Derived categories and equivalences on algebraic varieties

東京大学　大学院　数理科学研究科
軽部友裕 (Tomohiro KARUBE) *

概要

導来圏と代数幾何学の関連したトピックについて説明する．連接層の導来圏は代数多様体の不変量であり，幾何では捉えられない情報を持つ．この導来圏の研究はミラー対称性において重要な役割を果たしている．本レポートでは，Bridgeland 安定性条件を用いて導来圏の自己同値群を調べる手法について説明する．最後に，小平曲線と呼ばれる退化した楕円曲線に対する安定性条件の空間や導来同値群について述べる．

1　導入

Bridgeland 安定性条件（以下，単に安定性条件）は数理物理における安定性の数学的定式化として導入された [Bri07]．この安定性条件は slope 安定性の導来圏への一般化であり，slope 安定性が層のモジュライ空間を定めるように Bridgeland 安定性条件も導来圏の対象のモジュライ空間を定める．そのうえ，安定性条件全体の集合には位相が入り，複素多様体になることが知られている．この安定性条件の空間はミラー対称性や数え上げ幾何の観点から研究されている．

2　導来圏と自己同値

X を代数多様体とし，$\mathrm{Coh}(X)$ を X 上の連接層の圏とする．この時，$\mathrm{Coh}(X)$ はアーベル圏であるため，三角圏 $\mathcal{D}^b(X)$ を考えることが出来る．ここで $\mathcal{D}^b(X)$ は対象が有界複体である圏であり，射はホモトピー類を擬同型で割ったものである．

$\Phi\colon \mathcal{D}^b(X) \to \mathcal{D}^b(X)$ が導来同値であるとは，Φ が圏同値であり，三角圏の構造を保つことをいう．導来自己同値全体の集合を $\mathrm{Auteq}(\mathcal{D}^b(X))$ と書く．

定義 2.1. 導来自己同値 $\Phi \in \mathrm{Auteq}(X)$ が *standard* であるとは,Φ が以下の自己同値で生成されることをいう．

1. シフト関手 $[1]$
2. 直線束 $- \otimes \mathcal{L}$
3. X の自己同型 f による引き戻し f^*

standard な導来自己同値全体の集合を $\mathrm{Auteq}^{\mathrm{st}}(X)$ と書く．

---

* E-mail:karube-tomohiro803@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

定理 2.2 ([BO01])**.** X を代数多様体とする．X の標準束 ω_X か反標準 ω_X^{-1} が豊富であるとする．このとき，

$$\mathrm{Auteq}^{\mathrm{st}}(X) = \mathrm{Auteq}(X).$$

この定理から，（反）標準束が豊富ではない多様体に対しては導来自己同値を調べることが重要である．X を代数多様体とする．この時，Grothendieck 群 $G(X)$ は以下のように定義される群である．

$$G(X) = \bigoplus_{E\in\mathcal{D}^b(X)} \mathbb{Z}[E]/\left\{[E]-[F]+[H] \colon E\to F\to H\to \text{は完全三角をなす}\right\}.$$

例 2.3. C をなめらかな代数曲線とする．この時，*Grothendieck* 群 $G(C)$ は階数 2 の自由アーベル群である．生成元は構造層 $[\mathcal{O}_C]$ と摩天楼層 $[\mathcal{O}_x]$ となる．

導来自己同値 $\Phi\in\mathrm{Auteq}(X)$ が三角圏の構造を保つため，Grothendieck 群 $G(X)$ に作用を誘導する．これによって，以下の群準同型を得る．

$$\mathrm{Auteq}(X)\to\mathrm{Aut}(G(X)).$$

以下の疑問を考える．

疑問 2.4. 上の準同型の核を $\mathrm{Auteq}_0(X)$ と書く．このとき，$\mathrm{Auteq}_0(X)$ は決定できるだろうか？

まず初めに $\mathrm{Auteq}_0(X)$ の元をいくらか示す．

例 2.5. シフト関手 [1] は *Grothendieck* 群 $G(X)$ に -1 倍の作用する．従って，*2* 回シフトする関手 [2] は *Grothendieck* 群 $G(X)$ に自明に作用する．

球面ねじり関手と呼ばれる非自明なものもある ([ST01]).

定義 2.6. X を n 次元代数多様体とする．このとき，$E\in\mathcal{D}^b(X)$ が球面対象であるとは，以下を満たすことをいう．

1. $i=0,n$ の場合，　$\mathrm{Ext}^i(E,E)=\mathbb{C}$.
2. $i\neq 0,n$ の場合は $\mathrm{Ext}^i(E,E)=0$.
3. $E\otimes\omega_X\cong E$.

定理 2.7 ([ST01])**.** E を X の球面対象とする．このとき，自己同値 $T_E\colon\mathcal{D}^b(X)\to\mathcal{D}^b(X)$ が定まる．

このような自己同値 T_E を球面ねじり関手と呼ぶ．この球面ねじり関手 T_E は Grothendieck 群 $G(X)$ に

$$T_E([F]) = [F]+\chi(E,F)[E]$$

のように作用する．ここで $\chi(E,F)$ は Euler 形式である．従って，T_E^2 は $G(X)$ に自明に作用する．
X が楕円曲線や K3 曲面については以下のようなことが知られている．

定理 2.8 ([Orl02])**.** X を楕円曲線とする．このとき，

$$\mathrm{Auteq}_0(X) = \mathrm{Pic}^0(X)\rtimes\mathrm{Aut}(X)\times\mathbb{Z}[2].$$

定理 2.9 ([Bri08])**.** X を *K3* 曲面とする．以下の $\mathrm{Auteq}(X)$ の部分集合を考える．

$$\mathrm{Tw}_{tor} = \left\{T_{\mathcal{O}_C(k)} \mid C \text{ は } (-1) \text{ 曲線}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$
$$\mathrm{Tw}_{bun} = \{T_A \mid A \text{ は球面対象となるベクトル束 }\}$$

このとき，

$$\mathrm{Auteq}_0^*(X) \subset \langle T_{\mathcal{O}_C(k)}, T_A^2, T_A^{-2} \mid T_{\mathcal{O}_C(k)} \in \mathrm{Tw}_{tor}, T_A \in \mathrm{Tw}_{bun}\rangle.$$

ここで，集合 $B \subset \mathrm{Auteq}(X)$ に対して $\langle B\rangle$ は B の生成する部分群を表す．$\mathrm{Auteq}_0^*(X)$ は $\mathrm{Auteq}_0(X)$ の部分群で安定性条件の空間の連結成分を保つ．

この K3 曲面の場合の結果は，Bridgeland 安定性条件を用いて証明されている．この安定性条件は導来圏の自己同値群を調べる手法として有用である．講演者はこの安定性条件を用いて，小平曲線に対する導来自己同値群を調べた．

3 退化した楕円曲線

この章では小平曲線といわれる退化した楕円曲線を考える．

定義 3.1. S を曲面，B を準射影的曲線とする．この時，固有射 $\pi : S \to B$ の一般ファイバーが楕円曲線であり，各ファイバーに (-1) 曲線を含まないとき楕円曲面という．

楕円曲面は特異的なファイバーを持つ場合がある．この特異的なファイバーは小平により分類された [Kod63] ため小平曲線と呼ばれる．

定理 3.2. 楕円曲面 $S \to B$ のファイバーは次のように分類される．

- (I_0) 滑らかな楕円曲面
- (I_1) ノードを持つ有理曲線
- (I_N) 環状に交わる N 本の射影直線．（$N \geq 2$）．
- (II) カスプを持つ有理曲線
- (III) 1 点において重複度 2 で交わる *2* 本の射影直線．
- (IV) 1 点で交わる *3* 本の射影直線．
- (I_N^*) アフィンディンキン図形 $\widetilde{D_{N+4}}$ に対応する $N+5$ 本の射影直線．
- (II^*) アフィンディンキン図形 $\widetilde{E_8}$ に対応する 8 本の射影直線．
- (III^*) アフィンディンキン図形 $\widetilde{E_7}$ に対応する 7 本の射影直線．
- (IV^*) アフィンディンキン図形 $\widetilde{E_6}$ に対応する 6 本の射影直線．
- $({}_mI_N)$ (I_N) 型の重複ファイバー．（$N \geq 2$）．

本レポートでは，可約な小平曲線のみを扱う．

C を可約な小平曲線とし，既約成分を $C_1, \ldots, C_n$ とする．$G(C)$ を C の Grothendieck 群とする．

命題 3.3 ([MP17, Proposition 4.3.])**.** C の既約成分 C_i の被約化を Θ_i と書く．n を既約成分の個数とする．この時，*Grothendieck* 群 $G(C)$ は階数 $n+1$ の自由アーベル群であり，以下の基底で生成

される．

$$[\mathcal{O}_{\Theta_1}], \ldots, [\mathcal{O}_{\Theta_n}], [\mathcal{O}_x].$$

注意 3.4. C は特異的であるため局所自由層の *Grothendieck* 群 $K_0(C)$ とは異なることに注意しておく．しかし，オイラーペアリングをとることで，階級が等しいことがわかる．

4 安定性条件

この章では初めに安定性条件を定義する．次に Bridgeland による安定性条件の変形定理を紹介し，安定性条件の空間が複素多様体になることを見る．$\mathcal{D}$ を三角圏とし，有限階数の自由アーベル群 Λ と群準同型 $v : K(\mathcal{D}) \to \Lambda$ を固定する．

定義 4.1.

1. t 構造の核 $\mathcal{A}$ の安定性関数（*stability function*）Z とは群準同型 $Z : K(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ で，任意の $0 \neq E \in \mathcal{A}$ に対して
$$Z(E) \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R}_{<0}.$$
2. $E \in \mathcal{A}$ の位相 $\phi(E)$ は次のように定義される．
$$\phi(E) = (1/\pi) \arg Z(E) \in (0, 1]\,.$$
3. 安定性関数 Z に対して $0 \neq E \in \mathcal{A}$ が（半）安定であるとは，任意の部分対象 $F \subset E$ が $\phi(F) \leq (resp. <) \phi(E)$ を満たす．
4. Z が *Harder-Narashimhan* 条件 *(HN* 条件*)* を満たすとは，任意の $E \in \mathcal{A}$ に対して以下のフィルトレーションがとれる．
$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{n-1} \subset E_n$$
ただし，$F_j = E_j / E_{j-1}$ が半安定で
$$\phi(F_1) > \phi(F_2) > \cdots > \phi(F_n).$$
を満たす．

次の台条件は有限性に対応する条件であり，[KS08] や [BMS16] で導入された．以下では有限次元ベクトル空間 $\Lambda \otimes \mathbb{R}$ のノルム $\|-\|$ を固定する．

定義 4.2. 下の条件が成立するとき，$\mathcal{A}$ と安定性関数 Z が台条件を満たすという．

$$\sup \left\{ \frac{\|v(E)\|}{|Z(E)|} \mid E \text{ is semistable in } \mathcal{A} \right\} < \infty.$$

t 構造の核 $\mathcal{A}$ と安定性関数 Z の組 $(Z, \mathcal{A})$ が HN 条件と台条件を満たすとき，安定性条件という．この安定性条件全体の集合を $\mathrm{Stab}_\Lambda(\mathcal{D})$ と書く．

定理 4.3 ([Bri07, Theorem1.2.]). $\mathrm{Stab}_\Lambda(\mathcal{D})$ には自然に位相が入り，次の忘却写像が連続になる

$$\pi : \mathrm{Stab}_\Lambda(\mathcal{D}) \to \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{C}),\ (Z, \mathcal{A}) \mapsto Z.$$

加えて π は局所同相であり，$\mathrm{Stab}_\Lambda(\mathcal{D})$ に複素構造が入る．

安定性条件の空間 $\mathrm{Stab}_\Lambda(\mathcal{D})$ を安定多様体とよぶ．初めに固定した $v\colon K(\mathcal{D}) \to \Lambda$ があきらかな場合，省略し $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ と書く．

次はこの空間 $\mathrm{Stab}_\Lambda(\mathcal{D})$ への自己導来同値群からの作用を考える．$\Phi \in \mathrm{Auteq}(\mathcal{D})$ をとる．導来同値 Φ が Λ への作用を誘導すると仮定する．この時，$\sigma = (Z, \mathcal{A})$ に対して $\Phi(\sigma) = (Z \circ \Phi^{-1}, \Phi(\mathcal{A}))$ と定める．

滑らかな曲線は Grothendieck 群が階数 2 である，そのため，安定性条件を考える際 Λ として Grothendieck 群そのものをとれる．この安定多様体を単に $\mathrm{Stab}(C)$ と書く．曲線の安定性条件の空間について次のことが知られている．

定理 4.4 ([Bri07],[Oka06],[Mac07]). C を種数 g の滑らかな曲線とする．この時，次が成立．

$$\mathrm{Stab}(C) = \begin{cases} \mathbb{C}^2\ (g = 0) \\ \widetilde{\mathrm{GL}^+}(2, \mathbb{R})\ (g \geq 1). \end{cases}$$

$g \geq 1$ のとき，この定理は安定性条件が本質的に slope 安定性に対応するものしかないことを示している．$g = 0$ の射影直線の時に様子が異なるのは，圏同値 $\mathcal{D}^b(\mathbb{P}^1) \cong \mathcal{D}^b(\mathcal{E}nd(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)))$ により誘導される t 構造の Beilinson 核があるためである．

5 主結果

C を可約な小平曲線とする．C の安定性条件全体を $\mathrm{Stab}(C)$ と書く．初めに，$\mathrm{Stab}(C)$ においても slope 安定性に対応する安定性条件が存在することを示す．

命題 5.1. $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{H}$ をとる．この時，

$$Z = -\chi + z_1 rk_1 + \cdots + z_n\,\mathrm{rk}_n,\ \mathcal{A} = \mathrm{Coh}(C)$$

は安定性条件を定める．ただし，χ はオイラー数であり，rk_i は既約成分 C_i での階数である．

証明の概略. 組 $(Z, \mathcal{A})$ が HN 条件を満たす安定性関数であることは slope 安定性の証明と同様にできる．楕円曲面への埋め込み $i\colon C \hookrightarrow S$ により，有限次元ベクトル空間 $G(C) \otimes \mathbb{C}$ に二次形式が定まる．実際，$E, F \in G(C)$ に対して，

$$\langle E, F \rangle = -\chi(i_*(E), i_*(F))$$

とすると半負定値二次形式である．台条件については，この二次形式を用いることで [Bri08] などと同様に安定対象の議論に帰着して証明できる．□

上で構成した安定性条件を含む $\mathrm{Stab}(C)$ の連結成分を $\mathrm{Stab}^\dagger(C)$ と書く．実は楕円曲線とは異なり，slope 安定性には対応しない安定性条件も存在する．

命題 5.2. $r \in (k, k+1), z_2, \dots z_n \in \mathbb{H}$ をとる．この時，

$$Z = -\chi + r\,\mathrm{rk}_1 + z_2\,\mathrm{rk}_2 + \cdots + z_n\,\mathrm{rk}_n,\ \mathcal{A} = \langle \mathcal{F}_k[1], \mathcal{T}_k \rangle$$

は安定性条件になる．ただし，$\mathcal{F}_k, \mathcal{T}_k$ は以下で定まる．

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k &= \langle \mathcal{O}_{\Theta_1}(l) \mid l \leq k \rangle \\ \mathcal{T}_k &= {}^{\perp}\mathcal{F}_k \end{aligned}$$

注意 5.3. この安定性条件は *slope* 安定性には対応しない．特に $x \in C_1$ に対して摩天楼層 $\mathcal{O}_x$ は以下の *JH* フィルトレーションを持ち，安定ではない．

$$0 \to \mathcal{O}_{\Theta_1}(k+1) \to \mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_{\Theta_1}(k)[1] \to 0$$

安定性条件の空間を調べる際に導来同値の作用を調べることが不可欠であり，[Kar23] では導来同値を具体的に構成した．これは [ST01] で定義された球面ねじり関手を特異的ファイバーに制限することで得られた．

定理 5.4. C を楕円曲面 $S \to B$ の特異ファイバーで得られる小平曲線とする．自然な閉埋め込み $j\colon C \to S$ をとり，G を C に含まれる射影直線とする．この時，C の導来同値 $\Phi_{\mathcal{O}_G(k)}$ があり，S 上の球面ねじり関手 $T_{\mathcal{O}_G(k)}$ に対して以下の可換性が成り立つ．

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^b(S_0) & \xrightarrow[\Phi_{\mathcal{O}_G(k)}]{} & \mathcal{D}^b(S_0) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle j_*} & & {\scriptstyle j_*}\Big\downarrow \\ \mathcal{D}^b(S) & \xrightarrow{T_{\mathcal{O}_G(k)}} & \mathcal{D}^b(S), \end{array}$$

ここで構成した導来同値 $\Phi_{\mathcal{O}_G(k)}$ はベクトル空間 $G(C) \otimes \mathbb{C}$ において超平面 $\{v \in G(C) \otimes \mathbb{C} \mid \langle v, [\mathcal{O}_G(k)] \rangle = 0\}$ を軸とする鏡映変換になっている．この導来同値の安定性条件の空間 $\mathrm{Stab}^{\dagger}(C)$ への作用を観察することで，次の命題を得る．

命題 5.5. $\mathcal{B}$ を $\Phi_{\mathcal{O}_{\Theta_i}(k)}$ で生成される自己導来同値群の部分群とする．この時，次が成り立つ．

$$\mathrm{Stab}^{\dagger}(C) = \bigcup_{\Phi \in \mathcal{B}} \Phi(\overline{U(C)}).$$

次のような導来同値を考える．

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}_{\mathrm{tri}}(C) &= \{f \in \mathrm{Aut}(C) \mid f_* \text{ is trivial in } G(C)\}, \\ \mathrm{Pic}^0_{\mathrm{tri}}(C) &= \{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(C) \mid \mathcal{L}|_{\Theta_i} \cong \mathcal{O}_{\Theta_i} \text{ for all reduced curves } \Theta_i\}. \end{aligned}$$

$\mathrm{Pic}^0_{\mathrm{tri}}(C) \rtimes \mathrm{Aut}_{\mathrm{tri}}(C)$ は $\mathrm{Stab}^{\dagger}(C)$ において自明に作用する．この観察と上の命題を用いることで，次の主定理を得る．

定理 5.6 ([Kar23])**.** $G(C) \otimes \mathbb{C}$ の開集合 $\mathcal{P}^+_0(C) \subset G(C)^{\vee} \otimes \mathbb{C}$ があり，忘却写像の制限

$$\pi : \mathrm{Stab}^{\dagger}(C) \to \mathcal{P}^+_0(C)$$

が被覆写像になる．加えて，π のデッキ変換群は $\mathrm{Auteq}^*_0(C)/(\mathrm{Pic}^0_{\mathrm{tri}}(C) \rtimes \mathrm{Aut}_{\mathrm{tri}}(C))$ と同型になる．

参考文献

[BMS16] Arend Bayer, Emanuele Macrì, and Paolo Stellari, *The space of stability conditions on abelian threefolds, and on some Calabi-Yau threefolds*, Inventiones mathematicae **206** (2016), no. 3, 869–933.

[BO01] Alexei Bondal and Dmitri Orlov, *Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences*, Compositio Mathematica **125** (2001), no. 3, 327–344.

[Bri07] Tom Bridgeland, *Stability conditions on triangulated categories*, Annals of Mathematics (2007), 317–345.

[Bri08] ———, *Stability conditions on K3 surfaces*, Duke Mathematical Journal **141** (2008), no. 2, 241–291.

[Kar23] Tomohiro Karube, *Stability conditions on degenerated elliptic curves*, arXiv preprint arXiv:2301.09453 (2023).

[Kod63] Kunihiko Kodaira, *On compact analytic surfaces: II*, Annals of Mathematics (1963), 563–626.

[KS08] Maxim Kontsevich and Yan Soibelman, *Stability structures, motivic Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations*, arXiv preprint arXiv:0811.2435 (2008).

[Mac07] Emanuele Macrì, *Stability conditions on curves*, Mathematical Research Letters **14** (2007), 657–672.

[MP17] Ana Cristina López Martín and Carlos Tejero Prieto, *Derived equivalences and kodaira fibers*, Journal of Geometry and Physics **122** (2017), 69–79.

[Oka06] So Okada, *Stability manifold of p ^ 1*, Journal of Algebraic Geometry **15** (2006), no. 3, 487–505.

[Orl02] Dmitri Olegovich Orlov, *Derived categories of coherent sheaves on abelian varieties and equivalences between them*, Izvestiya: Mathematics **66** (2002), no. 3, 569.

[ST01] Paul Seidel and Richard Thomas, *Braid group actions on derived categories of coherent sheaves*, Duke Mathematical Journal **108** (2001), no. 1, 37–108.