Divergence properties of Thompson-like groups

鹿児島大学 学術研究院理工学域理学系 児玉 悠弥
Yuya Kodama
Graduate School of Science and Engineering,
Kagoshima University

概 要

有限生成無限群に対して, その "無限遠での繋がりの強さ" を表す関数を divergence function という．幾何学的群論における重要な研究対象である Thompson 群 F, T, V に対して, それらの divergence function が論文 [9] で計算された．本稿では [11] を中心に, その後の進展について紹介する．本稿は, 京都大学数理解析研究所国際共同利用・共同研究拠点事業の助成を受け作成されたものである．

1 Divergence function

f, g を非負整数 $\mathbb{Z}_+$ からそれ自身への写像とする．ある定数 $A, B, C, D, E \geq 0$ が存在して, 任意の $x \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$f(x) \leq Ag(Bx + C) + Dx + E$$

が成り立つとき, $f \preceq g$ と定める．$f \preceq g$ と $g \preceq f$ が共に成り立つとき, 写像 f と g が同値であると定める．定義から明らかに, 全ての線形写像や定値写像は同値である．

有限生成群 G とそのひとつの生成集合 S から定まるケイリーグラフを Γ とし, 自然に距離空間とみなす．すなわち, $g, h \in G$ に対し, g と h の距離を $|gh^{-1}|_S$ と定める．ここで, $|gh^{-1}|_S$ は gh^{-1} の S に関する語長を表す．

$\delta \in (0, 1)$ に対し, Γ の **δ-divergence function** f_δ を次のように定める．語長が n である 2 点 x, y に対し, $\ell_\delta(x, y)$ を原点中心半径 δn の球を避けながら x, y を結ぶ道の中で最小のものの長さとする．一般にはそのような道が存在するとは限らないが, 本稿では存在する場合のみを考える[1]．$S(n)$ を語長が n である元全体からなる集合とし,

$$f_\delta(n) := \max\{\ell_\delta(x, y) \mid x, y \in S(n)\},$$

と定める．この関数は, G の生成集合の取り方によらない[2]．すなわち, 任意の $\delta \in (0, 1)$ に対し, f_δ を Γ に関する divergence function としたとき, G の別の生成集合 S' から定まるケ

[1] このような道が存在することと, 群のエンドの数が 1 であることは必要十分である．

[2] さらに, 擬等長同型のもとで不変である．この意味で, divergence function はエンドの数が 1 である群に特化した擬等長不変量であるといえる．擬等長同型の定義等については, 例えば本講究録内の松家拓稔氏の原稿を参照していただきたい．

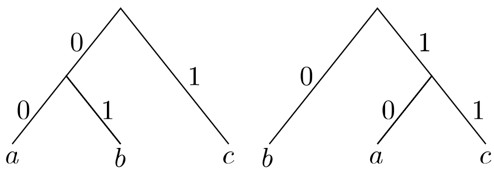

図 1: （ラベル付き）二分木の組

イリーグラフ Γ' に対し, ある $\delta' \in (0,1)$ が存在して, $f_{\delta'}$ は f_δ と同値である [8, Proposition 2.1]. 有限生成群 G から定まるある divergence function が線形写像と同値であるとき, **G は linear divergence をもつ**という.

有限生成群が linear divergence をもつという性質に対して, 次のような幾何学的な性質が対応することが知られている.

Theorem 1.1 ([7, Lemma 3.17]) *G を有限生成群とする. このとき, 以下は同値である.*

1. *G のどの asymptotic cone も cut point をもたない.*
2. *G が linear divergence をもつ.*

2 Thompson's groups and higher-dimensional Thompson's groups

Thompson 群 F, T, V とは, Richard Thompson によって 1965 年に定義された 3 つの有限表示群である. それらのもつ摩訶不思議な性質から, Thompson-like な群[3]が多数構成されてきた. 本稿では紙面の都合上, F, T, V と nV と呼ばれる群のみを定義する. これらの群についての詳細は, 例えば [1,6,11] 等を参照していただきたい.

図 1 のような, 辺と葉がラベル付けられた根付き二分木の組を考える. 根から各葉までの辺のラベルを順に読むことで, 左側の二分木から, カントール空間 $\mathfrak{C} = \{0,1\}^\omega$ の分割 $\{00\zeta \mid \zeta \in \mathfrak{C}\} \cup \{01\zeta \mid \zeta \in \mathfrak{C}\} \cup \{1\zeta \mid \zeta \in \mathfrak{C}\}$ が得られる. 同様に考えることで, 右側の二分木からは, $\mathfrak{C} = \{0\zeta \mid \zeta \in \mathfrak{C}\} \cup \{10\zeta \mid \zeta \in \mathfrak{C}\} \cup \{11\zeta \mid \zeta \in \mathfrak{C}\}$ という分割が得られる. それぞれの葉に $\mathfrak{C}$ の部分集合が対応していることに注意すると, "同じラベルが付いた葉を対応させる" ことで, $\mathfrak{C}$ からそれ自身への写像 f が次のように定まる.

$$f(\zeta) = \begin{cases} 10\eta & (\zeta = 00\eta) \\ 0\eta & (\zeta = 01\eta) \\ 11\eta & (\zeta = 10\eta) \end{cases}$$

一般に, 葉の数が等しい二分木の組（葉の数を m とする）と対称群 S_m の元が与えられると, 上と同様の方法で $\mathfrak{C}$ 上の写像が得られる. これらの写像は全て $\mathfrak{C}$ 上の同相写像であり, このような写像全体からなる集合は, 写像の合成に関して $\mathfrak{C}$ の同相群の部分群をなす.

[3]本稿では, Thompson 群に似ていると筆者が思っている群のことを総じて Thompson-like な群と呼ぶ. Thompson-like な群を厳密に定義しようという研究の流れもある.

図 2: 二分木の組の “1 次元化”

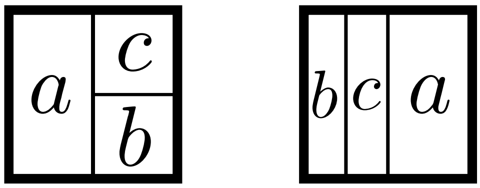

図 3: 正方形の分割の組

この群を, **Thompson 群** V という. 対称群の元を, 巡回置換のみに制限することで得られる V の部分群を **Thompson 群** T といい, 恒等写像のみに制限することで得られる T の部分群を **Thompson 群** F という. いずれも有限表示群であり, 特に V, T は単純で有限表示可能な無限群の初めての例であることが知られている. F は単純群ではないが, その交換子部分群は単純群である.

次に, V の各元を「ひとつの」カントール集合 $\mathfrak{C}$ 上の同相写像だとみなし, その “高次元化”, すなわち $\mathfrak{C}^n$ 上の写像を考える. 簡単のため, $n=2$ の場合の定義を説明する. 二分木における各分岐と, 閉区間 $[0,1]$ を半分に分割していくこととを対応させれば, 図 1 は図 2 のような “1 次元” の情報の組とみなせる. 正確には, まず 2 分木の頂点に閉区間 $[0,1]$ を対応させ, 分岐する毎に親の頂点に対応する区間を 2 等分し, 左側の子には左側の区間を, 右側の区間には右側の区間を対応させる操作を行うことで, 帰納的に葉に対応する区間の分割が得られる. そこで, $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ からそれ自身への写像 g を, 図 3 のような正方形 $[0,1]^2$ の分割の組と置換に対し, 次のように定める.

$$g(\zeta_1, \zeta_2) = \begin{cases} (1\eta_1, \zeta_2) & (\zeta_1 = 0\eta_1) \\ (00\eta_1, \eta_2) & (\zeta_1 = 1\eta_1 \text{ かつ } \zeta_2 = 0\eta_2) \\ (01\eta_1, \eta_2) & (\zeta_1 = 1\eta_1 \text{ かつ } \zeta_2 = 1\eta_2) \end{cases}$$

すなわち, $[0,1]^2$ が $\mathfrak{C}^2$ を表しているとみなし, “縦” に分割するときには 1 次元のときと同様の分割をひとつめの $\mathfrak{C}$ に対して行い, “横” に分割するときには 1 次元のときと同様の分割をふたつめの $\mathfrak{C}$ に対して行う. そうして得られた $\mathfrak{C}^2$ のふたつの分割に対し, “同じラベルが付いた長方形” を対応させることで, $\mathfrak{C}^2$ 上の写像が定まる.

一般に, 長方形の数が等しい正方形の分割の組（長方形の個数を m とする）と対称群 S_m の元が与えられると, 上と同様の方法で $\mathfrak{C}^2$ 上の写像が得られる. これらの写像は全て $\mathfrak{C}^2$ 上の同相写像であり, このような写像全体からなる集合は, 写像の合成に関して $\mathfrak{C}^2$ の同相群の部分群をなす. この群を, **2 次元 Thompson 群** $2V$ という. さらに, $[0,1]^n$ に対して同様に定めることで, $\mathfrak{C}^n$ の同相群の部分群が得られる. この群を, **n 次元 Thompson 群** nV という. 定義から明らかに, $1V = V$ が成り立つ.

V の場合と同様に, nV は有限表示単純群である. また, $n = m$ であることと $nV \cong mV$ であることは必要十分であることが知られている[4].

[4]筆者の知る限り, $n \neq m$ であるときに nV と mV が擬等長同型かどうかは現在でも未解決問題である.

3 Metric properties

有限生成群 G が linear divergence function をもつことを示すためには, 語距離が n の任意の元 g に対し, 以下の条件を満たす道 w を構成すればよい.

1. w は, g と, n のみに依存して定まる元を結ぶ.
2. ある（n に依存しない）定数 C が存在し, w の長さは $Cn + C$ で上から評価できる.
3. ある（n に依存しない）定数 $\delta \in (0,1)$ が存在し, w 上の各点と単位元の距離（すなわち各点の語長）は δn より大きい.

条件 1, 2 は, うまく道が構成できた際には比較的容易に証明できるが, 条件 3 は難しい場合が多い. なぜなら, 語長が δn より大きいことを示すためには, 生成集合上のどのような語を用いても, その長さが δn より大きいことを示さないといけないからである. この事情により, 一般の有限生成群の divergence function を計算するのは非常に難しいが, Thompson 群の場合にはこの問題をある程度回避することができる. V の元 g に対し, その元を実現する二分木の組の中で葉の数が最小なものをとり, その葉の数を $N(g)$ と表す[5]. このとき次が知られている.

Theorem 3.1 ([2, 5]) *ある定数 $C \geq 1$ が存在し, 次が成り立つ.*

1. *$g \in F$ に対し, $N(g)/C \leq |g|_F \leq CN(g)$.*
2. *$g \in T$ に対し, $N(g)/C \leq |g|_T \leq CN(g)$.*
3. *$g \in V$ に対し, $N(g)/C \leq |g|_V \leq CN(g) \log N(g)$.*

ただし, 各群の生成集合は適当にひとつとり固定しておく.

一般の V の元については, どのような C をとっても上から $CN(g)$ では評価できないことが知られている. また, 生成集合を取り替えた際の語長は元の語長の定数倍で上下から評価できるため, 上の主張は生成集合の取り方によらない. 従ってこの定理により, 語長を計算する代わりに葉の数を数えればよいことになり, 条件 3 は比較的容易に確かめることができる.

nV の場合も, 語長を幾何学的に評価することができる. nV の元 g に対し, その元を実現する $[0,1]^n$ の分割の組のうち, 分割された n 次元直方体（$n = 2$ のときは長方形）の数が最小のものをとる. このとき, 各 n 次元直方体はいくつかの "2 等分" を組み合わせることで得られるが, その "2 等分" の数の最大値を $L(g)$ と置く[6]. 例えば, 図 3 の左右の a とラベル付けられた長方形は 1 回の "2 等分" で得られ, 残りの長方形は全て 2 回の "2 等分" で得られるため, この元 g から定まる $L(g)$ は 2 である.

[5] 本稿では説明しないが, このような二分木の組は各元に対し一意的に定まることが知られており, その最小な組を見つけるアルゴリズムも存在している. 従って, この値の計算は容易である.

[6] 本稿では説明しないが, Thompson 群とは異なり, このような分割の組は一意的に定まらない. また, 最小な分割の組を見つけるアルゴリズムも知られておらず, この値を計算するのは困難である. そのため [11] では, [3] で開発された各元を一意的に表す方法を用いて, $L(g)$ に比べると容易に計算できる値を導入し, その値によって語長が下から評価できることを証明している.

Theorem 3.2 ([4]) ある定数 C が存在し, $g \in nV$ に対し,

$$\frac{L(g)}{C} \leq |g|_{nV}$$

が成り立つ.

4 Divergence functions of Thompson-like groups

Golan–Sapir は, 前節で紹介した語距離の評価を用いて, Thompson 群の divergence function を計算した.

Theorem 4.1 ([9]) *F, T, V はいずれも linear divergence をもつ.*

次が本稿における主定理である.

Theorem 4.2 ([11]) *nV は linear divergence をもつ.*

証明は組合せ論的に与えられるため, 詳細は説明しないが, そのあらすじは前節で説明したとおりである. ここでは nV における, 条件 1, 2 を満たす道の構成方法を概説する. 以下の説明で出てくる生成集合上の語 w_1, w_2, w_3 は, 論文 [11] における $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ とは異なるものを表しているので注意されたい.

語距離が n である元 g を取る. まず, gw_1 の台[7]が "非常に小さく" なるような w_1 で, 長さが高々n の定数倍であるものを見つける. おおよそのアイデアは, g が表す分割内の n 次元直方体のひとつを十分に細かく細分してから, その n 次元直方体以外の全ての部分を恒等写像にしてしまう, というものである. 次に, 以下の条件を満たすように w_2 を定める： w_2 は n のみによって定まり, 長さが高々n の定数倍である語で, さらに w_2 の台は gw_1 の台と共通部分をもたない. これは, gw_1 の台が "とても小さい" ことにより可能である. 台に関する仮定により, w_2 と gw_1 は可換であることに注意する. 最後に w_3 を, $(gw_1)^{-1}$ を表す最短の語と定める. w_1 の構成により, w_3 の長さも高々n の定数倍である. このとき, nV の元として以下が成り立つ.

$$gw_1w_2w_3 = w_2(gw_1)(gw_1)^{-1} = w_2.$$

w_2 が n のみによって定まる語であったので, $w = w_1w_2w_3$ とすれば, 条件 1 が満たされることが確認できる.

最後に, その他の Thompson-lile な群の divergence function に関する結果を紹介する. それぞれの群の詳細な定義等については, 引用している論文を参照していただきたい.

カントール空間 $\mathfrak{C} = \{0,1\}^\omega$ を n 進カントール空間 $\{0, 1, \ldots, n-1\}^\omega$ に一般化することで, Thompson 群の一般化 $F(n), T(n), V(n)$ を定義することができる. これらの群に対して, 以下が成り立つ.

Theorem 4.3 ([13]) *$F(n), T(n), V(n)$ はいずれも linear divergence をもつ.*

[7] ここでいう**台**とは, $gw_1(x) \neq x$ を満たす元 $x \in \mathfrak{C}^n$ 全体からなる集合のことである.

V の各元は 2 分木の組と対称群の元の 3 つの情報から定まるのであった. 対称群の部分を組紐群に置き換えることで, より複雑な群 BV が定義される. この群に対して, 以下が成り立つ.

Theorem 4.4 ([10]**, cf.** [14]**)** BV は *linear divergence* をもつ.

Thompson 群 F は, その従順性が未解決である. そこで, F と比較的振る舞いが似た非従順群として, Lodha–Moore 群 G_0 が定義された. G_0 も $\mathfrak{C}$ の同相群の部分群として実現される. この群に対して, 以下が成り立つ.

Theorem 4.5 ([12]**)** G_0 は *linear divergence* をもつ.

以上のように, Thompson 群の様々な一般化に対して, その divergence function が計算されてきた. 上記のような一般化を組合せて得られる他の群たちも, 同様に linear divergence をもつことが期待される. 一方, そのような幾何学的な実現を持たない群, 例えば Kim–Koberda–Lodha による chain 群などの divergence function は, 非自明な未解決問題のひとつとして挙げられるだろう.

参考文献

[1] M. G. Brin, *Higher dimensional Thompson groups*, Geom. Dedicata **108** (2004), 163–192.

[2] J. Burillo, S. Cleary, and M. I. Stein, *Metrics and embeddings of generalizations of Thompson's group F*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 4, 1677–1689.

[3] J. Burillo, S. Cleary, and B. Nucinkis, *Grid diagrams for higher-dimensional Thompson's groups*, arXiv preprint arXiv:2403.02562 (2024).

[4] J. Burillo and S. Cleary, *Metric properties of higher-dimensional Thompson's groups*, Pacific J. Math. **248** (2010), no. 1, 49–62.

[5] J. Burillo, S. Cleary, M. Stein, and J. Taback, *Combinatorial and metric properties of Thompson's group T*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), no. 2, 631–652.

[6] J. W. Cannon, W. J. Floyd, and W. R. Parry, *Introductory notes on Richard Thompson's groups*, Enseign. Math. (2) **42** (1996), no. 3-4, 215–256.

[7] C. Druţu, S. Mozes, and M. Sapir, *Divergence in lattices in semisimple Lie groups and graphs of groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), no. 5, 2451–2505.

[8] S. M Gersten, *Quadratic divergence of geodesics in CAT(0) spaces*, Geom. Funct. Anal. **4** (1994), no. 1, 37–51.

[9] G. Golan and M. Sapir, *Divergence functions of Thompson groups*, Geom. Dedicata **201** (2019), 227–242.

[10] Y. Kodama, *Divergence function of the braided Thompson group*, Kyoto J. Math. **63** (2023), no. 2, 435–470.

[11] ———, *Divergence functions of higher-dimensional Thompson's groups*, arXiv preprint arXiv:2405.19923 (2024).

[12] L. Lifschitz, *Divergence of the Lodha–Moore group*, Proc. Am. Math. Soc. (in press), available at `https://doi.org/10.1090/proc/14987`.

[13] X. Sheng, *Divergence Property of the Brown–Thompson Groups and Braided Thompson Groups*, Transform. Groups (online first), available at `https://doi.org/10.1007/s00031-023-09839-8`.

[14] 児玉 悠弥, *Braided Thompson* 群の *divergence function* について (離散群と双曲空間の幾何学), 数理解析研究所講究録 **2219** (2022), 19–25.