q}_\ell)$ の元を定める.

$$(\chi_\ell(\sigma),\mathfrak{f}_\sigma^{\overrightarrow{10},\delta_{\overrightarrow{10}}})\in\mathrm{GT}_\ell:=\left\{(\lambda,\mathfrak{f})\;\middle|\;\begin{array}{l}\lambda\in\mathbb{Z}_\ell^\times\text{かつ}\,\mathfrak{f}\in\left[F_2^{(\ell)},F_2^{(\ell)}\right]\text{であり,}\\ \text{組}\,(\lambda,\mathfrak{f})\,\text{はアソシエーター関係式を満たす}\\ \text{(cf. [F16], [I90]).}\end{array}\right\}^\times.$$

$$(\chi_\sigma(\sigma),\Phi_\sigma^\ell)\in\mathrm{GT}(\mathbb{Q}_\ell):=\left\{(\mu,\varphi)\;\middle|\;\begin{array}{l}\mu\in\mathbb{Q}_\ell^\times\text{かつ}\varphi\in\mathbb{Q}_\ell\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle\,\text{は群的であり,}\\ \text{組}\,(\mu,\varphi)\,\text{はアソシエーター関係式を満たす}\\ \text{(cf. [F16], [I90]).}\end{array}\right\}^\times.$$

集合 GT_ℓ および $\mathrm{GT}(\mathbb{Q}_\ell)$ には 2 項演算が適切に定義され, GT_ℓ に自然な副 ℓ 群の構造, $\mathrm{GT}(\mathbb{Q}_\ell)$ に自然な副代数群の構造が入る. このとき, 以下のような連続群準同型の列が生じている.

$$G_K\to\mathrm{GT}_\ell\hookrightarrow\mathrm{GT}(\mathbb{Q}_\ell),\quad\sigma\mapsto(\chi_\ell(\sigma),\mathfrak{f}_\sigma^{\overrightarrow{10},\delta_{\overrightarrow{10}}})\mapsto\left(\chi_\sigma(\sigma),\Phi_\sigma^\ell\right).$$

Remark 4. 複素側 $G^{z,\gamma}_{\overrightarrow{01}}(e_0,e_1)\in\mathbb{C}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$ の場合と同様, [N23] により, $\mathfrak{f}^{z,\gamma}_{\sigma}(e_0,e_1)\in\mathbb{Q}_\ell\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$ の各係数は $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathbb{Q}\left[\{Li^{\ell}_{\mathbf{k}}(z;\gamma,\sigma)\}_{\mathbf{k}},\rho_{z,\gamma}(\sigma)\right]$ の元であることが証明されており, その明示公式が与えられている. 低次の項の係数の様子は以下の通りである.

(15)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f}^{z,\gamma}_{\sigma}(e_0,e_1) &= 1-\rho_{z,\gamma}(\sigma)e_0-\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)e_1+\frac{\rho_{z,\gamma}(\sigma)^2}{2}e_0^2-Li^{\ell}_2(z;\gamma,\sigma)e_0e_1\\
&+\Big(Li^{\ell}_2(z;\gamma,\sigma)+\rho_{z,\gamma}(\sigma)\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)\Big)e_1e_0+\frac{\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)^2}{2}e_1^2-\frac{\rho_{z,\gamma}(\sigma)^2}{6}e_1^3\\
&-Li^{\ell}_3(z;\gamma,\sigma)e_0^2e_1+\Big(2Li^{\ell}_3(z;\gamma,\sigma)-\rho(z;\gamma,\sigma)Li^{\ell}_2(z;\gamma,\sigma)\Big)e_0e_1e_0+Li^{\ell}_{1,2}(z;\gamma,\sigma)e_0e_1^2\\
&-\left(Li^{\ell}_3(z;\gamma,\sigma)+\rho(z;\gamma,\sigma)Li^{\ell}_2(z;\gamma,\sigma)+\frac{\rho_{z,\gamma}(\sigma)^2\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)}{2}\right)e_1e_0^2\\
&+Li^{\ell}_{2,1}(z;\gamma,\sigma)e_1e_0e_1-\left(Li^{\ell}_{1,2}(z;\gamma,\sigma)+Li^{\ell}_{2,1}(z;\gamma,\sigma)+\frac{\rho_{z,\gamma}(\sigma)\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)^2}{2}\right)e_1^2e_0\\
&-\frac{\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)^3}{6}e_1^3+\cdots(\text{高次項})\qquad(\sigma\in G_K).
\end{aligned}$$

3 ポリログの関数等式について

元来, 古典的な複素ポリログの関数等式に関する研究は 18 世紀末頃の L. Euler [E1768] や J. Landen [L1780] の研究に端を発し, 現在に至るまでその数多くの関数等式が知られている. 本稿で扱うポリログ $Li_k(z)$ および $Li^{\ell}_k(z)$ は (Bloch-Wigner-Ramakrishnan 一価ポリログとは異なり) 多価関数であり, その枝の取り方が道のホモトピー類 γ の取り方に対応する. したがって, これらのポリログのそれぞれの関数等式は, 関数等式に現れる主要ポリログ項を定義する 3 点抜き射影直線上の道のシステムに依存するものであり, 道のシステムの取り方を変えれば破綻して (低次項が別の形の関数等式になって) しまう. その意味で, ポリログの関数等式は, 道たちの精妙な幾何学的な均衡に基づくポリログたちがなす数論幾何学的な現象の一つであると言える. さて, この章ではいくつかの先行研究を紹介する. 複素ポリログの基本的な関数等式として以下の Euler 型 2 項および Abel 型 5 項の関数等式が挙げられる.

複素ダイログの Euler 等式:

$$Li_2(z;\gamma)+Li_2(1-z;\gamma')+\log(z;\gamma)\log(1-z;\gamma')=\zeta(2).$$

複素ダイログの Abel 等式:

$$\begin{aligned}
Li_2\left(\frac{xy}{(1-x)(1-y)};\gamma_{\mathrm{i}}\right)-Li_2\left(\frac{x}{1-y};\gamma_{\mathrm{ii}}\right)-Li_2\left(\frac{y}{1-x};\gamma_{\mathrm{iii}}\right)+Li_2(x;\gamma_{\mathrm{iv}})+Li_2(y;\gamma_{\mathrm{v}})\\
=-\log(1-x;\gamma'_{\mathrm{iv}})\log(1-y;\gamma'_{\mathrm{v}}).
\end{aligned}$$

ポリログのそれぞれの関数等式は各々の背景となる幾何学を持つ. 例えば, Euler 等式は, $\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}$ の幾何学を背景に持ち, その S_3 対称性の一つ $\phi_{\overrightarrow{10}}\in\mathrm{Aut}\left(\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}\right),\phi_{\overrightarrow{10}}(t)=1-t$ から 2 つの道のシステム $\{\gamma,\gamma'\}$ と KZ アソシエーターの chain rule と呼ぶべき代数関係式

(16)
$$G^{z,\gamma}_{\overrightarrow{01}}(e_0,e_1)=G^{1-z,\gamma'}_{\overrightarrow{01}}(e_1,e_0)\cdot\Phi_{\mathrm{KZ}}(e_0,e_1)$$

が生じるが, この関係式における e_0e_1 の項を係数比較することにより証明される. 筆者はこの証明を [F16] で学んだ. 一方で, Abel 等式の背景となる幾何学は 5 標点付き射影直線のモジュライ空間 $M_{0,5}$ の幾何学である. $M_{0,5}$ は自然な 5 つの射影 $\mathrm{pr}_i:M_{0,5}\to M_{0,4}\simeq\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}$ $(i=1,\ldots,5)$ を持つが, この 5 つの射影から生じる $\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}$ 上の適切な道のシステム $\{\gamma_i\}_{i=\mathrm{i},\mathrm{ii},\ldots,\mathrm{v}}$ と KZ アソシエーターの 5 つの代数関係式 (chain rule) から Abel 等式が導出される. 後者の証明については [NW12] を参照せよ. 以上の証明は, chain rule が一旦与えられてしまえば後は積分による解析的な方法を使わない代数的な証明であるため, 証明中の KZ アソシエーターを ℓ 進 Galois アソシエーターに置き換えることで, その ℓ 進エタール類似を辿ることが出来る. そこで, 以上の関数等式の ℓ 進エタール類似を見ていく.

表 1: ℓ 進 Galois 多重ポリログと複素多重ポリログの類似

ℓ 進 Galois 側 (ℓ 進エタール版)	従来の複素側 (de Rham 版)
$z : \mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}$ の K 有理基点	$z : \mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}$ の $\mathbb{C}$ 有理基点
エタール基本亜群への ℓ 進 Galois 表現	形式的 KZ 微分方程式
$\mathfrak{f}_\sigma^{z,\gamma}(e_0,e_1) \in \mathbb{Q}_\ell\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$, $(\gamma,\sigma) \in \pi_1^{\mathrm{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\};\overrightarrow{01},z\right) \times G_K$	$G_{\overrightarrow{01}}^{z,\gamma}(e_0,e_1) \in \mathbb{C}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$, $\gamma \in \pi_1^{\mathrm{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\};\overrightarrow{01},z\right)$
$\Phi_\sigma^\ell(e_0,e_1) \in \mathbb{Q}_\ell\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$	$\Phi_{\mathrm{KZ}}(e_0,e_1) \in \mathbb{C}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$
$Li_{\mathbf{k}}^\ell(z;\gamma,\sigma) \in \mathbb{Q}_\ell$	$Li_{\mathbf{k}}(z;\gamma) \in \mathbb{C}$
$\boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{k}}^\ell(\sigma) \in \mathbb{Q}_\ell$	$\zeta(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}$
$\tilde{\chi}_k^{z,\gamma}(\sigma) \in \mathbb{Z}_\ell$	$-(k-1)! \cdot \mathrm{Coeff}_{e_0^{k-1}e_1}\left(G_{\overrightarrow{01}}^{z,\gamma}(e_0,e_1)^{\mathrm{op}}\right) \in \mathbb{C}$
$Li_1^\ell(z;\gamma,\sigma) = \rho_{1-z,\gamma'}(\sigma) \in \mathbb{Z}_\ell$	$Li_1(z;\gamma) = -\log(1-z;\gamma') \in \mathbb{C}$
$\boldsymbol{\zeta}_{2k}^\ell(\sigma) = -\dfrac{B_{2k}}{2\cdot(2k!)}\left(\chi_\ell(\sigma)^{2k}-1\right)$	$\zeta(2k) = -\dfrac{B_{2k}}{2\cdot(2k!)}\left(2\pi\sqrt{-1}\right)^{2k}$
$\mathfrak{f}_\sigma^{z,\gamma}(e_0,e_1) = \mathfrak{f}_\sigma^{1-z,\gamma'}(e_1,e_0)\cdot\Phi_\sigma^\ell(e_0,e_1)$	$G_{\overrightarrow{01}}^{z,\gamma}(e_0,e_1) = G_{\overrightarrow{01}}^{1-z,\gamma'}(e_1,e_0)\cdot\Phi_{\mathrm{KZ}}(e_0,e_1)$
$\mathfrak{f}_\sigma^{\frac{z}{z-1},\gamma''}(e_0,e_1) = \mathfrak{f}_\sigma^{z,\gamma}(e_0,e_\infty)\cdot\mathbf{exp}\left(\frac{1-\chi(\sigma)}{2}e_0\right)$, $e_\infty := \mathbf{log}(\mathbf{exp}(-e_1)\mathbf{exp}(-e_0))$	$G_{\overrightarrow{01}}^{\frac{z}{z-1},\gamma''}(e_0,e_1) = G_{\overrightarrow{01}}^{z,\gamma}(e_0,e_\infty)\cdot\mathbf{exp}\left(\pi\sqrt{-1}\cdot e_0\right)$, $e_\infty = -e_1 - e_0$
GT_ℓ, $\quad \mathrm{GT}(\mathbb{Q}_\ell)$	$M(\mathbb{C})$
ℓ 進 Galois 周期 $\quad \chi_\ell(\sigma) \in \mathbb{Z}_\ell$	複素周期 $\quad 2\pi\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$

表 2: 関数等式とその背景幾何学

ℓ 進 Galois 側 (ℓ 進エタール版)	従来の複素側 (de Rham 版)	背景となる幾何学
$Li_2^{\ell}(z;\gamma,\sigma)+Li_2^{\ell}(1-z;\gamma',\sigma)+\rho_{z,\gamma}(\sigma)\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)=\zeta_2^{\ell}(\sigma)$ Nakamura-Wojtkowiak [NW12]	$Li_2(z;\gamma)+Li_2(1-z;\gamma')+\log(z;\gamma)\log(1-z;\gamma')=\zeta(2)$ Euler [E1768]	$\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}\simeq M_{0,4}$ の S_3 対称性
$Li_2^{\ell}\left(\frac{xy}{(1-x)(1-y)};\gamma_{\mathrm{i}},\sigma\right)-Li_2^{\ell}\left(\frac{x}{1-y};\gamma_{\mathrm{ii}},\sigma\right)-Li_2^{\ell}\left(\frac{y}{1-x};\gamma_{\mathrm{iii}},\sigma\right)$ $+Li_2^{\ell}(x;\gamma_{\mathrm{iv}},\sigma)+Li_2^{\ell}(y;\gamma_{\mathrm{v}},\sigma)=-\rho_{1-x;\gamma'_{\mathrm{iv}}}(\sigma)\rho_{1-y;\gamma'_{\mathrm{v}}}(\sigma)$ Nakamura-Wojtkowiak [NW12]	$Li_2\left(\frac{xy}{(1-x)(1-y)};\gamma_{\mathrm{i}}\right)-Li_2\left(\frac{x}{1-y};\gamma_{\mathrm{ii}}\right)-Li_2\left(\frac{y}{1-x};\gamma_{\mathrm{iii}}\right)$ $+Li_2(x;\gamma_{\mathrm{iv}})+Li_2(y;\gamma_{\mathrm{v}})=-\log(1-x;\gamma'_{\mathrm{iv}})\log(1-y;\gamma'_{\mathrm{v}})$ Abel [A1881]	自然な 5 つの射影 $\mathrm{pr}_i: M_{0,5}\to M_{0,4}$ $(i=1,\ldots,5)$
$Li_3^{\ell}(z;\gamma,\sigma)+Li_3^{\ell}(1-z;\gamma',\sigma)+Li_3^{\ell}\left(\frac{z}{z-1};\gamma'',\sigma\right)-\boldsymbol{\zeta}_3^{\ell}(\sigma)$ $=-\boldsymbol{\zeta}_2^{\ell}(\sigma)\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)+\frac{1}{2}\rho_{z,\gamma}(\sigma)\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)^2-\frac{1}{6}\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)^3$ $-\frac{1}{2}Li_2^{\ell}(z;\gamma,\sigma)-\frac{1}{12}\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)-\frac{1}{4}\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)^2$ Nakamura-S. [NS22]	$Li_3(z;\gamma)+Li_3(1-z;\gamma')+Li_3\left(\frac{z}{z-1};\gamma''\right)-\zeta(3)$ $=\zeta(2)\log(1-z;\gamma')-\frac{1}{2}\log(z,\gamma)\log^2(1-z;\gamma')+\frac{1}{6}\log^3(1-z;\gamma')$ Landen [L1780] (Nakamura-S. [NS22]: アソシエーターによる別証明)	$\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}\simeq M_{0,4}$ の S_3 対称性
$Li_3^{\ell}\left(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2};\gamma_1,\sigma\right)+Li_3^{\ell}(xy;\gamma_2,\sigma)+Li_3^{\ell}\left(\frac{x}{y};\gamma_3,\sigma\right)$ $-2Li_3^{\ell}\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)};\gamma_4,\sigma\right)-2Li_3^{\ell}\left(\frac{x(1-y)}{x-1};\gamma_5,\sigma\right)-2Li_3^{\ell}\left(\frac{1-y}{1-x};\gamma_6,\sigma\right)$ $-2Li_3^{\ell}\left(\frac{1-y}{y(x-1)};\gamma_7,\sigma\right)-2Li_3^{\ell}(x;\gamma_8,\sigma)-2Li_3^{\ell}(y;\gamma_9,\sigma)+2\boldsymbol{\zeta}_3^{\ell}(\sigma)$ $=-\rho_{y,\gamma_9}(\sigma)^2\rho_{\frac{1-y}{1-x},\gamma_6}(\sigma)+2\boldsymbol{\zeta}_2^{\ell}(\sigma)\rho_{y,\gamma_9}(\sigma)+\frac{1}{3}\rho_{y,\gamma_9}(\sigma)^3$ $-Li_2^{\ell}\left(\frac{x(1-y)}{x-1};\gamma_5,\sigma\right)-Li_2^{\ell}\left(\frac{1-y}{y(x-1)};\gamma_7,\sigma\right)+\frac{1}{2}\rho_{\frac{1-xy}{1-x},\gamma'_5}(\sigma)-\frac{1}{3}\rho_{y,\gamma_9}(\sigma)$ S. [Sh23]	$Li_3\left(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2};\gamma_1\right)+Li_3(xy;\gamma_2)+Li_3\left(\frac{x}{y};\gamma_3\right)$ $-2Li_3\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)};\gamma_4\right)-2Li_3\left(\frac{x(1-y)}{x-1};\gamma_5\right)-2Li_3\left(\frac{1-y}{1-x};\gamma_6\right)$ $-2Li_3\left(\frac{1-y}{y(x-1)};\gamma_7\right)-2Li_3(x;\gamma_8)-2Li_3(y;\gamma_9)+2\zeta(3)$ $=\log^2(y;\gamma_9)\log\left(\frac{1-y}{1-x};\gamma_6\right)-\frac{\pi^2}{3}\log(y;\gamma_9)-\frac{1}{3}\log^3(y;\gamma_9)$ Spence [Sp1809], Kummer [K1840] (S. [Sh23]: アソシエーターによる別証明)	non-fano 配置の補空間 $V_{\text{non-fano}}$ に付随する射 $f_i: V_{\text{non-fano}}\to M_{0,4}$ $(i=1,\ldots,9)$

ℓ 進 Galois ポリログの関数等式は, 最初に中村博昭-Wojtkowiak の共同研究 [NW12],[NW20] により体系的に研究され, その典型的なものがいくつか得られていた（Euler 等式, Abel 等式, inversion 公式, distribution 公式）. 中村-Wojtkowiak の先行研究では, ℓ 進 Galois ポリログの関数等式を導出するための複素の場合と同様の tensor-homotopy 基準 (関数等式が成立するための代数的-基本群論的な十分条件) および具体的な計算アルゴリズムが与えられている. 彼等が証明した Euler 等式や Abel 等式の ℓ 進エタール類似は以下の通りであり, 表 2 のように従来の複素の場合と項同士が一対一に対応している.

ℓ 進 Galois ダイログの Euler 等式:

$$Li_2^{\ell}(z;\gamma,\sigma)+Li_2^{\ell}(1-z;\gamma',\sigma)+\rho_{z,\gamma}(\sigma)\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)=\zeta_2^{\ell}(\sigma)\quad(\sigma\in G_K).$$

ℓ 進 Galois ダイログの Abel 等式:

$$\begin{aligned}Li_2^{\ell}\left(\frac{xy}{(1-x)(1-y)};\gamma_{\mathrm{i}},\sigma\right)-Li_2^{\ell}\left(\frac{x}{1-y};\gamma_{\mathrm{ii}},\sigma\right)-Li_2^{\ell}\left(\frac{y}{1-x};\gamma_{\mathrm{iii}},\sigma\right)+Li_2^{\ell}(x;\gamma_{\mathrm{iv}},\sigma)\\ +Li_2^{\ell}(y;\gamma_{\mathrm{v}},\sigma)=-\rho_{1-x;\gamma'_{\mathrm{iv}}}(\sigma)\rho_{1-y;\gamma'_{\mathrm{v}}}(\sigma)\quad(\sigma\in G_K).\end{aligned}$$

これらの ℓ 進 Galois ダイログの関数等式の証明は複素の場合と同様である. つまり前々段落で説明した複素の場合の証明において複素 KZ アソシエーターを ℓ 進 Galois アソシエーターに置き換えることで, ℓ 進 Galois 側の証明がパラレルに得られる. なお, その際, 複素 KZ アソシエーターの関係式 $G_{\overrightarrow{01}}^{z,\gamma}(e_0,e_1)=G_{\overrightarrow{01}}^{1-z,\gamma'}(e_1,e_0)\cdot\Phi_{\mathrm{KZ}}(e_0,e_1)$ は以下の ℓ 進 Galois アソシエーターの関係式に置き換わる.

$$\mathfrak{f}_{\sigma}^{z,\gamma}(e_0,e_1)=\mathfrak{f}_{\sigma}^{1-z,\gamma'}(e_1,e_0)\cdot\Phi_{\sigma}^{\ell}(e_0,e_1)\quad(\sigma\in G_K).$$

4　主定理とその証明の概要

トリログ $Li_3(z)$ の Landen 型 3 項関数等式と Spence-Kummer 型 9 項関数等式の ℓ 進エタール類似を紹介することが本稿の目的であった. それらを紹介する. 本章でも ℓ を素数とし, K を複素数体 $\mathbb{C}$ の部分体とする. また, $\overline{K}$ を $\mathbb{C}$ における K の代数閉包とし, $G_K:=\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ を K の絶対 Galois 群とする. また, 3 点抜き射影直線上の標準的な接基点 $*\in\left\{\overrightarrow{10},\overrightarrow{0\infty},\overrightarrow{\infty0}\right\}$ に対して, $\delta_*\in\pi_1^{\mathrm{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\};\overrightarrow{01},*\right)$ を上半平面を通る道として定める. 道 δ_* はホモトピー類として一意的に定まることに注意する.

4.1　Landen 型 3 項関数等式の ℓ 進エタール類似

Landen 型 3 項関数等式の背景となる幾何学は $\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}$ の持つ S_3 対称性である. そこで, Landen 型 3 項関数等式を導出するために, $\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}$ の次の 2 つの対称性に着目する.

$$\phi_{\overrightarrow{10}},\phi_{\overrightarrow{0\infty}}\in\mathrm{Aut}\left(\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}\right),\quad\phi_{\overrightarrow{10}}(t)=1-t,\quad\phi_{\overrightarrow{0\infty}}(t)=\frac{t}{t-1}.$$

このとき, 各 $\gamma\in\pi_1^{\mathrm{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\};\overrightarrow{01},z\right)$ に対して, 2 つの γ', γ'' を以下のように定める.

$$\gamma':=\delta_{\overrightarrow{10}}\cdot\phi_{\overrightarrow{10}}(\gamma)\in\pi_1^{\mathrm{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\};\overrightarrow{01},1-z\right),\tag{17}$$

$$\gamma'':=\delta_{\overrightarrow{0\infty}}\cdot\phi_{\overrightarrow{0\infty}}(\gamma)\in\pi_1^{\mathrm{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\};\overrightarrow{01},\frac{z}{z-1}\right).\tag{18}$$

Theorem 4.1 (ℓ 進 Galois トリログの Landen 型 3 項関数等式, [NS22])**.** *z を $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\}$ の K 有理基点とし, $\gamma\in\pi_1^{\mathrm{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\};\overrightarrow{01},z\right)$ とする. さらに, γ' および γ'' を (17) および (18) の通りに定める. このとき, 任意の $\sigma\in G_K$ に対して, 以下の等式が成り立つ.*

ℓ 進 Galois トリログの Landen 等式:

$$\begin{aligned}
&Li_3^{\ell}(z;\gamma,\sigma)+Li_3^{\ell}\left(1-z;\gamma',\sigma\right)+Li_3^{\ell}\left(\frac{z}{z-1};\gamma'',\sigma\right)\\
&=\boldsymbol{\zeta}_3^{\ell}(\sigma)-\boldsymbol{\zeta}_2^{\ell}(\sigma)\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)+\frac{1}{2}\rho_{z,\gamma}(\sigma)\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)^2-\frac{1}{6}\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)^3\\
&\quad-\frac{1}{2}Li_2^{\ell}(z;\gamma,\sigma)-\frac{1}{12}\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)-\frac{1}{4}\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)^2.
\end{aligned}$$

Corollary 4.2 (ℓ 進 Galois ポリログ指標の Landen 型 3 項関数等式, [NS22])**.** 記号や仮定は *Theorem 4.1*と同様とする. このとき, 任意の $\sigma\in G_K$ に対して, 以下の等式が成り立つ.

一般化 ℓ 進 Soule 指標の Landen 等式:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\chi}_3^{z,\gamma}(\sigma)+\tilde{\chi}_3^{1-z,\gamma'}(\sigma)+\tilde{\chi}_3^{\frac{z}{z-1},\gamma''}(\sigma)\\
&=\tilde{\chi}_3^{\overrightarrow{10},\delta_{\overrightarrow{10}}}(\sigma)+\chi(\sigma)\tilde{\chi}_2^{z,\gamma}(\sigma)+\rho_{z,\gamma}(\sigma)\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)^2-\frac{\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)}{12}\left(\chi(\sigma)^2-1\right)\\
&\quad-\frac{\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)}{6}\Big(\chi(\sigma)-\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)\Big)\Big(\chi(\sigma)-2\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)\Big).
\end{aligned}$$

証明の概略を述べる. 証明の鍵となるのは対称性 $\phi_{\overrightarrow{10}},\phi_{\overrightarrow{0\infty}}\in\mathrm{Aut}\left(\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}\right)$ から生じる以下の ℓ 進 Galois アソシエーターの代数関係式 (chain rule) である.

$$\mathfrak{f}_\sigma^{z,\gamma}(e_0,e_1)=\mathfrak{f}_\sigma^{1-z,\gamma'}(e_1,e_0)\cdot\Phi_\sigma^{\ell}(e_0,e_1). \tag{19}$$

$$\mathfrak{f}_\sigma^{\frac{z}{z-1},\gamma''}(e_0,e_1)=\mathfrak{f}_\sigma^{z,\gamma}(e_0,e_\infty)\cdot\mathbf{exp}\left(\frac{1-\chi(\sigma)}{2}e_0\right). \tag{20}$$

これらの関係式における両辺の係数比較を行うことにより, 係数たちの関係式が得られる. その係数たちの中には ℓ 進 Galois 多重ポリログの項がいくつか現れる. その ℓ 進 Galois 多重ポリログの項を消去するように, 係数たちのいくつかの関係式と Shuffle 関係式を組み合わせることにより, Theorem 4.1の ℓ 進 Galois トリログの Landen 等式が証明される. さらに (13) を用いて ℓ 進 Galois トリログを ℓ 進 Galois トリログ指標に書き換えることで, Corollary 4.2の一般化 ℓ 進 Soule 指標の Landen 等式が証明される.

Remark 5. 表 2 のように上で紹介した ℓ 進 Galois トリログの Landen 等式には 1 つのダイログ項を含む ℓ 進 Galois 特有の項が 3 つ $-\frac{1}{2}Li_2^{\ell}(z;\gamma,\sigma)-\frac{1}{12}\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)-\frac{1}{4}\rho_{1-z,\gamma'}(\sigma)^2$ 現れている. この ℓ 進 Galois 特有の項は, 中村-Wojtkowiak[NW12] により ℓ 進 error term と命名されているものであり, ℓ 進 Galois アソシエーターに内在する非線形性 (Baker-Campbell-Hausdorff 和 $e_\infty=\mathbf{log}(\mathbf{exp}(-e_1)\mathbf{exp}(-e_0))$ の高次項) に起因するものである. 先行研究では具体的な関数等式において ℓ 進 error term に高次項 (ダイログ項) が現れる現象は確認されておらず, 本研究 [NS22] でそうした非自明な現象が初めて確認された.

4.2 Spence-Kummer 型 9 項関数等式の ℓ 進エタール類似

次に Spence-Kummer 型 9 項関数等式について議論する. Spence-Kummer 型 9 項トリログ関数等式の背景となる幾何学 は, non-Fano 配置の補空間

$$V_{\text{non-Fano}}:=\mathrm{Spec}\left(\overline{K}\left[s_1,s_2,\frac{1}{s_1s_2(1-s_1)(1-s_2)(s_1-s_2)(1-s_1s_2)}\right]\right) \tag{21}$$

の持つ対称性である. $V_{\text{non-Fano}}$ の対称性により, $V_{\text{non-Fano}}$ には以下の 9 つの well-defined な射の族 $\{f_i\}_{i=1,\ldots,9}$ $\left(\text{ただし } f_i:V_{\text{non-Fano}}\to\mathbb{P}^1_{\overline{K}}\backslash\{0,1,\infty\}\right)$ が付随している.

$$\begin{aligned}
&f_1(s_1,s_2):=\frac{s_1(1-s_2)^2}{s_2(1-s_1)^2}, && f_2(s_1,s_2):=s_1s_2, && f_3(s_1,s_2):=\frac{s_1}{s_2},\\
&f_4(s_1,s_2):=\frac{s_1(1-s_2)}{s_2(1-s_1)}, && f_5(s_1,s_2):=\frac{s_1(1-s_2)}{s_1-1}, && f_6(s_1,s_2):=\frac{1-s_2}{1-s_1},\\
&f_7(s_1,s_2):=\frac{1-s_2}{s_2(s_1-1)}, && f_8(s_1,s_2):=s_1, && f_9(s_1,s_2):=s_2.
\end{aligned} \tag{22}$$

我々は $V_{\text{non-Fano}}$ の基点として, $V_{\text{non-Fano}}$ の $K(t)$ 有理点 (t^2,t) の上にある K 有理接基点

$$\vec{v} : \mathrm{Spec}\left(K((t))\right) \to V_{\text{non-Fano}} \tag{23}$$

を採用する．各 $f_i(\vec{v})$ $(i=1,\ldots,9)$ は表 3のように $\mathbb{P}^1_K \backslash \{0,1,\infty\}$ の標準的な K 有理接基点と [N02, §5.9] の意味で Galois 同値 $\approx$ であり，この Galois 同値により両者を同一視する．このとき，各 $\gamma_0 \in \pi_1^{\text{top}}(V^{\text{an}}_{\text{non-Fano}}; \vec{v}, (x,y))$ に対して, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\}$ 上の 9 つの道からなるシステム $\{\gamma_i\}_{i=1,\ldots,9}$ を

$$\gamma_i := \delta_i \cdot f_i^{\text{an}}(\gamma_0) \in \pi_1^{\text{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\}; \overrightarrow{01}, f_i^{\text{an}}(x,y)\right) \tag{24}$$

で定める．ここで, $\delta_i \in \pi_1^{\text{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\}; \overrightarrow{01}, f_i^{\text{an}}(\vec{v})\right)$ は表 3のように決めている．

表 3: $\delta_1,\ldots,\delta_9$

i	$f_i(x,y)$	$f_i(t^2,t)$	$f_i(\vec{v})$	$\delta_i \in \pi_1^{\text{top}}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\}; \overrightarrow{01}, f_i^{\text{an}}(\vec{v})\right)$
1	$\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}$	$\frac{t}{(1+t)^2}$	$\overrightarrow{01} \approx f_1(\vec{v})$	$\delta_1 := 1$ (= 自明な道)
2	xy	t^3	$\overrightarrow{01} \approx f_2(\vec{v})$	$\delta_2 := 1$
3	$\frac{x}{y}$	t	$\overrightarrow{01} = f_3(\vec{v})$	$\delta_3 := 1$
4	$\frac{x(1-y)}{y(1-x)}$	$\frac{t}{1+t}$	$\overrightarrow{01} \approx f_4(\vec{v})$	$\delta_4 := 1$
5	$\frac{x(1-y)}{x-1}$	$\frac{-t^2}{1+t}$	$\overrightarrow{0\infty} \approx f_5(\vec{v})$	$\delta_5 := \delta_{\overrightarrow{0\infty}}$
6	$\frac{1-y}{1-x}$	$\frac{1}{1+t}$	$\overrightarrow{10} \approx f_6(\vec{v})$	$\delta_6 := \delta_{\overrightarrow{10}}$
7	$\frac{1-y}{y(x-1)}$	$\frac{-1}{t(1+t)}$	$\overrightarrow{\infty 0} \approx f_7(\vec{v})$	$\delta_7 := \delta_{\overrightarrow{\infty 0}}$
8	x	t^2	$\overrightarrow{01} \approx f_8(\vec{v})$	$\delta_8 := 1$
9	y	t	$\overrightarrow{01} = f_9(\vec{v})$	$\delta_9 := 1$

Theorem 4.3 (ℓ 進 Galois トリログの Spence-Kummer 型 9 項関数等式, [Sh23])**.** (x,y) を $V_{\text{non-Fano}}$ の K 有理基点とし, $\gamma_0 \in \pi_1^{\text{top}}(V^{\text{an}}_{\text{non-Fano}}; \vec{v}, (x,y))$ とする．$\{\gamma_i\}_{i=1,\ldots,9}$ を *(24)* の通りに定める．このとき, 任意の $\sigma \in G_K$ に対して, 次の等式が成り立つ.

ℓ 進 Galois トリログの Spence-Kummer 等式:

$$\begin{aligned}
&Li_3^\ell\left(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2};\gamma_1,\sigma\right) + Li_3^\ell(xy;\gamma_2,\sigma) + Li_3^\ell\left(\frac{x}{y};\gamma_3,\sigma\right) - 2Li_3^\ell\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)};\gamma_4,\sigma\right)\\
&- 2Li_3^\ell\left(\frac{x(1-y)}{x-1};\gamma_5,\sigma\right) - 2Li_3^\ell\left(\frac{1-y}{1-x};\gamma_6,\sigma\right) - 2Li_3^\ell\left(\frac{1-y}{y(x-1)};\gamma_7,\sigma\right) - 2Li_3^\ell(x;\gamma_8,\sigma)\\
&- 2Li_3^\ell(y;\gamma_9,\sigma) + 2\boldsymbol{\zeta}_3^\ell(\sigma) = -\rho_{y,\gamma_9}(\sigma)^2\rho_{\frac{1-y}{1-x},\gamma_6}(\sigma) + 2\boldsymbol{\zeta}_2^\ell(\sigma)\rho_{y,\gamma_9}(\sigma) + \frac{1}{3}\rho_{y,\gamma_9}(\sigma)^3\\
&- Li_2^\ell\left(\frac{x(1-y)}{x-1};\gamma_5,\sigma\right) - Li_2^\ell\left(\frac{1-y}{y(x-1)};\gamma_7,\sigma\right) + \frac{1}{2}\rho_{\frac{1-xy}{1-x},\gamma_5'}(\sigma) - \frac{1}{3}\rho_{y,\gamma_9}(\sigma).
\end{aligned}$$

表 2 のように, この ℓ 進 Galois トリログの Spence-Kummer 等式には 2 つのダイログ項を含む ℓ 進 Galois 特有の項 (ℓ 進 error term) が 4 つ出現しており, ここに ℓ 進 Galois 特有の現象が現れている.

Corollary 4.4 (ℓ 進 Galois トリログ指標の Spence-Kummer 型 9 項関数等式, [Sh23])**.** 記号や仮定は *Theorem 4.3*と同様とする．このとき, 任意の $\sigma \in G_K$ に対して, 次の等式が成り立つ．

一般化 ℓ 進 Soule 指標の Spence-Kummer 等式:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\chi}_3^{\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2},\gamma_1}(\sigma) + \tilde{\chi}_3^{xy,\gamma_2}(\sigma) + \tilde{\chi}_3^{\frac{x}{y},\gamma_3}(\sigma) - 2\tilde{\chi}_3^{\frac{x(1-y)}{y(1-x)},\gamma_4}(\sigma) - 2\tilde{\chi}_3^{\frac{x(1-y)}{x-1},\gamma_5}(\sigma) \\
&- 2\tilde{\chi}_3^{\frac{1-y}{1-x},\gamma_6}(\sigma) - 2\tilde{\chi}_3^{\frac{1-y}{y(x-1)},\gamma_7}(\sigma) - 2\tilde{\chi}_3^{x,\gamma_8}(\sigma) - 2\tilde{\chi}_3^{y,\gamma_9}(\sigma) + 2\tilde{\chi}_3^{\overrightarrow{10},\delta_{\overrightarrow{10}}}(\sigma) \\
&= -2\rho_{y,\gamma_9}(\sigma)^2\rho_{\frac{1-y}{1-x},\gamma_6}(\sigma) + \left(\frac{1-\chi(\sigma)^2}{2}\right)\rho_{y,\gamma_9}(\sigma) + \frac{2}{3}\rho_{y,\gamma_9}(\sigma)^3 \\
&\quad + 2\chi(\sigma)\left(\tilde{\chi}_2^{\frac{x(1-y)}{x-1},\gamma_5}(\sigma) + \tilde{\chi}_2^{\frac{1-y}{y(x-1)},\gamma_7}(\sigma)\right) + \chi(\sigma)^2\rho_{\frac{1-xy}{1-x},\gamma_5'}(\sigma) - \frac{2}{3}\rho_{y,\gamma_9}(\sigma).
\end{aligned}
$$

証明の概略を述べる．証明の鍵となるのは, Landen 等式の時と同様, ℓ 進 Galois アソシエーターの代数関係式 (chain rule) である．道のシステム $\{\gamma_i\}_{i=1,\ldots,9}$ から以下の chain rule が生じる．

$$
\mathfrak{f}_\sigma^{f_i(x,y),\gamma_i}(e_0,e_1) = \left(\delta_i \cdot f_i\left(\mathfrak{f}_\sigma^{(x,y),\gamma_0}\right)\cdot \delta_i^{-1}\right)\cdot \mathfrak{f}_\sigma^{f_i(\vec{v}),\delta_i}(e_0,e_1). \tag{25}
$$

この chain rule を詳しく解析することにより Theorem 4.3の関数等式が得られ, さらに公式 (13) を組み合わせることにより Corollary4.4の関数等式が導出される．ここで, この chain rule (25) を詳しく解析するために, chain rule に出現している 2 変数 ℓ 進 Galois アソシエーター

$$
\mathfrak{f}_\sigma^{(x,y),\gamma_0} \in \pi_1^{\ell\text{-ét}}(V_{\text{non-Fano}},\vec{v})
$$

を計算する必要がある．そのためには $V_{\text{non-Fano}}$ の副 ℓ エタール基本群を求める必要があり, 以下の図式に着目する．ただし, 以下の図式における V_{B_3} は B_3 型 Coxeter 配置の補空間であり, Klein の 4 元群を被覆変換群に持つ $M_{0,5}$ 上の有限次エタール Galois 被覆空間になっている．

$$
V_{\mathrm{B}_3} := \operatorname{Spec}\left(\overline{K}\left[s_1, s_2, \frac{1}{s_1 s_2(1-s_1^2)(1-s_2^2)(s_1-s_2)(1-s_1 s_2)}\right]\right).
$$

$$
\begin{tikzcd}
(V_{\mathrm{B}_3},\vec{v}) \arrow[r, hook, "\substack{\text{open}\\ \text{immersion}}"] \arrow[dd, two heads, "\substack{\text{finite}\\ \text{Galois}}"'] & (V_{\text{non-Fano}},\vec{v}), & & & \pi_1(V_{\mathrm{B}_3},\vec{v}) \arrow[r, two heads] \arrow[dd, hook] & \pi_1(V_{\text{non-Fano}},\vec{v}). \\
& f_{\mathrm{cov}} & \boxed{\text{Galois 対応}} \arrow[l, dashed] \arrow[r, dashed] & \pi_1(f_{\mathrm{cov}}) & & \\
(M_{0,5}, f_{\mathrm{cov}}(\vec{v})) & & & & \pi_1(M_{0,5}, f_{\mathrm{cov}}(\vec{v})) &
\end{tikzcd}
$$

さて, $M_{0,5}(\mathbb{C})$ の位相的基本群は $(0,5)$ 型の写像類群（すなわち 4 次純ブレイド群 P_4 をその中心で割って得られる群）としてよく知られている．よって, 被覆空間の Galois 理論と Reidemeister-Schreier アルゴリズムによる部分群表示法により, $V_{\text{non-Fano}}$ の基本群を $M_{0,5}$ の基本群の部分商として実現する．その結果として, 特定の 4 次純ブレイド $B_1,\ldots,B_6$ を位相的生成元とする $\pi_1^{\ell\text{-ét}}\left(V_{\text{non}-\text{fano}}^{\text{an}},\vec{v}\right)$ の以下の表示を得る (B_i の定め方や表示における関係式の詳細は [Sh23] を参照せよ).

$$
\pi_1^{\ell\text{-ét}}\left(V_{\text{non}-\text{fano}}^{\text{an}},\vec{v}\right) = \overline{\left\langle \begin{array}{c} B_1, B_2, B_3, \\ \\ B_4, B_5, B_6 \end{array} \middle| \ \text{いくつかの関係式} \right\rangle}.
$$

この群表示を用いた ℓ 進 Galois アソシエーターの技術的な計算により, 一先ずの目的としていた $\mathfrak{f}_\sigma^{(x,y),\gamma_0}$ の計算が可能になる．$\mathfrak{f}_\sigma^{(x,y),\gamma_0}$ の低次の項の様子は以下の通りである．ただし, $X_i := \mathbf{log}(B_i)$ とし, 以下の等式は $\pi_1^{\ell\text{-ét}}\left(V_{\text{non}-\text{fano}}^{\text{an}},\vec{v}\right)$ の $\mathbb{Q}_\ell$ 上の完備 ℓ 進 Lie 代数 (の普遍包絡代数) における等式である．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{log}\left(\left(\mathfrak{f}_\sigma^{(x,y),\gamma_0}\right)^{-1}\right) =& \rho_{x,\gamma_8}(\sigma)\cdot X_1 + \rho_{y,\gamma_9}(\sigma)\cdot X_2 + \left(\rho_{1-\frac{x}{y},\gamma_3'}(\sigma) + \rho_{y,\gamma_9}(\sigma)\right)\cdot X_3 \\
&+ \rho_{1-x,\gamma_8'}(\sigma)\cdot X_4 + \rho_{1-y,\gamma_9'}(\sigma)\cdot X_5 + \rho_{1-xy,\gamma_2'}(\sigma)\cdot X_6 + \cdots (\text{高次項}).
\end{aligned}
$$

こうして 2 変数 ℓ 進 Galois アソシエーター $\mathfrak{f}_\sigma^{(x,y),\gamma_0} \in \pi_1^{\ell\text{-ét}}(V_{\text{non-Fano}}, \vec{v})$ の計算が達成され, ℓ 進 Galois アソシエーターの chain rule (25) を詳細に解析することが可能となる.

Remark 6. 上述の証明における ℓ 進 Galois アソシエーターを複素反復積分の母関数 (Chen's formal power series) に置き換えることで, 従来の複素トリログの関数等式の新しい代数的証明が得られる.

参考文献

[A1881] N. H. Abel, *Note sur la fonction* $\phi(x) = x + \frac{x^2}{2^2} + \cdots$. Oeuvres II, Christiania (1881), 189–193.

[D90] V.G. Drinfeld, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with* $\mathrm{Ga}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Algebra i Analiz **2** (1990), 149–181.

[E1768] L. Euler, *Institutiones Calculi Integralis.* 1768.

[F04] H. Furusho, *p-adic multiple zeta values. I. p-adic multiple polylogarithms and the p-adic KZ equation.* Invent. Math. 155 (2004), no. 2, 253–286.

[F07] H. Furusho, *p-adic multiple zeta values. II. – Tannakian interpretations.* Amer. J. Math., Vol **129**, No 4, (2007), 1105-1144.

[F11] H. Furusho, *Double shuffle relation for associators.* Annals of Mathematics, Vol. 174 (2011), No. 1, 341-360.

[F16] 古庄 英和, 結び目と *Grothendieck-Teichmüller* 群. Math-for-industry Lecture Note **68**, 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所, 2016 年 2 月.

[I90] Y. Ihara. *Braids, Galois groups, and Some Arithmetic Functions.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990), 99–120, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991.

[K1840] E. Kummer, *Üeber die Transcendenten, welche aus wiederholten Integrationen rationaler Formeln entstehen.* J. Reine Angew. Math. **21** (1840); No 5, pp. 74-90; No 12, pp. 193-225; No 17, pp. 328–371.

[Ka90] 金子 昌信, 多重ゼータ値入門. 数理解析研究所講究録 1097 巻, 1999 年, 50-68.

[L1780] J. Landen, *Mathematical Memoirs Respecting a Variety of Subjects.* Vol. 1. London, 112–118, 1780.

[LM96] T. T. Q. Le, J. Murakami. *Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial.* Nagoya Math. J. 142 (1996), 39–65.

[Le81] L. Lewin, *Polylogarithms and associated functions.* North Holland, 1981.

[NS22] H. Nakamura, D. Shiraishi. *Landen's trilogarithm functional equation and ℓ-adic Galois multiple polylogarithms.* to appear in "Low Dimensional Topology and Number Theory" Springer Proceedings in Mathematics & Statistics.

[NW99] H. Nakamura, Z. Wojtkowiak. *On explicit formulae for l-adic polylogarithms.* Arithmetic fundamental groups and noncommutative algebra (Berkeley, CA, 1999), 285–294, Proc. Sympos. Pure Math., **70**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[NW12] H. Nakamura, Z. Wojtkowiak, *Tensor and homotopy criteria for functional equations of ℓ-adic and classical iterated integrals.* Non-abelian fundamental groups and Iwasawa theory, 258–310, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 393, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.

[NW20] H. Nakamura, Z. Wojtkowiak, *On distribution formulas for complex and l-adic polylogarithms.* Periods in quantum field theory and arithmetic, 593–619, Springer Proc. Math. Stat., 314, Springer, 2020.

[N02] H. Nakamura, *Limits of Galois representations in fundamental groups along maximal degeneration of marked curves, II.* Arithmetic fundamental groups and noncommutative algebra (Berkeley, CA, 1999), 43–78, Proc. Sympos. Pure Math., 70, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[N23] H. Nakamura, *Demi-shuffle duals of Magnus polynomials in a free associative algebra.* Algebraic Combinatorics, Volume **6** (2023) no. 4, pp. 929-939.

[Sh23] D. Shiraishi, *Spence-Kummer's trilogarithm functional equation and the underlying geometry.* preprint, arXiv:2307.09414, submitted, 2023.

[Sp1809] W. Spence, *An essay on the theory of the various orders of logarithmic transcendents.* London and Edinburgh, 1809.

[W04] Z. Wojtkowiak, *On ℓ-adic iterated integrals, I – Analog of Zagier Conjecture.* Nagoya Math. J., **176** (2004), 113–158.

[W05] Z. Wojtkowiak, *On ℓ-adic iterated integrals, II – Functional equations and ℓ-adic polylogarithms.* Nagoya Math. J., **177** (2005), 117–153.