BORNOLOGICAL PROPER ACTION について

広島大学先進理工系科学研究科　長屋 拓暁
HIROAKI NAGAYA
GRADUATE SCHOOL OF ADVANCED SCIENCE AND ENGINEERING,
HIROSHIMA UNIVERSITY

Abstract. 群作用の商空間を考える際に proper という性質は重要である．この proper 作用について位相的な研究は多くなされており, proper の概念を弱めた弱 proper や, CI 条件という 2 つの性質を基にした研究もある．それらの結果をもとに本論文では, 群作用が proper であることを群と空間上のボルノロジー的観点から研究する．主な結果は, ボルノロジー的 proper, 弱ボルノロジー的 proper,BI を定義し, 弱ボルノロジー的 proper をボルノロジーの観点から特徴づけし, ボルノロジー的 proper を粗幾何学を用いて特徴づけしたことである．

1. イントロダクション

この節では, L を局所コンパクトハウスドルフ群, X を局所コンパクトハウスドルフ L-空間とする．任意の相対コンパクトな部分集合 $C, C' \subset X$ に対し, 集合

$$L_{C\to C'} := \{l \in L \mid lC \cap C' \neq \emptyset\}$$

が L において相対コンパクトであるとき, L の X への作用が **proper** であるという．コンパクト集合を用いて proper を定義する流儀もあるが, 今回の設定では同値である．

もし L の X への作用が proper ならば, 以下のような商空間に関する命題が得られる．

命題 1.1. 作用の *proper* 性について以下の命題が成り立つ．

(i) L をハウスドルフ群, X をハウスドルフ空間とする．X への連続的な L-作用が *proper* ならば, 商空間 $L\backslash X$ もまたハウスドルフである．

(ii) L を離散群, X を局所コンパクトハウスドルフ空間とする．L-作用が *proper* かつ自由であるならば, $\pi\colon X \to L\backslash X$ は被覆写像である．

このように商を考えるときに作用の proper 性は重要である．しかしながら作用が proper かどうかを判定することは容易ではない．そのため proper 性, またはそれに関する諸性質を幾何学的に特徴づけることは proper 判定に重要な示唆をもたらすだろう．作用の proper 性に関連する性質として, A. Baklouti によって導入された弱 proper（cf. [1]）や CI 条件がある．定義は以下の通りである．

2020 *Mathematics Subject Classification.* Primary 57S30, Secondary 22E40, 22F30, 53C35, 53C23.
Key words and phrases. Proper action; Discontinuous group; Symmetric space; Coarse space
本研究は, JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2132 の支援を受けたものである．

定義 1.2. ρ を X への L-連続作用とする.

(i) 作用 ρ が**弱 *proper***であるとは, 任意の点 $x \in X$ と相対コンパクト部分集合 $C \subset X$ に対し, $L_{x \to C} \subset L$ が相対コンパクトであることをいう.

(ii) 作用 ρ が ***CI*条件**を満たすとは, 任意の点 $x \in X$ に対し, 固定部分群 $L_x \subset L$ が相対コンパクトであることをいう.

一般に proper, 弱 proper, CI 条件の順に弱い条件である. またそれらの差分を表す例を紹介する.

例 1.3. *1*つ目の例は *CI* 条件を満たすが, 弱 *proper* でない例であり, *2*つ目の例は弱 *proper* であるが, *proper* でない例である.

(i) (*CI* 条件を満たすが弱 *proper* でない例) S^1 上の $\mathbb{Z}$-作用 ρ_1 を次のように定義する.

$$\mathbb{Z} \times S^1 \to S^1$$
$$(n, e^{2\pi i r}) \mapsto e^{2\pi i (r + \sqrt{2} n)}$$

この作用は自由であるため, ρ_1 は *CI* 条件を満たす. しかし, $\mathbb{Z}_{e^0 \to S^1} = \mathbb{Z}$ はコンパクトでないため, 弱 *proper* ではない.

(ii) (弱 *proper* だが *proper* でない例) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上の $\mathbb{Z}$-作用 ρ_2 を次のように定義する.

$$\mathbb{Z} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$
$$(n, (x_1, x_2)^\top) \mapsto (2^n x_1, 2^{-n} x_2)^\top$$

任意に $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ と相対コンパクトな部分集合 $C \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ をとる. 軌道 $\mathbb{Z} \cdot x$ が離散部分空間であるため, $\mathrm{cl}_X C \cap \mathbb{Z} \cdot x$ は有限集合である. したがって作用 ρ_2 は弱 *proper* である. しかし $\mathbb{Z}_{S^1 \to S^1} = \mathbb{Z}$ はコンパクトでないため, *proper* ではない.

では, それらの条件は幾何的にどのように特徴づけられるのだろうか. 吉野太郎氏は, それらに関する以下の 2 つの定理を示している（cf. [8]）.

定理 1.4 (T. Yoshino [8])**.** L を局所コンパクトハウスドルフ群, X を局所コンパクト空間, ρ を X 上の L-連続作用であり, *CI* 条件を満たすとする. このとき次の *2* つの条件は同値である.

(i) 作用 ρ は弱 *proper* である.

(ii) 任意の点 $x \in X$ に対し, 軌道 $L \cdot x \subset X$ が閉集合でかつ写像 $T_x \colon L/L_x \to L \cdot x$ （$[l] \mapsto lx$）は同相である.

定理 1.5 (T. Yoshino [8])**.** L を局所コンパクトハウスドルフ群, X をパラコンパクトな局所コンパクトハウスドルフ空間, ρ を X 上の L-連続作用であり, 弱 *proper* かつ商空間 $L \backslash X$ がパラコンパクトとなることを仮定する. このとき次の *2* つの条件は同値である：

(i) 作用 ρ は *proper* である.

(ii) X 上の位相に適合する一様構造 $\mathcal{U}$ が存在し, 作用 ρ が一様連続である.

吉野氏は proper 性, 弱 proper 性を位相や一様構造によって幾何学的に特徴づけた. 本研究では proper 性, 弱 proper 性をボルノロジーや粗幾何学の観点から幾何的に特徴づけを行う. 定理 1.4 および定理 1.5 に呼応する形で, 以下の主結果が得られた.

定理 1.6 (N)**.** $(L, \mathcal{B}_L)$ をボルノロジー群, $(X, \mathcal{B}_X)$ をボルノロジー空間とする. 作用 ρ が X 上の L-有界作用であり, BI 条件を満たすとする. このとき, 次の *2* つの条件は同値である.

(i) 作用 ρ は弱ボルノロジー的 *proper* である.
(ii) 任意の $x \in X$ に対し, $\iota_x^*(\mathcal{B}_X) = q_*^x(\mathcal{B}_L)$ である.

定理 1.7 (N)**.** $(L, \mathcal{B}_L)$ をボルノロジー群, $(X, \mathcal{B}_X)$ をボルノロジー空間とする. 作用 ρ が X 上の L-有界作用であり, 弱ボルノロジー的 *proper* であるとする. このとき, 以下の命題は同値である.

(i) 作用 ρ はボルノロジー的 *proper* である.
(ii) 作用 ρ は X 上にボルノロジーに適合する粗構造 $\mathcal{E}$ が存在して, 作用 ρ が一様有界となる.

本稿の流れを紹介する. 2 節ではボルノロジー空間と粗空間を定義する. 3 節ではボルノロジーを用いてボルノロジー的 proper, 弱ボルノロジー的 proper, BI 条件を定義し, proper, 弱 proper, CI 条件との関連性を示す. 4 節では主定理を改めて紹介する. 5 節では「終わりに」と題して今後の課題を述べる.

本稿を通じて, 任意の集合 X に対し, その冪集合を $\mathcal{P}(X)$ と表す.

2. ボルノロジー空間と粗空間

この節では, ボルノロジー空間および粗空間の定義を紹介する.

2.1. **ボルノロジー空間.**

この節では, 関数解析の分野から生まれたボルノロジーについて定義を紹介する. 歴史的経緯については [4] を参照されたい.

定義 2.1 (ボルノロジー)**.** X を集合, $\mathcal{B}$ を $P(X)$ の部分集合とする. $\mathcal{B}$ が X 上の**ボルノロジー**であるとは, $\mathcal{B}$ が次の *3* つの条件を満たすことをいう.

(i) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.
(ii) 任意の $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ に対し, $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}$.
(iii) 任意の $B \in \mathcal{B}$ と任意の $B' \subset B$ について, $B' \in \mathcal{B}$.

X 上のボルノロジー $\mathcal{B}$ に対し, 組 $(X, \mathcal{B})$ を**ボルノロジー空間**と呼び, ボルノロジーの各要素 $B \in \mathcal{B}$ を**有界集合**という. 特にボルノロジー空間の有限部分集合はすべて有界である.

次に「ボルノロジー基底」の概念を紹介する．集合 X に対し, $\mathcal{D}$ が X の部分集合族であり, 次の 2 つの条件を満たすとき, $\mathcal{D}$ を X 上の**ボルノロジー基底**という．

(i') $\bigcup_{D\in\mathcal{D}} D = X$.

(ii') 任意の $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ に対し, $D_1 \cup D_2 \subset D$ となる $D \in \mathcal{D}$ が存在する．

ボルノロジー基底 $\mathcal{D}$ に対し, 集合 $\langle\mathcal{D}\rangle := \{S \subset X \mid \exists D \in \mathcal{D} \text{ such that } S \subset D\}$ はボルノロジーとなる．

例 2.2. 以下に *2* つのボルノロジーの例を示す．

(i) (X, d) を距離空間とする．このとき, すべての有界部分集合の族 $\mathcal{B}_d(X)$ はボルノロジーである．これを**有界ボルノロジー**と呼ぶ．

(ii) X をハウスドルフ空間とする．このとき, 相対コンパクトな部分集合全体の族 $\mathcal{B}_{cpt}(X)$ はボルノロジーを形成する．これを**コンパクトボルノロジー**と呼ぶ．

ボルノロジー空間の間の射について以下に定義する．

定義 2.3 (ボルノロジー空間の間の射)**.** $(X, \mathcal{B}_X)$, $(Y, \mathcal{B}_Y)$ をボルノロジー空間とする．$f\colon X \to Y$ が**有界**であるとは, 任意の $B \in \mathcal{B}_X$ に対し, $f(B) \in \mathcal{B}_Y$ となることである．

また, 集合からボルノロジー空間への単射 $\iota\colon S \to Y$ があるとき, ι が有界となるように定義域側に自然にボルノロジーを誘導することができる．それを $\iota^*\mathcal{B}_Y$ と書く．逆にボルノロジー空間から集合への全射 $q\colon X \to T$ があるとき, q が有界となるように値域側に自然にボルノロジーを誘導することができる．それを $q^*\mathcal{B}_X$ と書く．

2.2. **粗空間.** この節では, Roe によって考案された粗空間を紹介する（cf. [7]）．

定義 2.4 (粗空間)**.** 集合 X と $P(X \times X)$ の部分集合 $\mathcal{E}$ の対 $(X, \mathcal{E})$ が粗空間であるとは, 次の *5* つの条件を満たすことをいう：

(i) $diag(X) := \{(x, x) \mid x \in X\} \in \mathcal{E}$.

(ii) 任意の $E \in \mathcal{E}$ について, $E^\top := \{(x', x) \mid (x, x') \in E\} \in \mathcal{E}$.

(iii) 任意の $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ について,

$$E_1 \circ E_2 := \{(x, z) \in X \times X \mid \exists y \in X \text{ such that } (x, y) \in E_1 \text{ and } (y, z) \in E_2\} \in \mathcal{E}.$$

(iv) 任意の $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E}$ について, $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{E}$.

(v) 任意の $E \in \mathcal{E}$ と $E' \subset E$ に対し, $E' \in \mathcal{E}$.

上記の設定において $\mathcal{E}$ の各要素を**制御集合**と呼ぶ．各 $E \in \mathcal{E}$ および X の部分集合 T に対し, E-**近傍**を以下のように定義する：

$$E[T] := \{s \in X \mid \exists t \in T \text{ such that } (s, t) \in E\}.$$

$\mathcal{P}(X \times X)$ の部分集合 $\mathcal{C}$ が次の 4 つの条件を満たすとき, **粗構造の基底**と呼ぶ（cf. [3]）．

(i)' ある $E \in \mathcal{C}$ が存在して $\mathrm{diag}(X) \subset E$.

(ii)' 各 $E \in \mathcal{C}$ に対し, ある $E' \in \mathcal{C}$ が存在して $E^{\top} \subset E'$.
(iii)' 各 $E_1, E_2 \in \mathcal{C}$ に対し, ある $E' \in \mathcal{C}$ が存在して $E_1 \circ E_2 \subset E'$.
(iv)' 各 $E_1, E_2 \in \mathcal{C}$ に対し, ある $E' \in \mathcal{C}$ が存在して $E_1 \cup E_2 \subset E'$.

粗構造の基底$\mathcal{C}$ を持つとき, 次のように粗構造が定義される.

$$\langle \mathcal{C} \rangle := \{E \subset X \times X \mid \exists C \in \mathcal{C} \text{ such that } E \subset C\}.$$

例 2.5. (X, d) を距離空間とし, 任意の $r \geq 0$ に対し, 集合

$$E_r := \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) \leq r\}$$

を定義する. このとき, 族 $\mathcal{C}_d := \{E_r \subset X \times X \mid r \geq 0\}$ は粗構造の基底である. 集合 $\mathcal{E}_d := \langle \mathcal{C}_d \rangle$ を**有界粗構造**と呼ぶ.

以下のように粗空間からボルノロジーを誘導することができる.

命題 2.6. $(X, \mathcal{E})$ を粗空間とする. このとき,

$$\mathcal{B}_{\mathcal{E}} := \{\cup_{i=1}^{n} E_i[p_i] \mid n \in \mathbb{N}, \{E_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{E}, \{p_i\}_{i=1}^{n} \subset X\} \cup \{\emptyset\}$$

は X 上のボルノロジーとなる.

2.3. **ボルノロジー空間への群作用.** この節では, $(X, \mathcal{B}_X)$ をボルノロジー空間, L をボルノロジー $\mathcal{B}_L$ を備えた群, ρ を X 上の L-作用とする.

定義 2.7 (ボルノロジー群, cf. [6]). 群 L が**ボルノロジー群**であるとは, 積

$$L \times L \to L, \quad (l_1, l_2) \mapsto l_1 l_2$$

および逆元をとる写像

$$L \to L, \quad l \mapsto l^{-1}$$

がともに有界である場合であることをいう. ここで, $L \times L$ には $\langle \mathcal{B}_L \times \mathcal{B}_L \rangle$ が備えられている.

位相群に連続作用を定義することに呼応する形で, ボルノロジー群に有界作用を以下で定義する.

定義 2.8 (有界作用). L の X 上の作用 ρ が**有界作用**であるとは, 次の写像が有界であるときである：

$$L \times X \to X, \quad (l, x) \mapsto lx$$

ここで, $L \times X$ には $\langle \mathcal{B}_L \times \mathcal{B}_X \rangle$ が備えられている.

2.4. **粗空間への群作用.** この節では, [2] によって導入された粗空間上の一様有界な群作用の定義を紹介する.

L を群, X を集合, ρ を X 上の L-作用とする. 各 $l \in L$, $X \times X$ の部分集合 E に対し, 次の 2 つの記法を使用する:

$$l^*E := \{(lx, ly) \mid (x, y) \in E\}$$
$$L^*E := \bigcup_{l \in L} l^*E.$$

定義 2.9. $(X, \mathcal{E})$ を粗空間, L を群とする. L の作用 ρ が**一様有界**であるとは, 各 $E \in \mathcal{E}$ に対し, ある $F \in \mathcal{E}$ が存在し, 任意の $l \in L$ に対し $l^*E \subset F$ となることをいう.

上記の定義は, L^*E が各 $E \in \mathcal{E}$ に対し制御集合であることを意味する. また, $E, F \in \mathcal{E}$ の要素が $l^*E \subset F$ を満たす場合, 任意の点 $x \in X$ に対し $l \cdot (E[x]) \subset F[lx]$ が成り立つ.

例 2.10. (X, d) を距離空間とし, L を等長変換群の部分群とする. このとき, L は $(X, \mathcal{E}_d)$ に一様有界に作用している.

3. ボルノロジー的 Proper 性と位相的 Proper 性との関連

この節では, $(L, \mathcal{B}_L)$ をボルノロジー群, $(X, \mathcal{B}_X)$ をボルノロジー空間, ρ を X 上の有界な L-作用とする.

定義 3.1. 作用 ρ に関連するいくつかの用語を次のように定義する.

(i) 作用 ρ が**ボルノロジー的 *Proper***（以降 *B-proper* と略記）であるとは, 任意の $B, B' \in \mathcal{B}_X$ に対し, $L_{B \to B'}$ が L の有界集合であることをいう.
(ii) 作用 ρ が**弱ボルノロジー的 *Proper***（以降, 弱 *B-proper* と略記）であるとは, 任意の $x \in X$ および $B \in \mathcal{B}_X$ に対し, $L_{x \to B}$ が L の有界集合であることをいう.
(iii) 作用 ρ が ***BI* 条件**を満たすとは, 任意の $x \in X$ に対し, $L^x \in \mathcal{B}_L$ であることをいう.

このようにボルノロジー的に定義した proper 性と位相的 proper 性はどのような関係性があるだろうか. 実は L や X に適切な設定を定めると同値になる.

定理 3.2. L を局所コンパクトハウスドルフ群, X を連続的な L-作用を備えた局所コンパクトハウスドルフ空間とする. また, ボルノロジー $(L, \mathcal{B}_{\mathrm{cpt}}(L))$ および $(X, \mathcal{B}_{cpt}(X))$ を考える. このとき, 次のことが成り立つ.

(i) X 上の L-作用が *proper* であることと, *B-proper* であることは同値である.
(ii) X 上の L-作用が弱 *proper* であることと, 弱 *B-proper* であることは同値である.
(iii) X 上の L-作用が *CI* 条件を満たすことと, *BI* 条件を満たすことは同値である.

4. 主定理

この節では, B-proper 性と弱 B-proper 性を特徴付ける. $(L, \mathcal{B}_L)$ をボルノロジー群, $(X, \mathcal{B}_X)$ をボルノロジー空間, ρ を X 上の有界な L-作用とする.

4.1. **弱 B-proper 性の特徴付け.** 作用 ρ が BI 条件を満たすと仮定すると, 弱 B-proper 性は次のように特徴付けられる.

定理 4.1 (N)**.** *作用 ρ が BI 条件を満たすと仮定する. ι_x を $L \cdot x$ から X への包含写像, $q^x\colon L \to L \cdot x$ $(l \mapsto lx)$ とおく. このとき, 次の 2 つの条件は同値である.*

(i) 作用 ρ は弱 B-proper である.
(ii) 任意の $x \in X$ に対し, $\iota_x^*(\mathcal{B}_X) = q_*^x(\mathcal{B}_L)$ が成り立つ.

注意として弱 B-proper 性が成り立たない場合でも $q_*^x\mathcal{B}_L \subset \iota_x^*\mathcal{B}_X$ は成り立つ.

例 4.2. *節 3 において, $\mathbb{Z}$ の作用 ρ_1(例 1.3 参照)が CI 条件を満たし, 弱 proper ではないことを示した. さらに定理 3.2 により, 群と空間の両方にコンパクトボルノロジーを入れると, この作用は BI 条件を満たすが弱 B-proper ではないことがわかる. 上記の定理によって導入された 2 つの集合を考察する.*

$e_0 \in S^1$ を考える. このとき次の 2 つのボルノロジーが得られる.

$$\iota_{e_0}^*(\mathcal{B}_{cpt}(S^1)) = \{\{e^{2\pi i\sqrt{2}n} \mid n \in N\} \mid N \subset \mathbb{Z}\}$$
$$q_*^{e_0}(\mathcal{B}_{cpt}(\mathbb{Z})) = \{\{e^{2\pi i\sqrt{2}n} \mid n \in N\} \mid N \subset \mathbb{Z}; \mathit{finite}\}.$$

$\iota_{e_0}^*(\mathcal{B}_{cpt}(S^1))$ は $q_*^{e_0}(\mathcal{B}_{cpt}(\mathbb{Z}))$ と等しくないため, 弱 B-proper ではない.

イントロダクションでは, 吉野氏の弱 proper の幾何的な特徴付けに関する定理 1.4 を紹介した. 定理 3.2 で示したように特定の状況下で弱 proper と弱 B-proper であることは同値であったから, それぞれの幾何的な特徴付けは同じ状況下で同値である. しかし以下の命題はあえて直接的に証明することもできる.

命題 4.3. *L を局所コンパクトハウスドルフ群, X を L-連続作用をもつ局所コンパクト空間とする. L と X にコンパクトボルノロジーを考えるとき, 次の 2 つの条件は同値である.*

(i) ρ は CI 条件を満たし, 各軌道は X において閉であり, 任意の $x \in X$ に対し $T_x\colon L/L_x \to L \cdot x$ は同相写像である.
(ii) ρ は BI 条件を満たし, 任意の $x \in X$ に対し $\iota_x^*(\mathcal{B}_{cpt}(X)) = q_x^*(\mathcal{B}_{cpt}(L))$ が成り立つ.

この命題で注意すべきことは, 一般に, 部分集合に相対位相を入れその位相によりコンパクトボルノロジーを誘導したものと, 先にコンパクトボルノロジーを誘導し, それを制限したものが一致しないことである. 実際, $\mathbb{R}$ と半開区間 $(0, 1]$ を考えると, 先に紹介し

たボルノロジーでは $(0,1]$ が有界集合でないのに対し, 後に紹介したボルノロジーでは有界集合になっている．その 2 つが一致することと (i) は同値であることをこの命題は主張する．

4.2. **B-proper 性の特徴付け．** この節では, 定理 3.2 において示した内容を拡張する．

集合 $\mathcal{C}_{L,X}$ を

$$\mathcal{C}_{L,X} := \left\{ \bigcup_{l \in L} lD \times lD \subset X \times X \mid D \in \mathcal{B}_X \right\}$$

と定義する．

定理 4.4 (N)**.** *作用 ρ が弱 B-proper であると仮定する．このとき, 次の 3 つの条件は同値である．*

(i) 作用 ρ は B-proper である．

(ii) 集合 $\mathcal{C}_{L,X}$ は X 上の粗構造の基底であり, $\mathcal{E} := \langle \mathcal{C}_{L,X} \rangle$ から誘導したボルノロジー $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ が $\mathcal{B}_X$ と一致する．

(iii) X 上に $\mathcal{B}_X$ と適合する粗構造 $\mathcal{E}$ が存在し, 作用が一様有界である．

イントロダクションで示したように, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上の $\mathbb{Z}$-作用 ρ_2（例 1.3 参照）は弱 B-proper だが, B-proper ではない．実際, $Z^*(S^1 \times S^1) \circ Z^*(S^1 \times S^1)$ を上から評価できる集合は $\mathcal{C}_{L,X}$ に存在せず, $\mathcal{C}_{L,X}$ は粗構造の基底ではない．

5. 終わりに

最後に今後の課題を述べて本稿を終える．

問題 5.1. *L を局所コンパクトハウスドルフ群, X をパラコンパクトな局所コンパクトハウスドルフ空間, ρ を X 上の L-連続作用であり, 弱 proper かつ商空間 $L \backslash X$ がパラコンパクトとなることを仮定する．このとき次の 2 つの条件は同値であることを直接証明できるか．*

(*i*) *X 上の位相に適合する一様構造 $\mathcal{U}$ が存在し, 作用 ρ が一様連続である．*

(*ii*) *X 上に $\mathcal{B}_{cpt}(X)$ と適合する粗構造 $\mathcal{E}$ が存在し, 作用 ρ が一様有界である．*

今回の設定では, 定理 3.2 により proper であることと B-proper であることは同値であるため, この 2 つの条件が同値であることはすぐにわかる．しかしながら直接証明しようとすると難しい．(i) から (ii) を示すには一様構造から粗構造をどのように誘導するかを考えてみたい．嶺氏, 山下氏, 山内氏の共同研究によって一様構造から粗構造を誘導する C_0 粗構造という構成法がある（cf. [5]）．この構成法を基にしながら群作用を考慮した新たな粗構造を定義することを模索したい．

また逆に (ii) から (i) を示すことを考える．一般に局所コンパクトハウスドルフ群は完全正則であるから, 位相に適合する一様構造が存在する．吉野氏の論文 [8] では, その一様構造を用いて ρ が一様連続になるような一様構造を構成していた．それを基にしながら,

作用の一様連続性は作用の連続性, 弱 proper 性, 一様有界性の 3 つの条件で導くことができるか考えてみたい.

専門家の方がご覧になった際はぜひご意見をいただきたい.

References

1. Ali Baklouti and Fatma Khlif, *Weak proper actions on solvable homogeneous spaces*, Internat. J. Math. **18** (2007), no. 8, 903–918. MR 2339576
2. Nikolay Brodskiy, Jerzy Dydak, and Atish Jyoti Mitra, *Coarse structures and group actions*, Colloq. Math. **111** (2008), no. 1, 149–158. MR 2353938
3. Dikran Dikranjan and Nicolò Zava, *Categories of coarse groups: quasi-homomorphisms and functorial coarse structures*, Topology Appl. **273** (2020), 106980, 31. MR 4074764
4. Henri Hogbe-Nlend, *Les racines historiques de la bornologie moderne*, Actes du Colloque d'Analyse Fonctionnelle (Univ. Bordeaux, Bordeaux, 1971), Supplément au Bull. Soc. Math. France, vol. Tome 100, Soc. Math. France, Paris, 1972, pp. 201–206. MR 355511
5. Kotaro Mine, Atsushi Yamashita, and Takamitsu Yamauchi, *C_0 coarse structures on uniform spaces*, Houston J. Math. **41** (2015), no. 4, 1351–1358. MR 3455363
6. Dinamérico P. Pombo, Jr., *Bornological groups*, Indian J. Math. **54** (2012), no. 2, 225–258. MR 3013350
7. John Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, vol. 31, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. MR 2007488
8. 吉野 太郎, **固有な作用の一様連続性について**, 表現論シンポジウム講演集 **2006** (2006), 22–30.

(H. Nagaya) Graduate School of Advanced Science and Engineering, Hiroshima University, 1-3-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima City, Hiroshima, 739-8526, Japan.

Email address: nagayahiroaki@hiroshima-u.ac.jp