$\mathbb{H}^2$ の等長変換群と群の順序

東京科学大学 地引知栄 *
Chihaya Jibiki†
Institute of Science Tokyo

1 はじめに

論文 [2] では，次の主張が証明されている．

Theorem 1.1. 群 $F_{2n} * \mathbb{Z}_{m_1} * \cdots * \mathbb{Z}_{m_k}$ は *isolated* な *circular order* を持つ．

本稿では，[2] におけるこの circular order の構成法を解説する．その際，ポアンカレ円板の等長変換群 $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^2)$ の性質を用いる．一方，isolated 性の詳細な議論については [2] を参照されたい．

2 isolated order とは

Definition 2.1. 群 Γ に対して，写像 $c\colon \Gamma^3 \to \{0, \pm 1\}$ が Γ 上の *circular order* であるとは，次を満たすことである：

1. $c(g_1, g_2, g_3) = 0$ if $g_i = g_j$ for some $i \neq j$,
2. $c(g_2, g_3, g_4) - c(g_1, g_3, g_4) + c(g_1, g_2, g_4) - c(g_1, g_2, g_3) = 0$ for every $g_1, g_2, g_3, g_4 \in \Gamma$,
3. $c(gg_1, gg_2, gg_3) = c(g_1, g_2, g_3)$ for every $g, g_1, g_2, g_3 \in \Gamma$.

$CO(\Gamma)$ を Γ 上の circular order 全体の集合とする．$CO(\Gamma)$ は積空間 $\{0, \pm 1\}^{\Gamma^3}$ の部分空間として位相空間をなす．この空間は特にはコンパクト完全不連結空間であり，Γ が可算群ならば距離化可能であることが知られている [4].

Definition 2.2. circular order c が *isolated* であるとは，c が $CO(\Gamma)$ の isolated point であることをいう．

isolated order を見つける方法として，その order から群作用を構成する方法が有用である．

可算群 Γ とその circular order c を固定する．基点 $x_0 \in S^1$ をとる．$S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とする．数え上げ $\Gamma = \{g_0, g_1, \dots\}$ を $g_0 = 1$ として任意にとる．そして次の手順で埋め込み $\iota : \Gamma \to S^1$ を構成する．

$\iota(1) = x_0$ とし，$\iota(g_1) = x_0 + 1/2$ と定める．全ての $i \leq n$ で $\iota(g_i)$ が定義されたとしたとき，$\iota(g_{n+1})$ は $S^1 \setminus \{\iota(g_0), \dots, \iota(g_n)\}$ 内で，任意の $i, j, k \leq n+1$ に対し次を満たす唯一の連結成分の中点として定める：

$$c(g_i, g_j, g_k) = \mathrm{ord}(\iota(g_i), \iota(g_j), \iota(g_k)).$$

ただし，$\mathrm{ord} : (S^1)^3 \to \{0, \pm 1\}$ は S^1 上の標準的な circular order である．この構成により Γ 自身への左作用は，$\iota(\Gamma)$ 上の向きを保つ連続作用を与える．この作用は $\iota(\Gamma)$ の閉包へ連続的に拡張できる．さらに，残りの

* E-mail:chihaya.j@gmail.com
† 本研究は JST SPRING(JPMJSP2106)，および京都大学の国際共同利用・共同研究拠点である数理解析研究所の支援を受けている．また金沢大学の丸山修平氏との共同研究である．

S^1 内の区間へ affinely に拡張することで，S^1 全体へ拡張される．これにより S^1 上の向きを保つ同相な作用 $\rho_c : \Gamma \to \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ を得る．これを基点 x_0 での circular order c の *dynamical realization* と呼ぶ．構成より軌道 $\rho_c(\Gamma) \cdot x_0$ の S^1 上での並びが circular order を復元する．

dynamical realization の共役類は Γ の数え上げの取り方によらないことが知られている．したがって，次の写像が定義される：

$$R : CO(\Gamma) \to \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Homeo}_+(S^1))/\sim .$$

ただし，$\sim$ は共役関係である．この R を *realization map* という．$\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Homeo}_+(S^1))$ は各点収束位相を持つことに留意すると，次が知られている．

Theorem 2.3 ([3, Proposition 3.3])**.** *realization map* R *は連続である．*

3 circular order の構成

任意の $n \geq 0$, $k \geq 1$, $m_1, \cdots, m_k \geq 2$ に対して，$G = \mathbb{Z}_{m_1} * \cdots * \mathbb{Z}_{m_k} * F_{2n}$ とおく．本節では，G が $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^2)$ の部分群であることを示し，dynamical realization を通づて circular order を構成することを目標とする．

まず，G が有限巡回群である場合，circular order は有限個しか存在しないため，1.1 の結論が成立する．また，$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ に同型である場合も，[1] の結果により，こちらも circular order が有限個しか存在しないため，1.1 の結論が成立する．よって G がこれらの群ではない場合を考える．

$\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^2) \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ であり，この群が $\mathbb{H}^2$ 上に一次分数変換として作用することは知られている．この作用はコンパクト化 $\overline{\mathbb{H}^2}$ へ拡張され, 理想境界 $\partial\overline{\mathbb{H}^2} \simeq S^1$ 上に作用を誘導するため, $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^2) \subset \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ を得る．この作用を用いて，G をポアンカレ円板上の作用として次のように実現する．

Lemma 3.1. *$Isom_+(\mathbb{H}^2)$ の部分群で G と同型なものが存在する．*

Proof. 以下では，任意の $x, y \in [0, 1]$ に対して，S^1 上の閉区間 $[x, y]$, 開区間 (x, y) を短い方で取るものとする．ポアンカレ円板上の一次分数変換には elliptic, hyperbolic, parabolic の 3 種類が存在する．$e_1, ..., e_k, h_1, ..., h_{2n} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ を以下の条件を満たすように選ぶ (図 1 を参照)．任意の $i \in \{1, \ldots, k\}$ と $j \in \{1, ..., 2n\}$ に対して，e_i は elliptic な元で $\frac{2\pi}{m_i}$-回転なものであり，h_j は hyperbolic な元である．点 x_{e_1} を S^1 の基点とする．必要に応じて，h_i を十分大きな $l \in \mathbb{N}$ による h_i^l へと取り替えることで，ある $x_i^-, x_i^+ \in S^1$ が存在して，

$$\begin{aligned}
&x_{e_1}, \ldots, x_{e_k}, \\
&h_1(x_1^+), h_1(x_1^-), x_2^-, x_2^+, x_1^-, x_1^+, h_2(x_2^+), h_2(x_2^-), \\
&\ldots, h_{2n-1}(x_{2n-1}^+), h_{2n-1}(x_{2n-1}^-), x_{2n}^-, x_{2n}^+, x_{2n-1}^-, x_{2n-1}^+, h_{2n}(x_{2n}^+), h_{2n}(x_{2n}^-)
\end{aligned}$$

が S^1 上で反時計回りに並ぶようにとれる (図 1).

このとき, 図 1 の中央の領域 P は $e_1, ..., e_k, h_1, ..., h_{2n}$ 達の基本領域の共通であるため, $\langle e_1, ..., e_k, h_1, ..., h_{2n} \rangle <$ $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ の基本領域である．また任意の $i \in \{1, \ldots, k\}, j \in \{1, \ldots, 2n\}$ に対し，S^1 上の閉区間を

$$\begin{aligned}
X_{e_i} &:= [x_{e_i}, e_i^{m_i - 1}(x_{e_i})], \\
X_{h_j} &:= [x_j^-, x_j^+] \cup [h_j(x_j^+), h_j(x_j^-)]
\end{aligned}$$

で取る．$e_i(S^1 \setminus X_{e_i}) \subset X_{e_i}$ かつ $h_j(S^1 \setminus X_{h_j}) \subset X_{h_j}$ であるため，Ping-pong Lemma により，$\langle e_1, ..., e_k, h_1, ..., h_{2n} \rangle$ は自由群であり G と同型である．

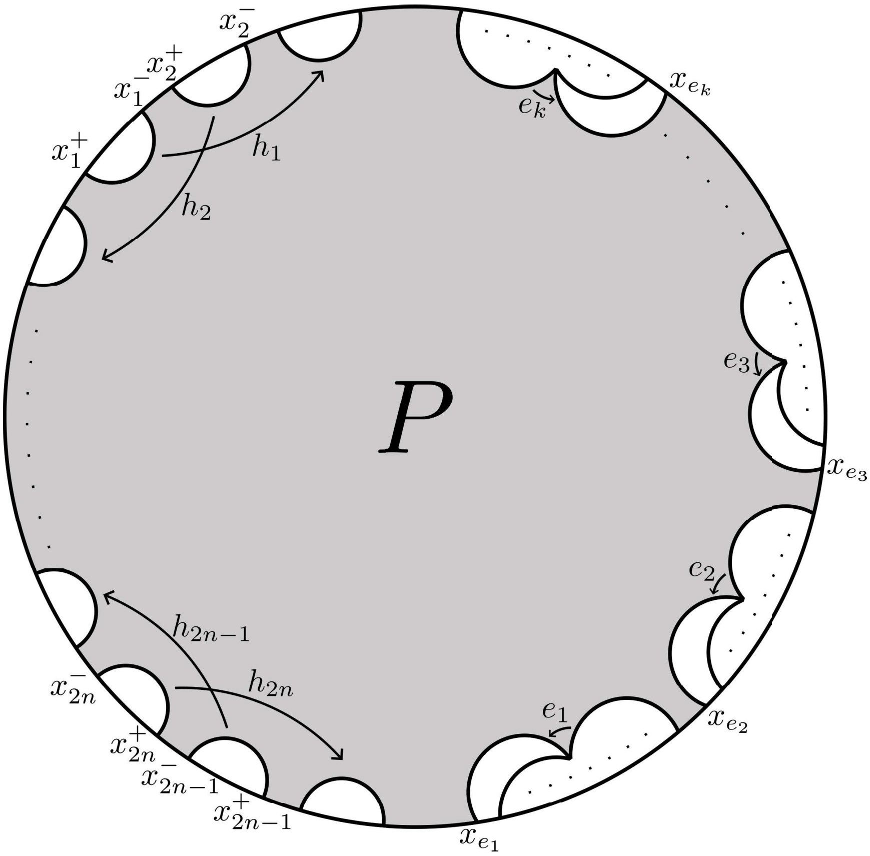

図 1　$\mathbb{H}^2$ 上の G による作用

□

この補題より次の作用が得られる．

$$\rho : \langle e_1, ..., e_k, h_1, ..., h_{2n} \mid e_1^{m_1} = \cdots e_k^{m_k} = 1 \rangle \to \mathrm{Homeo}_+(S^1).$$

G は有限生成なので，ρ は Fuchs 作用である．さらに，G は自由部分群を持つため，amenable 群ではなく，$\rho(G)$ は elementary ではない．よって，limit set L_ρ は ρ での唯一な minimal set である．そして，$L_\rho \subset S_\infty$ は Cantor 集合であり，ρ は第 2 種 Fuchs 作用であるとことがわかる．これを用いて，ρ による基点 x_{e_1} の軌道を詳細に追うことで次が示される．

Lemma 3.2. 作用 ρ はある *circular order* の *dynamical realization* である．

この補題より，ρ が $CO(G)$ の realization map の像に属することがわかる．また軌道 $\rho(G) \cdot x_{e_1}$ を追うことで，circular order を復元できるため，$R^{-1}(\rho)$ は単集合であり，その元が求めていた circular order である．

参考文献

[1] Adam Clay, Kathryn Mann, and Cristóbal Rivas. On the number of circular orders on a group. *J. Algebra*, 504:336–363, 2018.

[2] Chihaya Jibiki and Shuhei Maruyama. Isolated circular orders on free products of cyclic groups, 2024.

[3] Kathryn Mann and Cristóbal Rivas. Group orderings, dynamics, and rigidity. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 68(4):1399–1445, 2018.

[4] Adam S. Sikora. Topology on the spaces of orderings of groups. *Bull. London Math. Soc.*, 36(4):519–526, 2004.