Invariant quasimorphisms and certain coarse kernels of mixed commutator subgroups

金沢大学理工研究域数物科学系 丸山修平
Shuhei Maruyama
School of Mathematics and Physics, College of Science and Engineering
Kanazawa University

概要

本稿は川崎盛通氏 (北海道大学), 木村満晃氏 (大阪歯科大学), 松下尚弘氏 (信州大学), 見村万佐人氏 (東北大学) との共同研究 ([KKM+21],[KKM+23]) に基づく．群 G とその正規部分群 N に対し, 拡張不可能な不変擬準同型の空間 $W(G,N)$ が適当な条件の下で有限次元となることを [KKM+21] で示した．本稿では, [KKM+23] で得られた $W(G,N)$ の次元の粗幾何における解釈について紹介する．

1 序

群 G 上の実数値関数 μ に対し,

$$D(\mu) = \sup_{g,h\in G} |\mu(gh) - \mu(g) - \mu(h)|$$

を μ の *defect* といい, 有界な defect を持つ μ を**擬準同型**という．また, G の任意の巡回部分群への制限 $\mu|_G$ が準同型となるとき, μ を**斉次**という．以下では明言しない限り, 斉次擬準同型のことを単に擬準同型と呼ぶことにする．G 上の擬準同型のなすベクトル空間を $\mathrm{Q}(G)$ で表し, G 上の実数値準同型のなす部分空間を $\mathrm{H}^1(G)$ で表す．G が可換群 (より広く従順群) のとき $\mathrm{Q}(G)/\mathrm{H}^1(G) = 0$ であり, それとは対照的に G が自由群や双曲閉曲面の基本群 (より広く非初等的双曲群) のとき $\mathrm{Q}(G)/\mathrm{H}^1(G)$ は非可算無限次元となることが知られている [BF02].

N を G の正規部分群とし, N 上の擬準同型 $\nu \in \mathrm{Q}(N)$ が G に擬準同型として拡張可能かどうかを考える．簡単な議論により $\mu \in \mathrm{Q}(G)$ は共役不変 (つまり任意の $g,h \in G$ に対し $\mu(ghg^{-1}) = \mu(h)$) となることが分かるので, ν が G 上に擬準同型として拡張可能なら

ば, ν は G-共役不変である．言い換えると, 包含写像 $i\colon N \to G$ による引き戻しが写像

$$i^*\colon \mathrm{Q}(G) \to \mathrm{Q}(N)^G$$

を誘導する．ここで $\mathrm{Q}(N)^G$ は G-共役不変な N 上の擬準同型のなすベクトル空間である．本稿では $\mathrm{Q}(N)^G$ の元を単に**不変擬準同型**とよぶことにする．また, $\mathrm{H}^1(N)^G = \mathrm{H}^1(N) \cap \mathrm{Q}(N)^G$ とおき, この元を**不変準同型**とよぶことにする．

次の商空間を考える:

$$W(G,N) = \mathrm{Q}(N)^G/(\mathrm{H}^1(N)^G + i^*\mathrm{Q}(G)).$$

この空間を**拡張不可能な不変擬準同型の空間**とよぶ．$W(G,N)$ の分子 $\mathrm{Q}(N)^G$ と分母 $(\mathrm{H}^1(N)^G + i^*\mathrm{Q}(G))$ はともに, 双曲的な設定では非可算無限次元となることが多い (例えば G が非初等的双曲群, N が無限群かつ G/N が有限生成従順群であればそうなる)．一方 [KKM$^+$21] において, それらの商空間 $W(G,N)$ はある程度マイルドな設定で有限次元となることが示された．具体的には, G/N が従順群のとき $W(G,N)$ が G の実係数 2 次コホモロジー $\mathrm{H}^2(G)$ のある部分空間に自然に同型となることが示されている．例えば G が有限表示であれば $\mathrm{H}^2(G)$ は有限次元となるので, $W(G,N)$ も有限次元となる．

本稿の主題は, $W(G,N)$ の次元の粗幾何的な解釈である．用語や記号の説明は後の章に回し, 主定理を述べる．

定理 ([KKM$^+$23, Theorem 1.3 (の一部)])**.** 群 G とその交換子部分群 N に対し, $W(G,N)$ が有限次元だとする．$W(G,N)$ の次元を l とおく．このとき, 写像 $\iota\colon ([G,N], d^+_{\mathrm{scl}_{G,N}}) \to ([G,N], d^+_{\mathrm{scl}_G})$ の粗核は $(\mathbb{Z}^l, d_{\|\cdot\|_1})$ と粗同型である．

注意 1.1. 本稿では群 G と正規部分群 N という「群の組」の設定で話を進めるが, [KKM$^+$23] では実はより一般の「群の三つ組」の設定で理論を展開している．

2 安定交換子長

この章では主定理の主張の中の $([G,N], d^+_{\mathrm{scl}_{G,N}})$ と $([G,N], d^+_{\mathrm{scl}_G})$ について説明する．

G の元 g と N の元 x に対し $[g,x] = gxg^{-1}x^{-1}$ を (G,N)-**単交換子**という．また (G,N)-単交換子で生成される群を $[G,N]$ と書き, (G,N)-**交換子群**という．$[G,N]$ の元 z に対し

$$\mathrm{cl}_{G,N}(z) = \min\{\, l \mid z = [g_1,x_1]\cdots[g_l,x_l], g_i \in G, x_i \in N\}$$

とおき, z の (G,N)-**交換子長**という．

(G,N)-交換子長は明らかに劣加法性を満たすので, Fekete の補題から極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{cl}_{G,N}(z^n)}{n}$$

が存在する. この極限を $\mathrm{scl}_{G,N}(z)$ で表し, z の**安定** (G,N)-**交換子長**という.

以上の定義を $G=N$ の場合に適用すると, 通常の交換子部分群 $[G,G]$, 交換子長 cl_G および安定交換子長 scl_G が得られる.

擬準同型と安定交換子長は以下の Bavard 双対定理により結びつく.

定理 2.1 ([Bav91])**.** 任意の $z\in[G,G]$ に対し,

$$\mathrm{scl}_G(z)=\sup_{[\mu]\in \mathrm{Q}(G)/\mathrm{H}^1(G)}\frac{|\mu(z)|}{2D(\mu)}$$

が成り立つ. ($\mathrm{Q}(G)=\mathrm{H}^1(G)$ のときは右辺は 0 とみなす.)

また, 不変擬準同型と安定 (G,N)-交換子長にも同様の関係 ((G,N)-Bavard 双対定理) が成り立つ.

定理 2.2 ([KKMM22])**.** 任意の $z\in[G,N]$ に対し,

$$\mathrm{scl}_{G,N}(z)=\sup_{[\nu]\in \mathrm{Q}(N)^G/\mathrm{H}^1(N)^G}\frac{|\nu(z)|}{2D(\nu)}$$

が成り立つ. ($\mathrm{Q}(N)^G=\mathrm{H}^1(N)^G$ のときは右辺は 0 とみなす.)

(G,N)-Bavard 双対定理と擬準同型の定義から, 任意の $z,w\in[G,N]$ に対し

$$\mathrm{scl}_{G,N}(zw)\le \mathrm{scl}_{G,N}(z)+\mathrm{scl}_{G,N}(w)+\frac{1}{2}$$

が成り立つことが分かる. よって $\mathrm{scl}^+_{G,N}\colon [G,N]\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ を $z\in[G,N]$ に対し

$$\mathrm{scl}^+_{G,N}(z)=\mathrm{scl}_{G,N}(z)+\frac{1}{2}$$

と定めると, $\mathrm{scl}^+_{G,N}$ は三角不等式を満たす. つまり $\mathrm{scl}^+_{G,N}$ は $[G,N]$ 上の共役不変なノルムである.

$[G,G]$ 上の共役不変ノルム scl^+_G も同様に定義されるが, 本稿ではこのノルムの $[G,N](\subset [G,G])$ への制限を考える. これにより $[G,N]$ 上に $\mathrm{scl}^+_{G,N}$ と scl^+_G のふたつの共役不変なノルムが得られる. これらのノルムの誘導する両側不変距離をそれぞれ $d^+_{\mathrm{scl}_{G,N}}, d^+_{\mathrm{scl}_G}$ で表す.

主定理に現れる $([G,N], d^+_{\mathrm{scl}_{G,N}})$ と $([G,N], d^+_{\mathrm{scl}_G})$ は上の両側不変距離付き群であり, $\iota\colon ([G,N], d^+_{\mathrm{scl}_{G,N}}) \to ([G,N], d^+_{\mathrm{scl}_G})$ は写像としては恒等写像である．主定理が述べているのは「これらの両側不変距離付き群の粗構造の違いを $W(G,N)$ の次元が検知している」ということである．なお, 主定理内の $d_{\|\cdot\|_1}$ は ℓ^1 ノルムの誘導する $\mathbb{Z}^l$ 上の距離である．

3 粗核

この章では主定理に現れる粗核について説明する．本稿では一般論には立ち入らず, 距離から誘導される粗構造および粗群構造に限定して話を進める．粗構造および粗群構造の一般論についての文献として [Roe03] と [LV23] を挙げておく．

G と H を群とし, d_G と d_H を G および H 上の両側不変距離とする．写像 $\alpha\colon G \to H$ が *controlled* とは, 任意の $S > 0$ に対しある $T > 0$ が存在して, 任意の $g_1, g_2 \in G$ に対し, $d_G(g_1, g_2) \leq S$ ならば $d_H(\alpha(g_1), \alpha(g_2)) \leq T$ が成り立つときをいう．また, $\sup_{g_1,g_2\in G} d_H(\alpha(g_1g_2), \alpha(g_1)\alpha_(g_2)) < \infty$ を満たす写像 α を**前粗準同型**といい, controlled な前粗準同型を**粗準同型**という．

写像 $\alpha_1\colon G \to H$ と $\alpha_2\colon G \to H$ が $\sup_{g\in G} d_H(\alpha_1(g), \alpha_2(g)) < \infty$ を満たすとき, $\alpha_1 \approx \alpha_2$ と書く．粗準同型 $\alpha\colon G \to H$ と $\beta\colon H \to G$ が $\beta\circ\alpha \approx \mathrm{id}_G$ かつ $\alpha\circ\beta \approx \mathrm{id}_H$ を満たすとき, α と β を**粗同型写像**という．

A と B を G の部分集合とする．ある $d > 0$ が存在して B の d-近傍 $N(B,d)$ が A を部分集合として含むとき, $A \preceq B$ と書く．また $A \preceq B$ かつ $B \preceq A$ が成り立つとき, $A \asymp B$ と書く．この関係 $\asymp$ に関する同値類を G の**粗部分空間**という．

定義 3.1. G と H を群, d_G と d_H を G および H 上の両側不変距離とし, $\alpha\colon G \to H$ を粗準同型とする．A を G の部分集合とし, $\mathbf{A}$ を A の代表する G の粗部分空間とする．$\mathbf{A}$ が α の**粗核**とは, $\alpha(A) \subset H$ が有界集合であり, かつ $\alpha(B) \subset H$ が有界集合となる G の部分集合 B に対し $B \preceq A$ が成り立つときをいう．

つまり粗準同型 α の粗核とは, α での像が有界集合となるような G の部分集合のうち,「粗な意味で」最大のものの代表する粗部分空間のことである．

注意 3.2. 群準同型の核の場合と異なり, 粗準同型の核は存在するとは限らない ([LV23, Lemma 7.16, Example 7.18, Subsection 7.5])．主定理は粗核の存在についても主張している．

4 主定理について

ここで主定理を再掲する.

定理 ([KKM$^+$23, の特殊な場合])**.** 群 G とその交換子部分群 N に対し, $W(G,N)$ が有限次元だとする. $W(G,N)$ の次元を l とおく. このとき, 写像 $\iota\colon ([G,N],\mathrm{scl}^+_{G,N}) \to ([G,N],\mathrm{scl}^+_G)$ の粗核は $(\mathbb{Z}^l, \|\cdot\|_1)$ と粗同型である.

具体的な粗同型写像は以下のように与えられる. $W(G,N)$ の次元が l なので, $W(G,N)$ の基底 $[\nu_1],\cdots,[\nu_l]$ を取る. $W(G,N)$ の定義から各 ν_i は $\mathrm{Q}(N)^G$ の元である. ここで $\Phi^{\mathbb{R}}\colon [G,N]\to\mathbb{R}^l$ を $z\in[G,N]$ に対し

$$\Phi^{\mathbb{R}}(z) = (\nu_1(z),\cdots,\nu_l(z))$$

で定める. 包含写像 $(\mathbb{Z}^l, d_{\|\cdot\|_1}) \to (\mathbb{R}^l, d_{\|\cdot\|_1})$ は粗同型写像なので, 粗逆写像 $\rho\colon \mathbb{R}^l\to\mathbb{Z}^l$ を取り, $\Phi = \sigma\circ\Phi^{\mathbb{R}}\colon [G,N]\to\mathbb{Z}^l$ とおく. 不変擬準同型 $\nu_1,\cdots,\nu_l$ をうまくとることで, Φ が粗核への粗同型写像となる. Φ の粗逆写像の一般的な構成は多少の準備が必要なのでここでは立ち入らない (以下の例 4.1 も参照). 証明の詳細は [KKM$^+$23] を参照されたい.

例 4.1. G を種数 2 以上の閉曲面の基本群とし, N を G の交換子部分群とする. このとき, $\dim W(G,N) = 1$ となる ([KKM$^+$21]). よって主定理から写像 $\iota\colon ([G,N],\mathrm{scl}^+_{G,N}) \to ([G,N],\mathrm{scl}^+_G)$ の粗核は $(\mathbb{Z},\|\cdot\|_1)$ と粗同型である. 写像 $\iota\colon ([G,N],\mathrm{scl}^+_{G,N}) \to ([G,N],\mathrm{scl}^+_G)$ の粗核および $(\mathbb{Z},\|\cdot\|_1)$ から粗核への粗同型写像は以下で与えられる.

G の表示として以下の標準的なものを考える:

$$G = \langle a_1,b_1,\cdots,a_g,b_g \mid [a_1,b_1]\cdots[a_g,b_g]=1\rangle.$$

G の部分集合 A を

$$A = \{[a_1,b_1^m]\cdots[a_g,b_g^m] \mid m\in\mathbb{Z}\}$$

で定める. ここで $[a_i,b_i^m] = [a_i,b_i]\cdot(b_i[a_i,b_i]b_i^{-1})\cdot\cdots\cdot(b_i^{m-1}[a_i,b_i]b_i^{1-m})$ であり, これらは $G/[G,N]$ 内では $[a_i,b_i]^m$ と同値である. また $G/[G,N]$ 内では $[a_i,b_i]$ と $[a_j,b_j]$ は可換なので, $[a_1,b_1^m]\cdots[a_g,b_g^m]$ は $([a_1,b_1]\cdots[a_g,b_g])^m$ と同値である. G の関係式よりこれは単位元であり, したがって $A\subset[G,N]$ が分かる. この A が写像 $\iota\colon ([G,N],\mathrm{scl}^+_{G,N}) \to ([G,N],\mathrm{scl}^+_G)$ の粗核を代表する.

写像 $\Psi\colon \mathbb{Z} \to A$ を $m \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\Psi(m) = [a_1, b_1^m] \cdots [a_g, b_g^m]$$

で定める．これが $(\mathbb{Z}, \|\cdot\|_1)$ から粗核への粗同型写像である．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP19K14536, JP21K03241, JP21K13790, JP23KJ1938, JP23K12971, JP23K12975 の助成, および JST, 未来社会創造事業, JPMJMI22G1 の支援を受けたものである．

参考文献

[Bav91] Christophe Bavard, *Longueur stable des commutateurs*, Enseign. Math. (2) **37** (1991), no. 1-2, 109–150.

[BF02] Mladen Bestvina and Koji Fujiwara, *Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups*, Geom. Topol. **6** (2002), 69–89.

[KKM+21] Morimichi Kawasaki, Mitsuaki Kimura, Shuhei Maruyama, Takahiro Matsushita, and Masato Mimura, *The space of non-extendable quasimorphisms*, to appear in Algebr. Geom. Topol., *arXiv:2107.08571v5* (2021).

[KKM+23] ______, *Coarse group theoretic study on stable mixed commutator length*, arXiv:2306.08618 (2023).

[KKMM22] Morimichi Kawasaki, Mitsuaki Kimura, Takahiro Matsushita, and Masato Mimura, *Bavard's duality theorem for mixed commutator length*, Enseign. Math. **68** (2022), no. 3-4, 441–481.

[LV23] Arielle Leitner and Federico Vigolo, *An invitation to coarse groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2339, Springer, Cham, [2023] ©2023.

[Roe03] John Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, vol. 31, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.