モチビック GALOIS 群と円分多重ゼータ値について

名古屋大学高等研究院　広瀬稔
MINORU HIROSE
INSTITUTE FOR ADVANCED RESEARCH,
NAGOYA UNIVERSITY

Abstract. 本稿は RIMS 共同研究（公開型）「代数的整数論とその周辺 2023」における筆者の講演に関連したものである．講演ではレベル N が 2 または 3 冪の場合にモチビック周期の空間が円分多重ゼータ値で張られるという結果を紹介した．本稿では，この結果の背景や関連する話題について紹介する．

1. 混合テイトモチーフの周期について

Kontsevich と Zagier は [8] で “周期” と呼ばれる数のクラスを導入した．周期とは代数的な不等式で定義される実領域で代数的な関数を積分することによって得られる量である．例えばリーマンゼータ関数の特殊値

$$\zeta(3)=\int_{0<x<y<z<1}\frac{dxdydz}{(1-x)yz},$$

円周率

$$\pi=\int_{x^2+y^2\leq 1}1\cdot dxdy,$$

レムニスケート周率

$$\varpi=\int_{-1<x<1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

などは周期の例である． [8] では自然数の集合 $\mathbb{N}$, 整数の集合 $\mathbb{Z}$, 分数の集合 $\mathbb{Q}$, 代数的数の集合 $\bar{\mathbb{Q}}$ に次ぐ重要な数のクラスとして周期の集合 $\mathcal{P}$ が導入されている．これらには次のような包含関係がある．

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\bar{\mathbb{Q}}\subset\mathcal{P}\qquad(\subset\mathbb{C}).$$

整数論は考察の対象を $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\bar{\mathbb{Q}}$ と拡げることによって発展してきた側面がある．そのことを踏まえると，考察の対象をさらに $\mathcal{P}$ に拡げることによって整数論は更なる深化を遂げるだろうと期待したくなる．この意味でも周期は重要な対象である．さて，周期は極めて広範な対象であるため，(例えば $\bar{\mathbb{Q}}$ における 2 次体や円分体のように) できるだけ基本的な対象から調べるようとするのは自然である．モチーフ理論の観点からは周期は一般の混合モチーフの de Rham 実現と Betti 実現の比較同型の行列成分として解釈できる．この意味で，周期は “混合モチーフの周期” とも呼ばれる．さらにこの観点から，対象とするモチーフのクラスを制限することでより狭い周期のクラスを定義することができる．混合モチーフの中で，最も基本的なものの一つが混合テイトモチーフであり，その意味で混合テイトモチーフの周期は最も基本的な周期の一つであると言える．筆者の知る限り，混合モチーフの圏について十分に満足のいく構成はまだ知られていないようだが，以下では混合モチーフの圏が存在すると仮定して話を進めよう．混合テイトモチーフとは，テイトモチーフ $\mathbb{Q}(n)$ による拡大を繰り返して得られる混合モチーフのことである．例えば混合モチーフ M に対して，完全列

$$0\to\mathbb{Q}(m)\to M\to\mathbb{Q}(n)\to 0$$

が存在するとき，M は混同テイトモチーフとなる．ちなみに，混合モチーフの圏とは違い，混合モチーフの圏の導来圏に相当するべき圏については構成が知られており，実際にはこれを利用して混合テイトモチーフの圏を定義するのが普通である [9].

上の混合テイトモチーフの説明は抽象的なので，具体的な例を一つ与えておこう．ただしあくまで雰囲気を掴むための例であるとし，厳密な議論は行わない．さて，まずはアフィン空間から原点を抜いた空間 $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}[t,t^{-1}])=\mathbb{A}^1\setminus\{0\}$ を考えよう．これの 1 次コホモロジー $h^1(\mathbb{A}^1\setminus\{0\})$ として得られるモチーフを $\mathbb{Q}(-1)$ と書きテイトモチーフと呼ぶ．また $\mathbb{Q}(-1)$ の n 回テンソル積 $\mathbb{Q}(-1)^{\otimes n}$ を $\mathbb{Q}(-n)$ と書く．テイトモチーフの de Rham 実現と Betti 実現はそれぞれ

$$\omega_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}(-1))=H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{A}^1\setminus\{0\})=\mathbb{Q}\frac{dt}{t},$$
$$\omega_B(\mathbb{Q}(-1))=H^1(\mathbb{C}\setminus\{0\})=\mathbb{Q}\tilde{\alpha}$$

で与えられる．ただし，$H^1(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ の特異コホモロジーで，$\tilde{\alpha}$ は 0 を反時計回りに一周するサイクル α に 1 を対応させるコサイクルとする．このとき de Rham-Betti 比較同型

$$\mathbb{C}\otimes\omega_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}(-1))\simeq\omega_B(\mathbb{Q}(-1))\ ;\ \omega\mapsto(\gamma\mapsto\int_\gamma\omega)$$

が存在するが，$\int_\alpha\frac{dt}{t}=2\pi i$ より

$$\frac{dt}{t}\mapsto 2\pi i\cdot\tilde{\alpha}$$

となるので，テイトモチーフの周期には $2\pi i$ が現れる．次に相対コホモロジー $h^1(\mathbb{A}^1\setminus\{0\},\{1,2\})$ として得られるモチーフを考える．このとき混合モチーフの圏における完全列

$$0\to h^0(\{1,2\})/h^0(\mathbb{A}^1\setminus\{0\})\to h^1(\mathbb{A}^1\setminus\{0\},\{1,2\})\to h^1(\mathbb{A}^1\setminus\{0\})\to 0$$

が存在し，$h^0(\{1,2\})/h^0(\mathbb{A}^1\setminus\{0\})$ と $h^1(\mathbb{A}^1\setminus\{0\})$ はそれぞれ $\mathbb{Q}(0)$, $\mathbb{Q}(-1)$ と同型である．つまり次のような完全列があることになる．

$$0\to\mathbb{Q}(0)\to h^1(\mathbb{A}^1\setminus\{0\},\{1,2\})\to\mathbb{Q}(-1)\to 0.$$

混合テイトモチーフとは，大雑把に言えば，このように $\mathbb{Q}(n)$ $(n\in\mathbb{Z})$ による拡大を順次繰り返して得られる混合モチーフのことである．よって例えば $h^1(\mathbb{A}^1\setminus\{0\},\{1,2\})$ は混合テイトモチーフであるということになる．$h^1(\mathbb{A}^1\setminus\{0\},\{1,2\})$ の周期については次のようになる．まず de Rham 実現と Betti 実現は

$$\omega_{\mathrm{dR}}(h^1(\mathbb{A}^1\setminus\{0\},\{1,2\}))=H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{A}^1\setminus\{0\},\{1,2\})=\mathbb{Q}\frac{dt}{t}+\mathbb{Q}dt,$$
$$\omega_B(h^1(\mathbb{A}^1\setminus\{0\},\{1,2\}))=H^1(\mathbb{A}^1\setminus\{0\},\{1,2\})=\mathbb{Q}\tilde{\alpha}+\mathbb{Q}\tilde{\beta}$$

となる．ここで，特異ホモロジー $H_1(\mathbb{A}^1\setminus\{0\},\{1,2\})$ は 0 を一周するパス α および，1 から 2 への直線パス β を基底とするベクトル空間となるが，その双対基底を $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ と置いている．このとき

$$\int_\alpha\frac{dt}{t}=2\pi i,\quad\int_\beta\frac{dt}{t}=\log(2),\quad\int_\alpha dt=0,\quad\int_\beta dt=1$$

より de Rham 実現と Betti 実現の比較同型は

$$\begin{pmatrix}\frac{dt}{t}\\ dt\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2\pi i & \log(2)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\end{pmatrix}$$

となる．よって，$\log(2)$ は混合テイトモチーフの周期の例になっているということになる．

さて上の例でも見たように，混合テイトモチーフはある種の完全列の存在という特徴づけで定義されている．そのため，混合モチーフを具体的に構成するというのは自明でなく，例えば次の基本的な問いについてもまだ未解決であるように思われる.「混合テイトモチーフの全ての周期は具体的にはどのように得られるか？」．この問いに対する一つの有力なアプローチが射影直線上の反復積分である．これは以下のように定義される．

定義 1. $a_1,\dots,a_k$ を開区間 $(0,1)$ に含まれない複素数とし更に $a_1\neq 0$, $a_k\neq 1$ とする．このとき射影直線上の反復積分を次で定義する．

$$I(a_1,\dots,a_k):=\int_{0<t_1<\cdots<t_k<1}\frac{dt_1}{t_1-a_1}\cdots\frac{dt_k}{t_k-a_k}.$$

以下では話を正確にするためにモチビックな反復積分 $I^{\mathfrak{m}}(a_1,\ldots,a_k)$ を代わりに考え，また周期の代わりにモチビックな周期を考えることにする．これらの定義は与えないが，重要なこととして次が挙げられる．

- 周期は複素数だが，モチビックな周期はより抽象的に定義された環の元である．
- モチビックな周期について成り立つ代数的関係式は，周期についても成り立つ．
- 周期について成り立つ代数的関係式は，モチビックな周期についても成り立つと予想されている．
- 周期の場合には困難な線形独立性の証明が，モチビックな周期の場合には簡単になることが度々存在する．例えば $\zeta(3)$ と $\zeta(5)$ が $\mathbb{Q}$ 上線形独立かどうかは未解決だが，そのモチビック版である $\zeta^{\mathfrak{m}}(3)$ と $\zeta^{\mathfrak{m}}(5)$ の線型独立性は簡単な議論から従う．

混合テイトモチーフの周期は，より詳しくは，代数体 $K\subset\mathbb{C}$ に対する K 上の混合テイトモチーフの周期として分類される．K 上のモチビックな混合テイトモチーフの周期の集合を $\mathcal{H}(K)$ と書くことにする．このとき次が知られている．

命題 2. $a_1,\ldots,a_k\in K$ のとき $I^{\mathfrak{m}}(a_1,\ldots,a_k)\in\mathcal{H}(K)$.

また，逆も成り立つことが Goncharov によって予想されている．

予想 3 (Goncharov, [5])**.** $\mathcal{H}(K)$ は $I^{\mathfrak{m}}(a_1,\ldots,a_k)\in\mathcal{H}(K)$ $(a_1,\ldots,a_k\in K)$ およびモチビック $2\pi i$ で生成されている．

予想 3 が実際に証明されている代数体 K の例は存在しない．予想 3 は壮大な予想であるため，いきなり取り組むのは現実的ではないかもしれない．より現実的なアプローチの一つは，反復積分と周期のクラスを制限することである．まず，$K^{\times}\otimes\mathbb{Q}$ の部分ベクトル空間 Γ に対し，部分環

$$\mathcal{H}(K,\Gamma)\subset\mathcal{H}(K)$$

が自然に定義される．$0,1$ を含む K の部分集合 S に対し，$\mathcal{I}(S)$ をモチビックな $2\pi i$ と $I^{\mathfrak{m}}(a_1,\ldots,a_k)$ $(a_1,\ldots,a_k\in S)$ で生成される $\mathcal{H}(K)$ の部分環とし，また $\{a-b\mid a,b\in S\}$ で生成される $K^{\times}\otimes\mathbb{Q}$ の部分群を $\Gamma(S)$ と置く．このときより強く次が成り立つ．

$$\mathcal{I}(S)\subset\mathcal{H}(K,\Gamma(S)).$$

予想 3 の類似として，$\mathcal{I}(S)=\mathcal{H}(K,\Gamma(S))$ が成り立つかどうかという問いが立てられるが，この真偽は当然 S に依存する．本稿で特に取り上げたいのは $S=\{0\}\cup\mu_N$ の場合である．$\Gamma_N=\Gamma(\{0\}\cup\mu_N)$ と置く．

定義 4. 1 以上の整数 N に対し $P(N)$ を $\mathcal{I}(\{0\}\cup\mu_N)=\mathcal{H}(\mathbb{Q}(\zeta_N),\Gamma(\mu_N))$ が成り立つという主張とする．

Deligne は以下を証明した．

定理 5 (Deligne, [3])**.** $N\in\{2,3,4,8\}$ に対し，$P(N)$ は真である．

なお，[3] では更に $\mathcal{I}(\{0,1,\zeta_6\})\subset\mathcal{H}(\mathbb{Q}(\zeta_3),\{1\})$ も証明されている．その後，Brown は次を証明した．

定理 6 (Brown, [2])**.** $P(1)$ は真である．

一方，一般の N については $P(N)$ は必ずしも正しくない．

定理 7 (Goncharov, [6])**.** $N\geq 5$ が素数のとき，$P(N)$ は偽である．

定理 5, 6 以外に $P(N)$ が成り立つ例は知られていなかったのだが，著者は以下を証明した．

定理 8 ([7])**.** N が 2 または 3 の冪となるとき $P(N)$ は真である．

2. Galois 群の基本群への作用について

$P(N)$ の Galois 群の基本群への作用という観点からの解釈について説明する．$\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ の幾何的基本群

$$\pi_1^{\mathrm{geom}}(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}, \{0,1\}) \simeq (\text{ランク 2 の副有限自由群})$$

には $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群が作用する．

$$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \curvearrowright \pi_1^{\mathrm{geom}}(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}, \{0,1\}).$$

この作用は忠実であることが Belyi [1] によって証明されている．非常にミステリアスな対象である絶対 Galois 群がランク 2 の副有限自由群の自己同型群という組み合わせ論的な対象に埋め込まれるという意味で，Belyi の定理は驚きである．この作用は重要な研究対象であり，例えばこの作用により絶対 Galois 群が $\widehat{\mathrm{GT}}$ (副有限版の Grothendieck-Teichmuller 群) に埋め込まれること等が知られている．絶対 Galois 群が $\widehat{\mathrm{GT}}$ に一致するかどうかについては，その肯定も否定も証明されていない．

$\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群の類似物としてモチビック Galois 群がある．おおまかに言えば，代数的数の集合 $\bar{\mathbb{Q}}$ の対称性を記述するのが絶対 Galois 群であったのに対し，周期の集合 $\mathcal{P}$ の対称性を記述するのがモチビック Galois 群である．より正確には，$\mathbb{Q}$ 上の有限エタール代数のなす Galois 圏に付随する副有限群が絶対 Galois 群であったのに対し，混合モチーフのなす淡中圏に付随する代数群がモチビック Galois 群である.（さらに正確には，モチビック Galois 群を canonical に定めるには，ファイバー関手を一つ固定する必要がある．以下では canonical ファイバー関手に対応するものを考える．基本群についても同様である）．またモチビック Galois 群の商集合として，(K,Γ) 上の混合テイトモチーフのモチビック Galois 群 $\mathrm{Gal}^{\mathcal{M}}(K,\Gamma)$ なども定義される．そして，$(\mathbb{Q},\{1\})$ 上のモチビック Galois 群は $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ のモチビック基本群に作用する．

$$\mathrm{Gal}^{\mathcal{M}}(\mathbb{Q},\{1\}) \curvearrowright \pi_1^{\mathrm{mot}}(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}, \{0,1\})$$

これは上で言及した絶対 Galois 群の基本群への作用の類似物である．これの一般化として

$$\mathrm{Gal}^{\mathcal{M}}(\mathbb{Q}(\zeta_N), \Gamma(0 \cup \{\mu_N\})) \curvearrowright \pi_1^{\mathrm{mot}}(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,\mu_N,\infty\}, \{0,1\})$$

を考えることができるが，この作用の忠実性が $P(N)$ と同値である．

3. $\mathcal{H}(K,\Gamma)$ の構造について

ここでは $\mathcal{H}(K,\Gamma)$ の構造について詳しく述べよう．まず，$\mathcal{H}(K,\Gamma)$ は次数付き環の構造を持っており，

$$\mathcal{H}(K,\Gamma) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k(K,\Gamma)$$

となる．ここで，次数 0 部分は $\mathbb{Q}$ と同型であり，さらにモチビックな反復積分

$$I^{\mathfrak{m}}(a_1,\ldots,a_k)$$

の次数は k となる．つまり，$I^{\mathfrak{m}}(a_1,\ldots,a_k) \in \mathcal{H}_k(K,\Gamma)$ である．また，モチビック $2\pi i$ とも呼ばれる元 $(2\pi\mathrm{i})^{\mathfrak{m}} \in \mathcal{H}_1(K,\Gamma)$ が存在する．さらに

$$\mathcal{A}(K,\Gamma) := \mathcal{H}(K,\Gamma)/(2\pi i)^{\mathfrak{m}}\mathcal{H}(K,\Gamma)$$

と置き，$I^{\mathfrak{m}}(a_1,\ldots,a_k)$ の $\mathcal{A}(K,\Gamma)$ における像を $I^{\mathfrak{a}}(a_1,\ldots,a_k)$ と書く．このとき $\mathcal{H}(K,\Gamma)$ は (非標準的に)$\mathcal{A}(K,\Gamma)[(2\pi i)^{\mathfrak{m}}]$ と同型であることが知られている．また，$\mathcal{A}(K,\Gamma)$ は次数付きホップ代数の構造を持つ．$\mathcal{A}(K,\Gamma)$ の coradical filtration を

$$C_d\mathcal{A}(K,\Gamma) = \begin{cases} \mathbb{Q} & d=0 \\ \{u \in \mathcal{A}(K,\Gamma) \mid \Delta(u) - \mathrm{id}\otimes u \in \mathcal{A}(K,\Gamma)\otimes C_{d-1}\mathcal{A}(K,\Gamma)\} & d>0 \end{cases}$$

で定め，

$$\mathrm{gr}_d^C \mathcal{A}(K,\Gamma) = C_d\mathcal{A}(K,\Gamma)/C_{d-1}\mathcal{A}(K,\Gamma)$$

と置く．このとき $\mathcal{A}(K,\Gamma)$ の余積は同型

$$\mathrm{gr}_d^C\mathcal{A}(K,\Gamma)\simeq\mathrm{gr}_1^C\mathcal{A}(K,\Gamma)\otimes\mathrm{gr}_{d-1}^C\mathcal{A}(K,\Gamma)$$

を誘導することが知られている．よって，

$$\mathrm{gr}_d^C\mathcal{A}(K,\Gamma)\simeq(\mathrm{gr}_1^C\mathcal{A}(K,\Gamma))^{\otimes d}$$

となる．また $\mathrm{gr}_1^C\mathcal{A}(K,\Gamma)$ に関しては次の次元公式が知られている．

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{Q}}\mathrm{gr}_1^C\mathcal{A}_k(K,\Gamma)&=\dim_{\mathbb{Q}}\begin{cases}\Gamma & k=1\\ K_{2k-1}(K) & k>1\end{cases}\\ &=\begin{cases}\dim_{\mathbb{Q}} & k=1\\ \mathbb{Q}^{r_1+r_2} & k>1,\mathrm{odd}\\ \mathbb{Q}^{r_2} & k>1,\mathrm{even}.\end{cases}\end{aligned}$$

ただし，ここで K_{2n-1} は K 群，r_1 は K の実素点の個数，r_2 は K の複素素点の個数である．また，

$$a_1,\dots,a_k\in\{0\}\cup\mu_N$$

で $d=\#\{a_j\neq0\}$ と置くとき

$$I^{\mathfrak{a}}(a_1,\dots,a_k)\in C_d\mathcal{A}_k(\mathbb{Q}(\zeta_N),\Gamma_N)$$

となることが知られている．ここで，条件 $a_1,\dots,a_k\in\{0\}\cup\mu_N$ は本質的であり，$a_1,\dots,a_k$ に 1 の冪根以外が含まれている場合は成り立たない．さて，$\mathrm{gr}_1^C\mathcal{A}(\mathbb{Q}(\zeta_N),\Gamma_N)$ の場合には，反復積分を用いた生成元と関係式による記述も知られている．具体的には次の通りである．以下，$I^{\mathfrak{a}}(a_1,\dots,a_k)$ の $\mathrm{gr}_d^C\mathcal{A}_k(\mathbb{Q}(\zeta_N),\Gamma_N)$ $(d=\#\{a_j\neq0\})$ における像を，$I^{\mathfrak{c}}(a_1,\dots,a_k)$ と書くことにする．

定理 9 (Deligne-Goncharov [4, Theoreme 6.8])**.** *$\mathbb{Q}$-ベクトル空間 $\mathrm{gr}_1^C\mathcal{A}(\mathbb{Q}(\zeta_N),\Gamma_N)$ は $\{I^{\mathfrak{c}}(a,\{0\}^l)\mid a\in\mu_N,l\geq0\}$ で生成され，全関係式は以下で尽くされる．*

(1) $I^{\mathfrak{c}}(1)=0$,

(2) $a\in\mu_N$, $l\geq0$ に対して

$$I^{\mathfrak{c}}(a,\{0\}^l)=(-1)^lI^{\mathfrak{c}}(a^{-1},\{0\}^l),$$

(3) N の正の約数 M と $a\in\mu_N$ であって， $(a^M,l)\neq(1,0)$ となるものに対し，

$$I^{\mathfrak{c}}(a^M,\{0\}^l)=M^l\sum_{b\in\mu_M}I^{\mathfrak{c}}(ab,\{0\}^l).$$

4. 重さ 2 の場合

N を正の整数とし，重さ 2 の周期の空間

$$\mathcal{A}_2(\mathbb{Q}(\zeta_N),\Gamma_N)$$

が反復積分

$$I^{\mathfrak{a}}(a_1,a_2)\qquad(a_1,a_2\in\{0\}\cup\mu_N)$$

で生成されるかどうかを考えよう．$C_1\mathcal{A}_2(\mathbb{Q}(\zeta_N),\Gamma_N)$ は

$$I^{\mathfrak{a}}(a,0)\qquad(a\in\mu_N)$$

で生成されている．よって，

$$\mathrm{gr}_2^C\mathcal{A}_2(\mathbb{Q}(\zeta_N),\Gamma_N)$$

が

$$I^{\mathfrak{c}}(a_1,a_2)\qquad(a_1,a_2\in\mu_N)$$

で生成されているかどうかを調べれば十分である．更に余積が誘導する写像

$$\begin{aligned}\mathcal{D} : \mathrm{gr}_2^C \mathcal{A}_2(\mathbb{Q}(\zeta_N), \Gamma_N) &\to \mathrm{gr}_1^C \mathcal{A}_1(\mathbb{Q}(\zeta_N), \Gamma_N)^{\otimes 2} \\ &\simeq \mathcal{A}_1(\mathbb{Q}(\zeta_N), \Gamma_N)^{\otimes 2}\end{aligned}$$

は同型なので，$I^{\mathfrak{c}}(a_1, a_2)$ の $\mathcal{A}_1(\mathbb{Q}(\zeta_N), \Gamma_N)^{\otimes 2}$ における像が $\mathcal{A}_1(\mathbb{Q}(\zeta_N), \Gamma_N)^{\otimes 2}$ を生成しているかどうかが問題になる．準備のためにまず，反復積分の記号を次で拡張する．

$$\begin{aligned}&I^{\mathfrak{a}}(s; a_1, \ldots, a_k; t) \\ &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j I^{\mathfrak{a}}\left(0; a_j, \ldots, a_1; s\right) I^{\mathfrak{a}}\left(0; a_{j+1}, \ldots, a_k; t\right),\end{aligned}$$

$$I^{\mathfrak{a}}(0; a_1, \ldots, a_k; t) = \begin{cases} \delta_{k,0} & t = 0 \\ I^{\mathfrak{a}}\left(\frac{a_1}{t}, \ldots, \frac{a_k}{t}\right) & t \neq 0. \end{cases}$$

反復積分の余積は Goncharov による以下の公式で与えられる．

$$\begin{aligned}&\Delta I(a_0; a_1, \ldots, a_k; a_{k+1}) \\ &= \sum_{l=0}^{k} \sum_{0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_l < i_{l+1} = k+1} \prod_{j=0}^{l} I^{\mathfrak{a}}(a_{i_j}; a_{i_j+1}, \ldots, a_{i_{j+1}-1}; a_{i_{j+1}}) \otimes I^{\mathfrak{a}}(a_0; a_{i_1}, \ldots, a_{i_l}; a_{k+1}).\end{aligned}$$

特に $k = 2$ の場合に適用して，

$$\begin{aligned}\Delta I^{\mathfrak{a}}(a_1, a_2) &= \Delta I^{\mathfrak{a}}(0; a_1, a_2; 1) \\ &= 1 \otimes I^{\mathfrak{a}}(a_1, a_2) + I^{\mathfrak{a}}(0; a_1; a_2) \otimes I^{\mathfrak{a}}(a_2) + I^{\mathfrak{a}}(a_1; a_2; 1) \otimes I^{\mathfrak{a}}(a_1) + I(a_1, a_2) \otimes 1\end{aligned}$$

となり，更に

$$\begin{aligned}&I^{\mathfrak{a}}(0; a_1; a_2) = I^{\mathfrak{a}}\left(\frac{a_1}{a_2}\right), \\ &I^{\mathfrak{a}}(a_1; a_2; 1) = I^{\mathfrak{a}}(0; a_2; 1) - I^{\mathfrak{a}}(0; a_2, a_1) = I^{\mathfrak{a}}(a_2) - I^{\mathfrak{a}}\left(\frac{a_2}{a_1}\right).\end{aligned}$$

となる．よって

$$\mathcal{D}(I^{\mathfrak{c}}(a_1, a_2)) = I^{\mathfrak{c}}\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \otimes I^{\mathfrak{c}}(a_2) + I^{\mathfrak{c}}(a_2) \otimes I^{\mathfrak{c}}(a_1) - I^{\mathfrak{c}}\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \otimes I^{\mathfrak{c}}(a_1)$$

である．以上より，$\mathrm{gr}_2^C \mathcal{A}_2(\mathbb{Q}(\zeta_N), \Gamma_N)$ が $I^{\mathfrak{c}}(a_1, a_2)$ $(a_1, a_2 \in \mu_N)$ で生成されるかどうかは線形代数の問題に帰着される．

$$D_N = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathrm{gr}_2^C \mathcal{A}_2(\mathbb{Q}(\zeta_N), \Gamma_N) / \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{I^{\mathfrak{c}}(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mu_N\})$$

と置こう．

例 10. $N = 1$ とする．$I^{\mathfrak{c}}(1) = 0$ より，$\mathcal{A}_1(\mathbb{Q}(\zeta_1), \Gamma_1) = \{0\}$ である．よって，自明に $D_1 = 0$ となる．

例 11. $N = 2, 3, 4$ とする．このとき $\mathrm{gr}_1^C \mathcal{A}_1(\mathbb{Q}(\zeta_N), \Gamma_N)$ の関係式はそれぞれ次で与えられる．$N = 2$ の場合，

$$I^{\mathfrak{c}}(1) = 0.$$

$N = 3$ の場合

$$I^{\mathfrak{c}}(1) = 0,\ I^{\mathfrak{c}}(\zeta_3) = I^{\mathfrak{c}}(\zeta_3^2).$$

$N = 4$ の場合

$$I^{\mathfrak{c}}(1) = 0,\ I^{\mathfrak{c}}(\zeta_4) = I^{\mathfrak{c}}(\zeta_4^3),\ I^{\mathfrak{c}}(\zeta_4^2) = I^{\mathfrak{c}}(\zeta_4^1) + I(\zeta_4^3).$$

よっていずれの場合にせよ $\mathcal{A}_1(\mathbb{Q}(\zeta_N),\Gamma_N)$ は $I^{\mathfrak{C}}(\zeta_N)$ で生成される1次元ベクトル空間となる．更に

$$\begin{aligned}\mathcal{D}I^{\mathfrak{C}}(\zeta_N,\zeta_N)&=I^{\mathfrak{C}}(1)\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_N)+I^{\mathfrak{C}}(\zeta_N)\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_N)-I^{\mathfrak{C}}(1)\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_N)\\&=I^{\mathfrak{C}}(\zeta_N)\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_N)\end{aligned}$$

なので，$\mathrm{gr}_2^C\mathcal{A}_2(\mathbb{Q}(\zeta_N),\Gamma_N)$ は $I^{\mathfrak{C}}(\zeta_N,\zeta_N)$ で生成される．よって $D_2=D_3=D_4=0$ である．

例 12. $N=5$ とする．$\mathcal{A}_1(\mathbb{Q}(\zeta_2),\Gamma_2)$ の生成元 $I^{\mathfrak{C}}(1)$, $I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5)$, $I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^2)$, $I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^3)$, $I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^4)$ の関係式は $I^{\mathfrak{C}}(1)=0$, $I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5)=I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^4)$, $I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^2)=I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^3)$ で与えられる．特に $\mathcal{A}_1(\mathbb{Q}(\zeta_5),\Gamma_5)=\mathbb{Q}I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5)\oplus\mathbb{Q}I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^2)$ である．更に $a=\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathcal{D}I^{\mathfrak{C}}(1,\zeta_5^a)&=I^{\mathfrak{C}}\left(\zeta_5^{-a}\right)\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)+I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)\otimes I^{\mathfrak{C}}(1)-I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)\otimes I^{\mathfrak{C}}(1)\\&=I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a,1)&=I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)\otimes I^{\mathfrak{C}}(1)+I^{\mathfrak{C}}(1)\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)-I^{\mathfrak{C}}\left(\zeta_5^{-a}\right)\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)\\&=-I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a,\zeta_5^a)&=I^{\mathfrak{C}}(1)\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)+I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)-I^{\mathfrak{C}}(1)\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)\\&=I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a,\zeta_5^{2a})&=I^{\mathfrak{C}}\zeta_5^{-a}\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^{2a})+I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^{2a})\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)-I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)\\&=I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^{2a})+I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^{2a})\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)-I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a,\zeta_5^{3a})&=I^{\mathfrak{C}}\left(\zeta_5^{-2a}\right)\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^{3a})+I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^{3a})\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)-I^{\mathfrak{C}}\left(\zeta_5^{2a}\right)\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)\\&=I^{\mathfrak{C}}\left(\zeta_5^{2a}\right)\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^{2a}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a,\zeta_5^{4a})&=I^{\mathfrak{C}}\left(\zeta_5^{2a}\right)\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^{4a})+I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^{4a})\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)-I^{\mathfrak{C}}\left(\zeta_5^{-2a}\right)\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)\\&=I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)\otimes I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a)\end{aligned}$$

となるので，

$$\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{\mathcal{D}I^{\mathfrak{C}}(\zeta_5^a,\zeta_5^b)\mid a,b\in\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\}=\mathbb{Q}\zeta_5^1\otimes\zeta_5^1+\mathbb{Q}\zeta_5^2\otimes\zeta_5^2+\mathbb{Q}\left(\zeta_5^1\otimes\zeta_5^2+\zeta_5^2\otimes\zeta_5^1\right)$$

となる．よって $D_5=1$ である．

$N\le 50$ に対する D_N の表を与えておこう．

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
D_N	0	0	0	0	1	0	2	0	0	0	5	0	7	0	0	0	12	0

N	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
D_N	15	0	0	0	22	0	5	0	0	0	35	0	40	0	0	1

N	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
D_N	0	0	57	0	1	0	70	0	77	0	0	0	92	0	35	0

現時点で D_N について証明できていることは以下の通りである．

定理 13 (Goncharov, [6])**.** 5 以上の素数 p に対して

$$D_p=\frac{p^2-1}{24}.$$

定理 14 ([7])**.** $r\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対して

$$D_{2^r}=D_{3^r}=0.$$

一般の D_N の挙動については予想という意味でもまだまだ未解明である．例えば $D_N = 0$ となる条件すら分からない．Goncharov の定理より $5 \geq N$ が素数ならば $D_N \neq 0$ であるが，逆は成り立たない．$D_N \neq 0$ となる合成数 N の例は小さい順に

$$N = 25, 34, 39, 49, 55, 62, 65, 68, 77, 82, 85, 86, 91, 95, \dots$$

である．筆者は $N \leq 250$ に対し，D_N を数値計算した．完全な規則性は不明だが，例えば $N \leq 250$ の範囲で次が成り立つ．[1]

(1) 素数 p に対して，$D_{p^2} = p(p-1)(p-2)(p-3)/24$.

(2) 素数 $p \geq 5$ に対して，$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times/\{\pm 1\}$ における 2 の位数を $f(p)$ とするとき

$$D_{2p} = \frac{p-1}{2f(p)} - 1.$$

(3) 素数 $p \geq 5$ に対して，$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times/\{\pm 1\}$ における 3 の位数を $g(p)$ とするとき

$$D_{3p} = \frac{p-1}{2g(p)} - 1.$$

(4) 相異なる素数 p, q および正整数 a, b に対して，$D_{p^a q^b} = D_{pq}$.

(5) N が 3 個以上の相異なる素因数を持つとき，$D_N = 0$.

(1), (2), (3) については，一般に正しいと思わせるに十分なデータ数であると思われる．(4) は $p \in \{2, 3\}$ の場合に関しては，一般に成り立つと期待したい．$\min(p, q) \geq 5$ となる場合にも正しいかどうか検証するには更なるデータが必要である．(5) に関しては，一般の N について予想するには完全にデータ不足であり，相異なる 5 以上の素因数を 3 個持つような例，例えば $N = 5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$ などの場合については未検証である．

謝辞．「代数的整数論とその周辺 2023」での講演の機会を下さった東京電機大学の千田雅隆様に感謝いたします．本研究は JSPS 科研費 JP18K13392, JP22K03244 の助成を受けたものです．

References

[1] G.V. Belyĭ, ‘On Galois extensions of a maximal cyclotomic field’, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 1979, 43(2): 267–276.

[2] F. Brown, ‘Mixed Tate motives over $\mathbb{Z}$’, Ann. Math., 175 (2012), 949-976.

[3] P. Deligne, ‘Le groupe fondamental unipotent motivique de $\mathbb{G}_m - \mu_N$, pour $N = 2, 3, 4, 6$ ou 8’, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. (2010), 101–141.

[4] P. Deligne and A. B. Goncharov, ‘Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte’, Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure 38.1 (2005): 1-56.

[5] A. B. Goncharov, ‘Polylogarithms in Arithmetic and Geometry’, In: Chatterji, S.D. (eds) Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Birkhäuser, Basel (1995).

[6] A. B. Goncharov, ‘The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of $\pi_1^{(l)}(\mathbb{P} - (\{0, \infty\} \cup \mu_N))$’, Duke Math. J. 110 (3) 397 - 487, 1 December 2001.

[7] M. Hirose, ‘On the motivic fundamental group of the multiplicative group minus p^s-th roots of unity for $p = 2$ or 3’, tentative title, in preparation.

[8] M. Kontsevich and D. Zagier, ‘Periods’, in Mathematics unlimited—2001 and beyond, Springer, Berlin (2001) 771–808.

[9] M. Levine, ‘Mixed Motives’, In: Friedlander, E., Grayson, D. (eds) Handbook of K-Theory. Springer, Berlin, Heidelberg (2005).

[1](2), (3) は，筆者の数値計算に基づき国立台湾大学の佐藤信夫氏によって発見された現象である．