緩振動関数の束
(Lattices of Slowly Oscillating Functions)

新居浜工業高等専門学校　数理科　岩本　豊 *
Yutaka Iwamoto
Faculty of Fundamental Science
National Institute of Technology, Niihama College

空間上の連続関数からなる束の構造と空間の位相構造の関係は 1930 年代から調べられてきた．初期の結果としては，コンパクト距離空間，コンパクト Hausdorff 空間について，その空間上の実数値連続関数からなる束が位相構造を決定することがそれぞれ S. Banach と M. H. Stone によって示され，このような定理はその後バナッハ・ストーン型定理と呼ばれるようになった．一様連続関数の束に対するバナッハ・ストーン型定理は初期の段階でも扱われてきたが，2000 年代に入ってからこの方面の研究が再燃し，活発な研究が行われ現在に至っている．本稿では，これら最近の研究の中から，特に Félix Cabello Sánchez と Javier Cabello Sánchez たちが一様連続写像からなる束に対して考案した束同型写像から位相同型写像を構成する方法に注目し，その構成方法を緩振動関数からなる束上の束同型写像に適用することで，緩振動関数束に対するバナッハ・ストーン型定理が得られること について解説し，線形な束同型写像に対する表現定理についても言及する [11]．これにより粗幾何学で扱われる Higson コンパクト化間の位相同型写像と緩振動関数からなる束間の束同型写像が結び付くことになる．

1　歴史的背景

コンパクト空間 X 上の実数値連続関数全体を $C(X)$ で表す．$C(X)$ の要素に対する和と積，ならびにスカラー倍を各点で与えることで，$C(X)$ は線形空間となる．$C(X)$

* 本研究は JSPS 科研費 JP24K06726 の助成を受けたものです。

の要素 f に対するノルムを $||f|| = \sup\{f(x) : x \in X\}$ で与え，このノルムを用いて $f, g \in C(X)$ に対し

$$\rho(f, g) = ||f - g||$$

と定めれば，ρ は $C(X)$ 上の完備な距離となり，結果として $(C(X), \rho)$ は完備ノルム空間（バナッハ空間）となる．

ノルム空間 X, Y 間の全単射写像 $T : X \to Y$ が**等長** (isometry) であるとは

$$||T(x) - T(x')|| = ||x - x'||$$

が任意の $x, x' \in X$ に対して成り立つことをいい，X と Y は**等長同型** (isometric) であるという．

次の定理は Banach の定理として有名である [1, p.170, Théorèm 3][*1].

定理 1.1 (S. Banach, 1932)**.** コンパクト距離空間 X, Y に対し，$C(X)$ と $C(Y)$ が等長同型である必要十分条件は X と Y が位相同型となることである． □

Stone が上記定理をコンパクト Hausdorff 空間へ拡張した [16, Theorem 83]：

定理 1.2 (M. H. Stone, 1937)**.** コンパクト *Hausdorff* 空間 X, Y に対し, $C(X)$ と $C(Y)$ が等長同型である必要十分条件は X と Y が位相同型となることである． □

関数環の代数構造が空間の位相構造を決定することは Gelfand と Kolmogoroff によって示された [5].

定理 1.3 (I. Gelfand and A. N. Kolmogoroff, 1939)**.** コンパクト *Hausdorff* 空間 X, Y に対し，$C(X)$ と $C(Y)$ が環順同型である必要十分条件は X と Y が位相同型となることである． □

関数束が空間の位相構造を決定することは Kaplansky によって初めて示された [12].

定理 1.4 (I. Kaplansky, 1947)**.** コンパクト *Hausdorff* 空間 X, Y に対し, $C(X)$ と $C(Y)$ が束同型である必要十分条件は X と Y が位相同型となることである． □

X を完備距離空間とし，$\mathcal{U}(X)$ を X 上の実数値一様連続関数全体からなる束，そして $\mathcal{U}^*(X)$ を $\mathcal{U}(X)$ の有界写像からなる部分束とする．この $\mathcal{U}^*(X)$ の束構造が空間の一様位相構造を決定することは Shirota によって示された [15].

[*1] 原著 [1] の他に，F. Jellet による英訳本 [2] がある．現在は Dover 版が入手可能である．

定理 1.5 (T. Shirota, 1952)**.** 完備距離空間 X, Y に対し，有界一様連続関数の束 $\mathcal{U}^*(X)$ と $\mathcal{U}^*(Y)$ が束同型である必要十分条件は X と Y が一様同相になることである． $\square$

なお，これより少し前に Nagata によって一様連続関数の束に対する考察が（少し違う形で）与えられていたことに注意しておく [17]．Shirota は論文 [15] の中で，一様連続関数の束 $\mathcal{U}(X)$ が空間 X の一様位相構造を決定することも同時に主張したが，その証明は約 60 年後に，F. Cabello Sánchez, J. Cabello Sánchez たちによって与えられた [3].

定理 1.6 (F. Cabello Sánchez, J. Cabello Sánchez, 2013)**.** 完備距離空間 X, Y に対し，$\mathcal{U}(X)$ と $\mathcal{U}(Y)$ が束同型である必要十分条件は X と Y が一様同相になることである． $\square$

更に彼らは一様連続関数の束に対する束同型写像から導かれる自然な位相同型写像を構成し，その性質を明らかにした [3, Theorem 1]：

定理 1.7 (F. Cabello Sánchez, J. Cabello Sánchez, 2013)**.** *X, Y を完備距離空間とし，$T : \mathcal{U}(Y) \to \mathcal{U}(X)$: を束同型写像とする．このとき T から導かれた一様同相写像 $\tau : X \to Y$ で次をみたすものが存在する：*

$$(Tf)(x) = t(x, f(\tau(x))) \quad (f \in \mathcal{U}(Y),\ x \in X),$$

ここに $t : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $t(x, c) = (Tc)(x)$ として定義された写像であり，c は左辺では実数値として与えられ，右辺では定数値関数を表していることに注意する． $\square$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ X \arrow[u, "T(f)(x)=Tg(x)"] \arrow[r, "\tau"] & Y \arrow[u, "f(\tau(x))=g(\tau(x))"'] \end{tikzcd}$$

特に線形束同型写像に関しては次が従う [3].

定理 1.8 (F. Cabello Sánchez, J. Cabello Sánchez, 2013)**.** *X, Y を完備距離空間とし，$T : \mathcal{U}(Y) \to \mathcal{U}(X)$: を線形束同型写像とする．このとき T から導かれた一様同相写像 $\tau : X \to Y$ によって，T は重み付き合成作用素として次のように表される：*

$$(Tf)(x) = \omega(x) \cdot f(\tau(x)) \quad (f \in \mathcal{U}(Y),\ x \in X),$$

ここに $\omega = T(1)$ である． $\square$

本稿は第 2 節で緩振動関数の束と Higson コンパクト化の関係を述べ，第 3 節で F. Cabello Sánchez と J. Cabello Sánchez の手法を緩振動関数の束に適用することで位相同型写像を構成し，第 4 節でその導かれた位相同型写像の性質を調べ，緩振動関数束に対するバナッハ・ストーン型定理や線形束同型写像に対する表現定理について述べる．

2　緩振動関数の束と Higson コンパクト化

この節では緩振動関数の束と，それが定めるコンパクト化である Higson コンパクト化との関係を述べる．

(X, d_X) を距離空間に対し，$B_{d_X}(x, r)$ は中心が x で半径が r である X の閉球を表すものとする．空間 X の距離 d_X が**適正** (proper) であるとは，各 $x \in X$ と $r > 0$ に対し，$B_{d_X}(x, r)$ がコンパクトとなることである．特に断りのない限り，空間 (X, d_X)，(Y, d_Y) は非有界な適正距離空間で，それぞれ起点 x_0，y_0 を持つものとする．

$C(X)$ の有界関数からなる部分族を $C^*(X)$ で表す．束 $\mathcal{L} \subset C(X)$ に対し，$\mathcal{L}^*$ でその有界関数からなる部分束を表すものとする．特に，元の束 $\mathcal{L}$ を指定しない場合においても，$\mathcal{L}^*$ によって，有界値関数からなる束を表すものとする．各束 $\mathcal{L}^* \subset C^*(X)$ に対し，その**評価写像** (the evaluation map)

$$e_{\mathcal{L}^*} : X \to \prod_{f \in \mathcal{L}^*} [\inf f, \sup f]$$

を，各 $x \in X$ に対して，$e_{\mathcal{L}^*}(x) = (f(x))_{f \in \mathcal{L}^*}$ として定める．単位元を持つベクトル束 $\mathcal{L} \subset C(X)$ が X において**点と閉集合を分離する** (separates points from closed sets) とは、任意の閉集合 $F \subset X$ と点 $p \in X \setminus F$ が与えられたとき、$f \in \mathcal{L}$ で $f(p) \notin \mathrm{cl}_{\mathbb{R}} f(F)$ となるものが存在することをいう．$\mathcal{L}^*$ が X において点と閉集合を分離するならば、$e_{\mathcal{L}^*}$ は位相的埋め込み写像となる [4, 2.3.20]．空間 X と像 $e_{\mathcal{L}^*}(X)$ を同一視することで，$\prod_{f \in \mathcal{L}^*} [\inf f, \sup f]$ における閉包

$$K(\mathcal{L}^*) = \overline{e_{\mathcal{L}^*}(X)}$$

は X のコンパクト化を与える．

$\mathcal{K}(X)$ で空間 X のすべてのコンパクト化の族をあらわすことにする．$\alpha X, \gamma X \in \mathcal{K}(X)$ に対し，$\alpha X \succeq \gamma X$ であるとは，連続写像 $f : \alpha X \to \gamma X$ で $f|_X = \mathrm{id}_X$ をみたすものが存在することをいう．$\alpha X \preceq \gamma X$ かつ $\alpha X \succeq \gamma X$ のとき，αX と γX は X の**同等なコンパクト化** (equivalent compactifications) という．X の 2 つの同等なコンパクト化は位相同型である．以降，$(\mathcal{K}(X), \preceq)$ を順序付けられた集合とみることにする．

単位元を持つベクトル束 $\mathcal{L}^* \subset C^*(X)$ が X 上の**関数からなる完備環** (complete ring of functions) であるとは，$\mathcal{L}^*$ がすべての定数値関数を含み，点と閉集合を分離し，かつ上限距離 (sup-metric) に関して閉じた $C^*(X)$ の部分環となることをいう [4, 3.12.22(e)]. $\mathcal{L}^* \subset C^*(X)$ が X 上の関数からなる完備環のとき，$\mathcal{L}^*$ は一意的に X の（同等な）コンパクト化 $K(\mathcal{L}^*)$ を決定する (cf. [4, 3.12.22]). $\mathfrak{C}(X)$ で X 上の関数からなる完備環全体を表す．チコノフ空間 X に対し，$(\mathcal{K}(X), \preceq)$ と $(\mathfrak{C}(X), \subset)$ は順序同型であることが知られている．

(X, d_X)，(Y, d_Y) を距離空間とし，d_X は適正な距離とする．関数 $f : X \to Y$ が**緩振動** (slowly oscillating) であるとは，任意の $R > 0$ と $\varepsilon > 0$ に対し，コンパクト部分集合 $K \subset X$ で，任意の $x \in X \setminus K$ に対して

$$\mathrm{diam}_{d_Y} f(B_{d_X}(x, R)) < \varepsilon$$

が成り立つものが存在することをいう．なお，$A \subset Y$ に対し，$\mathrm{diam}_{d_Y} A$ は集合 A の直径をあらわすものとする．つまり，$\mathrm{diam}_{d_Y} A = \sup\{d_Y(x, y) : x, y \in A\}$ と定める．粗幾何学において緩振動関数はしばしば連続性を仮定せずに議論されるが，本稿ではつねに連続な緩振動関数のみを扱う．

$\mathcal{SO}(X)$ で適正距離空間 (X, d_X) 上のすべての実数値緩振動連続関数からなる集合を表し，$\mathcal{SO}^*(X)$ で $\mathcal{SO}(X)$ の有界関数全体からなる部分集合を表す．実数値緩振動連続関数 $f, g : X \to \mathbb{R}$ に対し，$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$，$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ によって $f \wedge g$ と $f \vee g$ を定めると，$\mathcal{SO}(X)$ と $\mathcal{SO}^*(X)$ は束となる．

適正距離空間 (X, d_X) 上の実数値一様連続関数全体からなる束を $\mathcal{U}(X)$ で表す．距離 d_X が適正であるとき，$\mathcal{SO}(X)$ は $\mathcal{U}(X)$ の部分束となることに注意する (cf. [10]). $\mathcal{U}^*(X)$ と $\mathcal{SO}^*(X)$ は共に X 上の関数からなる完備環である．したがって，$\mathcal{U}^*(X)$ と $\mathcal{SO}^*(X)$ はそれぞれ X のコンパクト化 $sX = K(\mathcal{U}^*(X))$ と $hX = K(\mathcal{SO}^*(X))$ を定める．sX は **Samuel-Smirnov コンパクト化** (cf. [18])，hX は **Higson コンパクト化**と呼ばれる．特に，Higson コンパクト化の剰余 $\nu X = hX \setminus X$ は **Higson コロナ**と呼ばれる (cf. [13], [14]). $\mathcal{SO}^*(X)$ は $\mathcal{U}^*(X)$ の閉部分環だから，$hX \preceq sX \preceq \beta X$ となる．なお，βX は X の Stone-Čech コンパクト化を表す．

次の命題は Higson コンパクト化の基本性質である [13, Proposition 1].

命題 2.1. (X, d_X) を非コンパクトな適正距離空間とするとき，その *Higson* コンパクト化 hX は，コンパクト空間 Y への連続写像 $f : X \to Y$ が hX 上の連続関数へ拡張できる必要十分条件が f が緩振動連続関数であるような，X の唯一のコンパクト化である． $\square$

Samuel-Smirnov コンパクトの場合と同様，次が成り立つ (cf. [6]).

補題 2.2. 適正距離空間 (X, d_X) に対し，その *Higson* コンパクト化 hX の点 x が可算近傍系をもつ必要十分条件は $x \in X$ となることである． $\square$

3 束同型写像と位相同型写像

この節では F. Cabello Sánchez と J. Cabello Sánchez が論文 [3] の中で構築した一様連続写像の束間の束同型写像から位相同型写像を導く方法を，緩振動関数の束を含む束間の束同型写像に対して適応すべく，修正・拡張する．

束 $\mathcal{L}$，$\mathcal{M}$ 間の写像 $T : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ が**束準同型写像**（lattice homomorphism）であるとは，任意の $f, g \in \mathcal{L}$ に対し，

$$T(f \vee g) = T(f) \vee T(g) \text{ かつ } T(f \wedge g) = T(f) \wedge T(g)$$

をみたすことをいう．特に全単射な束準同型写像を**束同型写像**（lattice isomorphism）と呼ぶ．

空間 Y の開集合 U が**正規開集合**（regular open set）であるとは，それ自身の閉包の内点集合が自身と一致すること，つまり，$U = \mathrm{Int}_X(\overline{U})$ となることをいう．空間 Y の空でない正規開集合全体の族を $\mathcal{R}(Y)$ で表す．

連続関数 $f \in C(Y)$ に対し，f の**余零集合**（the cozero set of f）を $\mathrm{coz}(f)$ で表す．つまり，$\mathrm{coz}(f) = \{y \in Y : f(y) \neq 0\}$ とする．また，$O_f = \mathrm{Int}_Y(\overline{\mathrm{coz}(f)})$ とする．容易にわかるように，$O_f \in \mathcal{R}(Y)$ であり，$O_f = O_{-f}$ が成り立つ．

束 $\mathcal{L} \subset C(Y)$ に対し，$\mathcal{L}^+$（resp. $\mathcal{L}^-$）で $\mathcal{L}$ の非負値（resp. 非正値）関数全体からなる部分束を表す．

記述を簡潔にするために，各点 $x \in X$ に対する $d_X(x_0, x)$ を $|x|$ で表すことにする．

補題 3.1. 各正規開集合 $U \in \mathcal{R}(Y)$ に対し，関数 $f \in \mathcal{SO}^*(Y)^+$ で $U = O_f$ をみたすものが存在する． $\square$

証明. 与えられた正規開集合 $U \in \mathcal{R}(Y)$ に対し，$g, h : Y \to \mathbb{R}$ を次式で定義される関数とする：

$$g(y) = \frac{1}{1 + |y|},$$
$$h(y) = \mathrm{dist}(y, Y \setminus U).$$

このとき $g>0$ かつ $g\in\mathcal{SO}^*(X)$ であり，$\overline{O_h}=\overline{U}$ となる．U と O_h は共に正規開集合だから，$\overline{O_h}=\overline{U}$ であることから $O_h=U$ が従う．関数 $f=g\wedge h$ を考えれば $f\in\mathcal{SO}^*(Y)^+$ かつ $O_f=U$ が従う． □

$\mathcal{L}$ を $\mathcal{SO}^*(Y)$ を含む束とする．$f,g\in\mathcal{L}^+$ に対し，$f\subset g$ であるとは，$h\wedge g=0$ をみたす任意の $h\in\mathcal{L}^+$ に対し，$h\wedge f=0$ となることをいう．$f,g\in\mathcal{L}^-$ の場合に $f\subset g$ であるとは，$l\vee g=0$ をみたす任意の $l\in\mathcal{L}^-$ に対し，$l\vee f=0$ となることをいう．

補題 3.2. $\mathcal{L}$ を $\mathcal{SO}^*(Y)$ を含む束とする．各 $\alpha\in\{+,-\}$ と $f,g\in\mathcal{L}^\alpha$ に対し，$f\subset g$ である必要十分条件は $O_f\subset O_g$ となることである．結果として，$O_f=O_g$ である必要十分条件は $f\subset g$ かつ $g\subset f$ となることである． □

以降，この節では $\mathcal{L}$ と $\mathcal{M}$ はそれぞれ $\mathcal{SO}^*(Y)$ と $\mathcal{SO}^*(X)$ を含む束とする．

補題 3.3. $T:\mathcal{L}\to\mathcal{M}$ を $T(0)=0$ をみたす束同型写像とする．各 $\alpha\in\{+,-\}$ と $f,g\in\mathcal{L}^\alpha$ に対し，$f\subset g$ である必要十分条件は $T(f)\subset T(g)$ となることである．すなわち $O_f\subset O_g$ である必要十分条件は $O_{T(f)}\subset O_{T(g)}$ となることである．特に，$O_f=O_g$ である必要十分条件は $O_{T(f)}=O_{T(g)}$ となることである． □

$T:\mathcal{L}\to\mathcal{M}$ を $T(0)=0$ をみたす束同型写像とする．各 $\alpha\in\{+,-\}$ と $f\in\mathcal{L}^\alpha$ に対し，

$$\mathfrak{T}(O_f)=O_{T(f)}$$

と定める．これにより $\mathfrak{T}$ は順序保存写像

$$\mathfrak{T}:(\mathcal{R}(Y),\subset)\to(\mathcal{R}(X),\subset)$$

を導く．$\mathfrak{T}$ が矛盾なく定義されることは補題 3.1 と 3.3 から従う．特に $\mathfrak{T}$ は全単射である．$\mathfrak{T}$ を T **から導かれた正規開集合間の全単射**と呼ぶ．

各 $x\in X$ と $y\in Y$ に対し，

$$\mathfrak{T}(y)=\bigcap\{\mathfrak{T}(U):y\in U\in\mathcal{R}(Y)\},$$
$$\mathfrak{T}^{-1}(x)=\bigcap\{\mathfrak{T}^{-1}(V):x\in V\in\mathcal{R}(X)\},$$

と定め，さらに

$$E_T=\{(x,y)\in X\times Y:\mathfrak{T}(y)=\{x\},\ \mathfrak{T}^{-1}(x)=\{y\}\}$$

とする．このとき，束同型写像 $T:\mathcal{L}\to\mathcal{M}$ から導かれる部分集合 $X_T\subset X$ と $Y_T\subset Y$ を次式で定める:

$$X_T=\{x\in X:\exists y\in Y,(x,y)\in E_T\},$$
$$Y_T=\{y\in Y:\exists x\in X,(x,y)\in E_T\}.$$

補題 3.4. $T:\mathcal{L}\to\mathcal{M}$ を $T(0)=0$ をみたす束同型写像とする．このとき X_T と Y_T はそれぞれ X と Y における稠密部分集合である． $\square$

$T:\mathcal{L}\to\mathcal{M}$ を $T(0)=0$ をみたす束同型写像とする．このとき写像

$$\tau:X_T\to Y_T$$

を $(x,y)\in E_T$ に対して，$\tau(x)=y$ と定める．もし (x,y) と (x,y') が共に E_T の要素であれば $\{y\}=\mathfrak{T}^{-1}(x)=\{y'\}$ となるから $y=y'$ である．同様に，$(x,y),(x',y)\in E_T$ のときは $x=x'$ である．したがって τ は矛盾なく定義された全単射であることが分かる．特に τ は連続である．なぜなら $\mathfrak{T}:\mathcal{R}(Y)\to\mathcal{R}(X)$ は包含関係に関して順序保存写像だからである．同様のことが τ^{-1} に対しても成立するから，τ は位相同型写像である．τ を **T から導かれた位相同型写像**と呼ぶ．

補題 3.5. $T:\mathcal{L}\to\mathcal{M}$ を $T(0)=0$ をみたす束同型写像とし，$\tau:X_T\to Y_T$ を T から導かれた位相同型写像，そして $\mathfrak{T}:\mathcal{R}(Y)\to\mathcal{R}(X)$ を T から導かれた全単射とする．このとき，任意の $V\in\mathcal{R}(X)$ に対し，$\tau(V\cap X_T)=\mathfrak{T}^{-1}(V)\cap Y_T$ が成り立つ． $\square$

各 $f\in C(X)$ に対し，f^+ と f^- をそれぞれ f の非負部分と非正部分で作られる写像とする．つまり，$f^+=f\vee 0$，$f^-=f\wedge 0$ と定める．

補題 3.6. 各 $f,g\in\mathcal{L}^+$ に対し，U 上で $f\le g$ となる必要十分条件は，$\mathcal{L}^+$ の要素 h で $O_h\subset U$ をみたすものに対し，常に $f\wedge h\le g\wedge h$ となることである．一方，f,g が共に $\mathcal{L}^-$ の要素である場合，U 上で $f\le g$ となる必要十分条件は，$\mathcal{L}^-$ の要素 l で $O_l\subset U$ をみたすものに対し，常に $f\vee l\le g\vee l$ となることである． $\square$

このことを用いて，次の性質が導かれる．

補題 3.7. $T:\mathcal{L}\to\mathcal{M}$ を $T(0)=0$ をみたす束同型写像とし，$\mathfrak{T}:\mathcal{R}(Y)\to\mathcal{R}(X)$ を T から導かれた全単射とする．このとき，各 $f,g\in\mathcal{L}$ と $U\in\mathcal{R}(Y)$ に対し，U 上で $f\le g$ となる必要十分条件は $\mathfrak{T}(U)$ 上で $T(f)\le T(g)$ となることである．結果として，U 上で $f=g$ である必要十分条件は $\mathfrak{T}(U)$ 上で $T(f)=T(g)$ となることである． $\square$

補題 3.8. $f, g \in \mathcal{L}$，$y \in Y_T$ が $f(y) = g(y)$ かつ $f \leq g$ をみたすならば，$\mathcal{L}$ の要素 h が存在して，任意の y の近傍 U が空でない正規開集合 V，W を含み，$h|_V = f|_V$ かつ $h|_W = g|_W$ をみたすようにできる． □

定理 3.9. $\mathcal{L}$ と $\mathcal{M}$ をそれぞれ $\mathcal{SO}^*(Y)$ と $\mathcal{SO}^*(X)$ を含む束とする．$T : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ を $T(0) = 0$ をみたす束同型写像とし，$\tau : X_T \to Y_T$ を T から導かれた位相同型写像とする．このとき，$f, g \in \mathcal{L}$ と $x \in X_T$ に対して，$f(\tau(x)) = g(\tau(x))$ をみたすならば，$T(f)(x) = T(g)(x)$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R} & \mathbb{R} \\
X_T \arrow[u, "T(f)(x)=T(g)(x)"] \arrow[r, "\tau"] & Y_T \arrow[u, "f(\tau(x))=g(\tau(x))"']
\end{tikzcd}
$$

証明. x を X_T における点とし，$\mathfrak{T} : \mathcal{R}(Y) \to \mathcal{R}(X)$ を T から導かれた全単射とする．f，g を $\mathcal{L}$ の要素で $f(\tau(x)) = g(\tau(x))$ をみたすとする．このとき f と g をそれぞれ $f \wedge g$ と $f \vee g$ で置き換えることにより，$f \leq g$ をみたすとしてよい．$h \in \mathcal{L}$ を補題 3.8 をみたす写像とする．このとき，$\tau(x)$ の近傍 U に対し，正規開集合 V，W で $h|_V = f|_V$ かつ $h|_W = g|_W$ をみたすものが存在する．したがって, 補題 3.7 より, $T(f)|_{\mathfrak{T}(V)} = T(h)|_{\mathfrak{T}(V)}$ かつ $T(g)|_{\mathfrak{T}(W)} = T(h)|_{\mathfrak{T}(W)}$ となる．近傍 U は任意であり，$\mathfrak{T}$ は包含関係に関して順序を保存するから，このことより $T(f)(x) = T(h)(x) = T(g)(x)$ が従う． □

連続写像 $h : X \to Y$ に対し，写像

$$h^* : C(Y) \to C(X)$$

を，各 $f \in C(Y)$ に対して，$h^*(f) = f \circ h$ と定める．h^* を h **から導かれる合成作用素**と呼ぶ．このとき h^* は $h^*(0) = 0$ をみたす束準同型となる．h が位相同型写像の場合は，h^* は束同型写像となる．

注意 3.10. $T : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ と $\tau : X_T \to Y_T$ を定理 3.9 のように取る．このとき，[3, Theorem] にあるように, $\mathfrak{t} : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を各 $x \in X$ と $c \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathfrak{t}(x, c) = T(c)(x)$ と定めると，任意の $x \in X$ と $f \in \mathcal{L}$ に対し，$T(f)(x) = \mathfrak{t}(x, f(\tau(x))) = \mathfrak{t}(x, \tau^*(f)(x))$ が成り立つ． □

線形な束同型写像 T は常に $T(0) = 0$ をみたす．したがって，定理 3.9 より次が従う：

定理 3.11. $\mathcal{L}$ と $\mathcal{M}$ をそれぞれ $\mathcal{SO}^*(Y)$ と $\mathcal{SO}^*(X)$ を含む束とする．$T : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ を線形束同型写像とし，$\tau : X_T \to Y_T$ を T から導かれた位相同型写像とする．このとき，写

像 $\omega = T(1) \in \mathcal{M}$ は，任意の $x \in X_T$ と $f \in \mathcal{L}$ に対し，$T(f)(x) = \omega(x) \cdot f(\tau(x))$ をみたす．つまり，$T = \omega \cdot \tau^*$ と表すことができる．

証明. $\omega = T(1) \in \mathcal{M}$ とする．また，$x \in X_T$ と $f \in \mathcal{SO}(Y)$ に対し，$c = f(\tau(x))$ とおくと，$T(f)(x) = T(c)(x) = c \cdot T(1)(x) = f(\tau(x)) \cdot \omega(x)$ となる． □

次の補題は次節で必要になるものである．

補題 3.12. $\mathcal{L}$ と $\mathcal{M}$ をそれぞれ $\mathcal{SO}^*(Y)$ と $\mathcal{SO}^*(X)$ を含む束とする．$T : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ を $T(0) = 0$ をみたす束同型写像とし，$\mathfrak{T} : \mathcal{R}(Y) \to \mathcal{R}(X)$ を T から導かれた全単射とする．Y における正規開集合 U, V に対し，$\overline{U}$ がコンパクトかつ $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$ のとき，$\overline{\mathfrak{T}(U)} \cap \overline{\mathfrak{T}(V)} = \varnothing$ が成り立つ．

証明の概略. 定理を否定すると, Y の正規開集合 U, V で, $\overline{U}$ がコンパクトかつ $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$ をみたすが，$\overline{\mathfrak{T}(U)} \cap \overline{\mathfrak{T}(V)} \neq \varnothing$ となるものが存在する．点 $z \in \overline{\mathfrak{T}(U)} \cap \overline{\mathfrak{T}(V)}$ を取る．このとき $z \notin \mathfrak{T}(U)$ となることに注意する．X_T は X において稠密だから，点列 $(x_i) \subset X_T \cap \mathfrak{T}(U)$ で $x_i \to z$ $(i \to \infty)$ となるものが取れる．各 i に対し，$y_i = \tau(x_i)$ とおく．補題 3.5 によって，任意の i に対し，$y_i \in U$ となる．$\overline{U}$ はコンパクトだから，必要なら部分列を取ることにより，ある点 $w \in \overline{U}$ に対して，$y_i \to w$ $(i \to \infty)$ としてよい．W を Y における点 w の正規開集合である近傍で，$\overline{W}$ がコンパクトかつ $\overline{W} \cap \overline{V} = \varnothing$ をみたすように取る．次に，正規開集合 $U' \in \mathcal{R}(Y)$ を $(y_i) \subset U'$, $w \in U'$ かつ $U' \subset U \cup W$ となるように取る．このとき，補題 3.5 によって，任意の x_i は $\mathfrak{T}(U')$ に含まれる．つまり，$z \in \overline{\mathfrak{T}(U')}$ となる．しかし，$z \notin \mathfrak{T}(U')$ となることに注意する．また，$\overline{U'}$ はコンパクトである．

$\mathcal{L}^+$ の部分集合

$$\mathcal{L}' = \{f \in \mathcal{L}^+ : \mathrm{coz}(f) = U'\}$$

を取る．このとき $\mathcal{L}'$ は $\mathcal{L}$ の部分束となる．$\mathcal{M}' = T(\mathcal{L}')$ とする．このとき，T は $\mathcal{L}'$ と $\mathcal{M}'$ の間の束同型写像を導く．次に，以下の $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の部分束を考える:

$$\mathcal{F} = \{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists f \in \mathcal{L}',\ s(n) = f(y_n)\},$$
$$\mathcal{G} = \{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists g \in \mathcal{M}',\ s(n) = g(x_n)\}.$$

定理 3.9 によって T は $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ の間の束同型写像を導くことが分かる．実際，もし $f, f' \in \mathcal{L}'$ が，条件 $f(\tau(x_n)) = f'(\tau(x_n))$ をみたすとすると，$T(f)(x_n) = T(f')(x_n)$ となるため，T は矛盾なく定義される．

任意の $g \in \mathcal{M}'$ に対し，$\mathcal{L}'$ の要素 f を $g = T(f)$ となるように取る．$O_f = U'$ だから，z は $\overline{\mathfrak{T}(U')} \setminus \mathfrak{T}(U') = \overline{O_g} \setminus O_g$ に含まれている．つまり，$g(z) = 0$ である．したがって，$\mathcal{G}$ は 0 へ収束する点列からなる束 $\mathbf{c_0}$ の部分束である．

次に，$f \in \mathcal{L}'$ をとると，$y_n \to w$ のとき，$f(y_n) \to f(w)$ となる．しかし，$w \in U' = \mathrm{coz}(f)$ だから，$f(w)$ は任意の正の値を取ることができる．すなわち，$\mathcal{F}$ は収束点列からなる束 $\mathbf{c}$ の部分束だとわかる．

$\mathcal{F}$ は，可算部分集合 C で，任意の $s \in \mathcal{F}$ に対して，ある $t \in C$ が存在して，$s \leq t$ となる部分集合が存在する．しかしながら，$\mathcal{G}$ の各要素は 0 に収束しなければならないため，このような性質を持ちえない (cf. [3, Lemma 4])．ゆえに，$\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ は束同型にはなり得ず矛盾である． □

4 緩振動関数束間の束同型写像とバナッハ・ストーン型定理

$f : X \to Y$ を距離空間 (X, d_X) と (Y, d_Y) の間の写像とする．f が**一様拡大的** (uniformly expansive) であるとは，非減少関数 $\sigma : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ で，任意の $x, x' \in X$ に対し，

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq \sigma(d_X(x, x'))$$

をみたすものが存在することをいう．f が**距離的適正** (metrically proper) であるとは，任意の Y の距離 d_Y に関する有界集合 $B \subset Y$ に対し，$f^{-1}(B)$ が X の距離 d_X に関する有界集合となることをいう．一様拡大的かつ距離的適正な写像を**粗写像** (coarse map) と呼ぶ．2 つの写像 $f, g : X \to Y$ が**近接している** (close) とは，ある正の実数 $r > 0$ が存在して，任意の $x \in X$ に対し，$d_Y(f(x), g(x)) < r$ となることをいう．粗写像 $f : X \to Y$ が**粗同値写像** (coarse equivalence) であるとは，粗写像 $g : Y \to X$ で，$g \circ f$ と $f \circ g$ がそれぞれ id_X と id_Y に近接するものが存在することをいう．空間 X と Y の間に粗同値写像が存在するとき，X と Y は**粗同値** (coarsely equivalent) であるという．粗同値な適正距離空間は位相同型な Higson コロナを持つことが知られている [14]．位相同型写像 $f : X \to Y$ が**粗同相写像** (coarse homeomorphism) であるとは，f とその逆写像 f^{-1} が共に粗写像となることをいう．粗同相写像はもちろん粗同値写像である．

次の補題は粗写像と緩振動関数の関係として基本的である．

補題 4.1. $h : X \to Y$ を適正距離空間の間の連続な粗写像とし，$f : Y \to \mathbb{R}$ を連続な緩振動関数とする．このとき，合成関数 $f \circ h : X \to \mathbb{R}$ は連続な緩振動関数である． □

4.1 非線形束同型写像

正の数 $r > 0$ に対し，距離空間 X が **r-鎖連結** (r-chain connected) であるとは，X 内の任意の 2 点 x, x' に対し，X 内の有限点列 $p_0, \ldots, p_n$ で，$p_0 = x$, $p_n = x'$ かつ $d_X(p_{i-1}, p_i) \leq r$ がすべての $i = 1, \ldots, n$ に対して成り立つものが存在することをいう．ある $r > 0$ に対して，r-鎖連結となる空間を**鎖連結** (chain connected) と呼ぶ.

補題 4.2. (X, d_X) と (Y, d_Y) を適正距離空間とする．$T : \mathcal{SO}(Y) \to \mathcal{SO}(X)$ を $T(0) = 0$ をみたす束同型写像とする．X が鎖連結ならば，T から導かれる位相同型写像 $\tau : X_T \to Y_T$ は距離的適正写像である．同様の結果は $T(0) = 0$ をみたす有界束間の束同型写像 $T : \mathcal{SO}^*(Y) \to \mathcal{SO}^*(X)$ に対しても成立する.

証明の概略. $T : \mathcal{SO}(Y) \to \mathcal{SO}(X)$ の場合を解説する．$T : \mathcal{SO}^*(Y) \to \mathcal{SO}^*(X)$ の場合も同様である.

位相同型写像 τ が距離的適正でないと仮定すると，X の点列 (x_n) で

(1) $|x_n| \to \infty$ $(n \to \infty)$, かつ
(2) 点列 $(\tau(x_n))$ は Y のある点 w に収束する

ものが取れる．各 n に対し，$y_n = \tau(x_n)$，$a_n = x_{2n}$ そして $b_n = x_{2n+1}$ とする．必要なら部分列をとることにより，点列 (a_n) と (b_n) は次をみたすとしてよい：

(3) $|a_n| + 2n^2 < |b_n| < |a_{n+1}| - 2(n+1)^2$,
(4) $\lim \tau(a_n) = \lim \tau(b_n) = w$.

X は鎖連結で，X_T は X の中で稠密だから，正の実数 $\delta > 0$ と点列 $(c_n) \subset X_T$ を適当にとって，任意の n に対し,

(5) $d_X(b_n, c_n) < \delta$

とできる．特に，任意の m, n に対し， $a_m \neq c_n \neq b_m$ であるとしてよい．したがって，τ は位相同型写像だから，任意の m, n に対し,

(6) $\tau(a_m) \neq \tau(c_n) \neq \tau(b_m)$

となる．(3) により，関数 $f \in \mathcal{SO}^*(X)$ で，任意の n に対し，$f(a_n) = 0$ かつ $f(b_n) = 1$

となるものが取れる．$g = T^{-1}(f)$ とする．定理 3.9 により，条件 $f(a_n) = 0$ より

$$g(\tau(a_n)) = T^{-1}(f)(\tau(a_n)) = T^{-1}(0)(\tau(a_n)) = 0$$

となる．したがって，(4) により $n \to \infty$ のとき，$g(\tau(b_n)) \to 0$ となる．

K を $\lim \tau(b_n)$ の Y におけるコンパクトな近傍で，$(\tau(a_n)), (\tau(b_n)) \subset \mathrm{Int}(K)$ をみたすとする．$A = (\tau(a_n)) \cup (\tau(b_n)) \cup (\tau(c_n))$ とおく．このとき写像 $h' : \overline{A} \cup (Y \setminus \mathrm{Int}(K)) \to \mathbb{R}$ を $h'(\tau(b_n)) = g(\tau(b_n))$ かつ，その他の点 y に対し，$h'(y) = 0$ と定める．(6) より，h' は矛盾なく定義される．また，$g(\tau(b_n)) \to 0$ $(n \to \infty)$ であるから，h' は連続である．Tietze の拡張定理により，$h : Y \to \mathbb{R}$ を h' の拡張された連続関数として取ることができる．$\mathrm{coz}(h)$ がコンパクト集合 K に含まれているから，$h \in \mathcal{SO}^*(Y) \subset \mathcal{SO}(Y)$ である．すべての n に対して，$h(\tau(a_n)) = h(\tau(c_n)) = 0$ かつ $h(\tau(b_n)) = g(\tau(b_n))$ となっていることに注意する．定理 3.9 によって，$h(\tau(c_n)) = 0$ であることから

$$T(h)(c_n) = T(0)(c_n) = 0$$

が従う．一方，$h(\tau(b_n)) = g(\tau(b_n))$ であることより，

$$T(h)(b_n) = T(g)(b_n) = T(T^{-1}(f))(b_n) = f(b_n) = 1$$

が従う．しかしながら，(3) と (5) により，これらは $T(h)$ が緩振動関数であることに反し，矛盾である．ゆえに τ は距離的適正な写像である． □

命題 4.3. (X, d_X) と (Y, d_Y) を鎖連結な適正距離空間とする．$T : \mathcal{SO}(Y) \to \mathcal{SO}(X)$ を $T(0) = 0$ をみたす束同型写像とし，$\tau : X_T \to Y_T$ と $\mathfrak{T} : \mathcal{R}(Y) \to \mathcal{R}(X)$ をそれぞれ T から導かれる位相同型写像と全単射とする．このとき，$X_T = X$ かつ $Y_T = Y$ が成り立つ．即ち，τ は X から Y への位相同型写像であり，各 $U \in \mathcal{R}(X)$ に対し，$\tau(U) = \mathfrak{T}^{-1}(U)$ をみたす．同様の結果は $T(0) = 0$ をみたす有界束間の束同型写像 $T : \mathcal{SO}^*(Y) \to \mathcal{SO}^*(X)$ に対しても成立する．

証明の概略. $T : \mathcal{SO}(Y) \to \mathcal{SO}(X)$ の場合を開設する．$T : \mathcal{SO}^*(Y) \to \mathcal{SO}^*(X)$ の場合も同様である．

補題 4.2 より，τ と τ^{-1} は共に距離的適正な位相同型写像である．このことより，X のコンパクト部分集合列 $X_n \subset X_{n+1}$ と Y のコンパクト部分集合列 $Y_n \subset Y_{n+1}$ を $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$，$Y = \cup_{n=1}^{\infty} Y_n$ かつ $\tau(X_T \cap X_n) \subset Y_n$ となるようにとることができる．

$A, B \subset Y_n$ を交わらない閉集合とし，U, V を Y の正規開集合で $A \subset U$, $B \subset V$ そして $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$ であるようにとる．Y_n はコンパクトだから，A, B は共にコンパクトであ

るから，$\overline{U}$ と $\overline{V}$ は共にコンパクトであるとしてよい．補題 3.12 により，$\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$ であることから $\overline{\mathfrak{T}(U)} \cap \overline{\mathfrak{T}(V)} = \varnothing$ が従う．したがって，補題 3.5 によって

$$\overline{\tau^{-1}(A)} \cap \overline{\tau^{-1}(B)} \subset \overline{\tau^{-1}(U)} \cap \overline{\tau^{-1}(V)} \subset \overline{\mathfrak{T}(U)} \cap \overline{\mathfrak{T}(V)} = \varnothing$$

となる．ゆえに Taimanov の定理 [4, 3.2.1] より，$\tau|_{X_T \cap X_n}$ は一意的に $\tau_n : X_n \to Y_n$ へ拡張される．特に各 τ_{n+1} は τ_n の拡張写像となるから，τ は一意的に $\tau_\infty : X \to Y$ へ拡張される．$\tau : X_T \to Y_T$ は稠密集合 $X_T \subset X$ と $Y_T \subset Y$ の間の位相同型写像だから，τ_∞ は位相同型写像である．

最後に $X_T = X$, $Y_T = Y$ となることを検証する．各 $V \in \mathcal{R}(X)$ に対し，補題 3.5 より，

$$\overline{\tau_\infty(V)} = \overline{\tau(V \cap X_T)} = \overline{\mathfrak{T}^{-1}(V) \cap Y_T} = \overline{\mathfrak{T}^{-1}(V)}$$

となることがわかる．集合 $\tau_\infty(V)$ と $\mathfrak{T}^{-1}(V)$ は共に正規開集合だから，このことより $\tau_\infty(V) = \mathfrak{T}^{-1}(V)$ が従う．同様に，各 $U \in \mathcal{R}(Y)$ に対し，$\tau_\infty^{-1}(U) = \mathfrak{T}(U)$ が成り立つ．このことは $(x, y) \in E_T$ である必要十部条件が $\tau_\infty(x) = y$ であることを意味する．ゆえに $X_T = X, Y_T = Y$ となり，$\tau : X \to Y$ が従う． □

補題 4.4. (X, d_X) と (Y, d_Y) を鎖連結な適正距離空間とする．$T : \mathcal{SO}(Y) \to \mathcal{SO}(X)$ を $T(0) = 0$ をみたす束同型写像とする．このとき T から導かれる位相同型写像 $\tau : X_T \to Y_T$ は一様拡大的である．同様の結果は $T(0) = 0$ をみたす有界束間の束同型写像 $T : \mathcal{SO}^*(Y) \to \mathcal{SO}^*(X)$ に対しても成立する．

証明. $T : \mathcal{SO}(Y) \to \mathcal{SO}(X)$ の場合を解説する．$T : \mathcal{SO}^*(Y) \to \mathcal{SO}^*(X)$ の場合も同様である．

τ が一様拡大的でないと仮定する．このとき，ある正の実数 $R > 0$ と X の 2 つの点列 (a_n)，(b_n) で，任意の n に対して

(1) $0 < d_X(a_n, b_n) < R$，かつ
(2) $d_Y(\tau(a_n), \tau(b_n)) > n$

をみたすものが取れる．d_X は適正距離であるから，(1) と (2) によって

(3) $|a_n| \to \infty, |b_n| \to \infty \ (n \to \infty)$

でなければならない．また，τ は距離的適正写像だから，

(4) $|\tau(a_n)| \to \infty, |\tau(b_n)| \to \infty \ (n \to \infty)$

でなければならない．必要なら部分点列を取ることで，任意の n に対して，

(5) $|\tau(a_n)| + 2n^2 < |\tau(b_n)| < |\tau(a_{n+1})| - 2(n+1)^2$

としてよい．このことから，$g \in \mathcal{SO}^*(Y)$ で $g(\tau(a_n)) = 0$ かつ $g(\tau(b_n)) = 1$ となるものを取ることができる．$f = T(g)$ とする．定理 3.9 より， $g(\tau(a_n)) = 0$ であることから $f(a_n) = T(g)(a_n) = T(0)(a_n) = 0$ が導かれる．f は緩振動連続関数だから， (1) と (3) より $f(b_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ が従う．Y は鎖連結だから，点列 $(c_n) \subset X$ と $\delta > 0$ で，任意の n に対し，

(6) $0 < d_Y(\tau(b_n), \tau(c_n)) < \delta$

となるものが取れる．特に，任意の m, n に対し，

(7) $\tau(a_m) \neq \tau(c_n) \neq \tau(b_m)$

であるとしてよい．$f(b_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ だから，関数 $h \in \mathcal{SO}^*(X)$ で，任意の n に対し，$h(a_n) = h(c_n) = 0$ かつ $h(b_n) = f(b_n)$ となるものが存在する．定理 3.9 により，$h(c_n) = 0$ であることから $T^{-1}(h)(\tau(c_n)) = 0$ が従う．同様に $h(b_n) = f(b_n)$ であることから，$T^{-1}(h)(\tau(b_n)) = T^{-1}(f)(\tau(b_n)) = g(\tau(b_n)) = 1$ が従う．しかしながら， (4) と (6) より，これらは $T^{-1}(h)$ が緩振動関数であることに反し矛盾である． □

定理 4.5. (X, d_X) と (Y, d_Y) を鎖連結な適正距離空間とする．$T : \mathcal{SO}(Y) \to \mathcal{SO}(X)$ を $T(0) = 0$ をみたす束同型写像とする．このとき T から導かれる位相同型写像 $\tau : X_T \to Y_T$ は粗同相写像で，$f(\tau(x)) = g(\tau(x))$ をみたす $f, g \in \mathcal{SO}(Y)$ と $x \in X$ に対し，$T(f)(x) = T(g)(x)$ となる．同様の結果は $T(0) = 0$ をみたす有界束間の束同型写像 $T : \mathcal{SO}^*(Y) \to \mathcal{SO}^*(X)$ に対しても成立する．

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} & & \mathbb{R} \\ X \arrow[u, "T(f)(x)=T(g)(x)"] \arrow[rr, "\tau"] & & Y \arrow[u, "f(\tau(x))=g(\tau(x))"'] \end{tikzcd}$$

証明. $\tau : X \to Y$ を T から導かれた位相同相写像とすると，$\tau^{-1} : Y \to X$ は束同型写像 $T^{-1} : \mathcal{SO}(X) \to \mathcal{SO}(Y)$ から導かれた位相同型写像である．したがって，補題 4.4 より τ は粗同相写像である．τ と T の間の関係式は定理 3.9 より従う． □

次の補題は [3, Corollary 2] と同様にして従う：

補題 4.6. (X, d_X) と (Y, d_Y) を鎖連結な適正距離空間とし，$T : \mathcal{SO}(Y) \to \mathcal{SO}(X)$ を $T(0) = 0$ をみたす束同型写像とする．このとき $T(\mathcal{SO}^*(Y)) = \mathcal{SO}^*(X)$ となる． □

以上の考察により，次の緩振動連続関数の束に対するバナッハ・ストーン型定理が従う．一様連続写像の束に対するバナッハ・ストーン型定理については，文献 [3], [6], [7], [8], [9] などを参照されたい．

定理 4.7 (バナッハ・ストーン型定理)**.** 鎖連結な適正距離空間 (X, d_X)，(Y, d_Y) に対し，次は同値である：

(1) $\mathcal{SO}(X)$ と $\mathcal{SO}(Y)$ は束同型である．
(2) $\mathcal{SO}^*(X)$ と $\mathcal{SO}^*(Y)$ は束同型である．
(3) X と Y の間に粗同粗写像が存在する．
(4) *Higson* コンパクト化 hX と hY は位相同型である．

証明. 最初に (1), (2), (3) の同値性について述べる．任意の束同型写像 T は $T(0) = 0$ をみたすように修正できるから，補題 4.6 より， (1) から (2) が従う．(2) から (3) が従うことは定理 4.5 で示されている．また，補題 4.1 によって，$h : X \to Y$ が粗同相写像ならば，その合成作用素 $h^* : C(Y) \to C(X)$ は束同型写像 $h^*|_{\mathcal{SO}(Y)} : \mathcal{SO}(Y) \to \mathcal{SO}(X)$ を導く．つまり (3) $\Rightarrow$ (1) が従う．

(3) が成り立つと仮定し，$h : X \to Y$ を粗同相写像とする．$e_{\mathcal{SO}^*(Y)} : Y \to K(\mathcal{SO}^*(Y)) = hY$ を評価写像とすると，命題 2.1 と補題 4.1 により，合成写像 $e_{\mathcal{SO}^*(Y)} \circ h : X \to hY$ は一意的に hX 上の連続写像 $\hat{h} : hX \to hY$ へ拡張される．

$$\begin{array}{ccc} hX & \xrightarrow{\hat{h}} & hY \\ {\scriptstyle e_{\mathcal{SO}^*(X)}}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle e_{\mathcal{SO}^*(Y)}} \\ X & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

このとき $\hat{h} : hX \to hY$ は同相写像でなければならない．即ち， (3) $\Rightarrow$ (4) となる．

(4) が成り立つと仮定し，$\hat{h} : hX \to hY$ を位相同型写像とする．補題 2.2 より，$\hat{h}(X) = Y$ でなければならず，したがって $h = \hat{h}|_X$ は X から Y への位相同型写像となる．このとき， 合成作用素 $h^* : C(Y) \to C(X)$ は束同型写像 $h^*|_{\mathcal{SO}^*(Y)} : \mathcal{SO}^*(Y) \to \mathcal{SO}^*(X)$ を導く．実際，$f \in \mathcal{SO}^*(Y)$ に対し，$\hat{f} : hY \to \mathbb{R}$ を f の連続な拡張写像とすると，$\hat{f} \circ \hat{h} : hX \to \mathbb{R}$ は $f \circ h : X \to \mathbb{R}$ は連続な拡張写像である．したがって，命題 2.1 より，$f \circ h$ 緩振動関数でなければならない．h が位相同型写像だから，$h^*|_{\mathcal{SO}^*(Y)}$ は束同型写

像となる．即ち，(4) $\Rightarrow$ (2) が成り立つ． $\square$

4.2 線形束同型写像

次に線形な束同型写像 $T : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ を考える．即ち，T は全単射で，任意の $f, g \in \mathcal{L}$ と $k, l \in \mathbb{R}$ に対し，

(i) $T(f \vee g) = T(f) \vee T(g), T(f \wedge g) = T(f) \wedge T(g)$，かつ
(ii) $T(kf + lg) = kT(f) + lT(g)$

をみたす写像である．これら 2 つの性質より，$T(0) = 0$ と T の正値性（任意の $f \in \mathcal{L}$ に対して，$T(|f|) = |T(f)|$ となること）が従う．

$\mathcal{SO}(X)$ の部分集合 $\mathcal{SO}_\sharp(X)$ を，$\omega \in \mathcal{SO}_\sharp(X)$ となる必要十分条件が以下の 3 つの条件をみたすこととして定義する：

($\sharp$1) $\omega > 0$,
($\sharp$2) 任意の $f \in \mathcal{SO}(X)$ に対し，$\omega \cdot f \in \mathcal{SO}(X)$,
($\sharp$3) 任意の $f \in \mathcal{SO}(X)$ に対し，$(1/\omega) \cdot f \in \mathcal{SO}(X)$.

特に $\omega \in \mathcal{SO}_\sharp(X)$ であれば，その逆数として与えられる関数 $1/\omega$ も $\mathcal{SO}_\sharp(X)$ の要素となることに注意する．上記 ($\sharp$1) 〜 ($\sharp$3) において，$\mathcal{SO}(X)$ を $\mathcal{SO}^*(X)$ で置き換えて得られる $\mathcal{SO}^*(X)$ の部分集合を $\mathcal{SO}^*_\sharp(X)$ で表す．

補題 4.8. (X, d_X) を適正距離空間とする．このとき $\mathcal{SO}_\sharp(X)$ と $\mathcal{SO}^*_\sharp(X)$ はそれぞれ束 $\mathcal{SO}(X)$ と束 $\mathcal{SO}^*(X)$ の部分束である． $\square$

関数 $f \in C(X)$ が**強正値** (strongly positive) であるとは，ある正数 $c > 0$ が存在して $c \leq f$ をみたすことをいう．

補題 4.9. (X, d_X) を適正距離空間とする．このとき，$\mathcal{SO}^*_\sharp(X)$ は $\mathcal{SO}^*(X)$ のすべての強正値関数からなる束である． $\square$

注意 4.10. $X = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$ 上に $\mathbb{N}$ を制限して得られる距離を考える．このとき，$\mathcal{SO}(X) = C(X)$ となるから，特に $\mathcal{SO}_\sharp(X) = C(X)^+$ である．したがって $\mathcal{SO}_\sharp(X)$ は非有界な関数を含む．特に強正値ではない関数を含むことに注意する． $\square$

これらの結果と，定理 3.11 ならびに定理 4.5 より，次が従う．

定理 4.11. (X, d_X) と (Y, d_Y) を鎖連結な適正距離空間とし，$T : \mathcal{SO}(Y) \to \mathcal{SO}(X)$ *(resp.* $T : \mathcal{SO}^*(Y) \to \mathcal{SO}^*(X)$*)* を線形束同型写像，そして $\omega = T(1)$ とする．このとき，T から導かれる位相同型写像 $\tau : X \to Y$ は粗同相写像であり，$T = \omega \cdot \tau^*$ をみたす．特に $\omega \in \mathcal{SO}_\sharp(X)$ *(resp.* $\omega \in \mathcal{SO}^*_\sharp(X)$*)* である． □

$\mathrm{H}_\mathcal{C}(X, Y)$ によって X から Y へのすべての粗同相写像からなる族を表し，$\mathscr{I}_{\mathcal{SO}}(Y, X)$ (resp. $\mathscr{I}_{\mathcal{SO}^*}(Y, X)$) によって $\mathcal{SO}(Y)$ から $\mathcal{SO}(X)$ (resp. $\mathcal{SO}^*(Y)$ から $\mathcal{SO}^*(X)$) 上へのすべての線形束同型写像からなる族を表すものとする．

定理 4.12 (表現定理)**.** (X, d_X) と (Y, d_Y) を鎖連結な適正距離空間とする．各 $\omega \in \mathcal{SO}(X)$ と $\tau \in \mathrm{H}_\mathcal{C}(X, Y)$ に対し，$\Phi(\omega, \tau) = \omega \cdot \tau^*$ と定める．このとき， Φ を制限して得られる写像

$$\Phi_\sharp : \mathcal{SO}_\sharp(X) \times \mathrm{H}_\mathcal{C}(X, Y) \to \mathscr{I}_{\mathcal{SO}}(Y, X),$$

$$\Phi^*_\sharp : \mathcal{SO}^*_\sharp(X) \times \mathrm{H}_\mathcal{C}(X, Y) \to \mathscr{I}_{\mathcal{SO}^*}(Y, X)$$

は，共に矛盾なく定義された全単射写像である． □

系 4.13. (X, d_X) が鎖連結な適正距離空間とすると，$\mathcal{SO}_\sharp(X)$ は $\mathcal{SO}^*_\sharp(X)$ の部分束である． □

系 4.14. (X, d_X) と (Y, d_Y) を鎖連結な適正距離空間とする．同一視 $\mathscr{I}_{\mathcal{SO}}(Y, X) = \mathcal{SO}_\sharp(X) \times \mathrm{H}_\mathcal{C}(X, Y)$ と $\mathscr{I}_{\mathcal{SO}^*}(Y, X) = \mathcal{SO}^*_\sharp(X) \times \mathrm{H}_\mathcal{C}(X, Y)$ の下で，$\mathscr{I}_{\mathcal{SO}}(Y, X) \subset \mathscr{I}_{\mathcal{SO}^*}(Y, X)$ である． □

注意 4.15. (X, d_X) が鎖連結な適正距離空間であっても，一般的に $\mathcal{SO}_\sharp(X)$ と $\mathcal{SO}^*_\sharp(X)$ は一致しない．特に $\mathscr{I}_{\mathcal{SO}}(Y, X)$ と $\mathscr{I}_{\mathcal{SO}^*}(Y, X)$ も一般的には一致しない．

例えば，$X = [0, \infty)$ とし，通常の距離 $d(x, y) = |x - y|$ を考える．X 上の関数 ω，$f : X \to \mathbb{R}$ をそれぞれ $\omega(x) = 2 + \sin\sqrt{x}$, $f(x) = \sqrt{x}$ と定義すると，容易にわかるように $\omega \in \mathcal{SO}^*(X)$， $f \in \mathcal{SO}(X)$ である．特に ω は強正値な緩振動関数だから，$\omega \in \mathcal{SO}^*_\sharp(X)$ である．しかしながら，$\dfrac{d}{dx}(\omega \cdot f) = (\cos\sqrt{x})/2 + (2 + \sin\sqrt{x})/2\sqrt{x}$ であるから，$\omega \cdot f$ は緩振動関数ではない．なぜなら，$(2 + \sin\sqrt{x})/2\sqrt{x} \to 0$ $(|x| \to \infty)$ であり，$(\cos\sqrt{x})/2$ は緩振動関数だからである．したがって，ω は $\mathcal{SO}_\sharp(X)$ の要素ではないことが分かる．ゆにえ $\mathcal{SO}_\sharp(X) \subsetneq \mathcal{SO}^*_\sharp(X)$ であり，表現定理から得られる同一視をしたとき，$\mathscr{I}_{\mathcal{SO}}(X, X) \subsetneq \mathscr{I}_{\mathcal{SO}^*}(X, X)$ となる． □

参考文献

[1] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warsaw, 1932.

[2] S. Banach, Theory of linear operations, translated by F. Jellet, North-Holland Mathematical Library, Vol. 38, 1987; Dover Books on Mathematics, 2009.

[3] F. Cabello Sánchez, J. Cabello Sánchez, Lattices of uniformly continuous functions, Topology Appl. 160 (2013) no. 1, 50–55.

[4] R. Engelking, General topology, Second edition, Sigma Series in Pure Mathematics, 6. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[5] I. Gelfand and A. N. Kolmogoroff, On rings of continuous functions on a topological space, C. R. (Doklady) URSS, vol 22 (1939) pp. 11–15.

[6] M. I. Garrido, J. A. Jaramillo, A Banach-Stone theorem for uniformly continuous functions, Monatsh. Math.131(2000), no. 3, 189–192.

[7] M. Hušek, Lattices of uniformly continuous functions determine their sublattices of bounded functions, Topology Appl. 182 (2015) 71–76.

[8] M. Hušek, A. Pulgarín, Banach-Stone-like theorems for lattices of uniformly continuous functions, Quaest. Math. 35 (2012) no.4, 417–430.

[9] M. Hušek, A. Pulgarín, When lattices of uniformly continuous functions on X determine X, Topology Appl. 194 (2015) 228–240.

[10] Y. Iwamoto, Homomorphisms of the lattice of slowly oscillating functions on the half-line, Appl. Gen. Topol. 25, no. 1 (2024) 57-70.

[11] Y. Iwamoto, Lattices of slowly oscillating functions, arXiv:2405.19555 [math.GN].

[12] I. Kaplansky, Lattices of continuous functions, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947) 617–623.

[13] J. Keesling, The one-dimensional Čech cohomology of the Higson compactification and its corona, Topology Proc. 19 (1994) 129–148.

[14] J. Roe, Lectures on coarse geometry, University Lecture Series, 31. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[15] T. Shirota, A generalization of a theorem of I. Kaplansky, Osaka Math. J. 4 (1952) 121–132.

[16] M. H. Stone, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 41 (1937) pp. 375–481.

[17] J. Nagata, On lattices of functions on topological spaces and of functions on uniform spaces, Osaka Math. J. 1 (1949) 166–181.

[18] R. G. Woods, The minimum uniform compactification of a metric spaces, Fund. Math. 147 (1995) no. 1, 39–59.