Characteristic cycle of a rank one sheaf on a smooth variety of positive characteristic and ramification theory

東京科学大学・理学院　谷田川友里 *
Yuri Yatagawa
Department of Mathematics, School of Science
Institute of Science Tokyo

§1. 導入

複素多様体上の構成可能層の特性サイクル ([KS]) と類似の概念として、正標数のなめらかな代数多様体上の構成可能層の特性サイクルがある ([Sa1])。正標数の代数多様体上の特性サイクルは複素多様体の場合と同様に余接束上の代数的サイクルとして定義されるが、複素多様体の場合のものに比べ、構成が複雑であり、具体的に計算することは一般的に難しい。

X を標数 $p > 0$ の代数閉体 k 上なめらかな代数多様体とし、Λ を標数 $\ell \neq p$ の有限体、$\mathcal{F}$ を X 上の Λ 加群の構成可能層とする。$\mathcal{F}$ の特性サイクル $CC(\mathcal{F})$ を具体的に計算することの利点の一つは、以下の指数公式により $\mathcal{F}$ のオイラー数が具体的に計算できることである。

定理 1 ([Sa1, Theorem 7.13])**.** X が k 上射影的なとき、$\mathcal{F}$ のオイラー数

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{F})$$

は X の余接束 T^*X の零切断 $T^*_X X$ と特性サイクル $CC(\mathcal{F})$ との交点数 $(CC(\mathcal{F}), T^*_X X)_{T^*X}$ として

$$\chi(X, \mathcal{F}) = (CC(\mathcal{F}), T^*_X X)_{T^*X}$$

と計算できる。

X 上の構成可能層 $\mathcal{F}$ の特性サイクルの計算は X のなめらかな局所閉部分代数多様体のからなる stratification をとり、強型の特異点解消を認めることによって次の場合に帰着することができる。

*本研究は JSPS 科研費 JP21K13769 の助成を受けたものである。

(*) $\mathcal{F}$ は X 上の単純正規交叉因子 D の補集合 $U = X - D$ 上の Λ 加群の局所定数層 $\mathcal{G}$ の零延長 $j_!\mathcal{G}$ である。ただし、$j\colon U \to X$ は自然な開埋め込みを表す。

本稿では、この分岐理論を考えるのに適した設定 (*) のもとで、局所定数層 $\mathcal{G}$ の階数を 1 に制限した場合の分岐理論を用いた特性サイクルの計算について、論文 [Y3] の概要を説明する。簡単のため、本稿を通して k は代数閉体を表し、k 上の代数多様体とは k 上有限型であるような連結スキームを表すことにする。

§2. 特性サイクル

特性サイクル ([Sa1]) の定義と性質を確認する。X を代数閉体 k 上のなめらかな代数多様体とする。k の標数を p とし、Λ を標数が $\ell \neq p$ の有限体とする。$\mathcal{F}$ を X 上の Λ 加群の構成可能層とする。

X 上のベクトル束 E とその閉部分集合 C に対して、$\mathbf{G}_m$ の E への作用によって C が不変であるとき、C は**錐的**であるという。

定義 2 ([Be, 1.2])**.** C を余接束 $T^*X = \operatorname{Spec} S^\bullet\Omega_X^{1\vee}$ の錐的な閉部分集合とし、$dh\colon T^*X \times_X W \to T^*W$, $df\colon T^*Y \times_Y W \to T^*W$ を k 上なめらかな代数多様体の間の射 $h\colon W \to X$, $f\colon W \to Y$ から定まる W 上のベクトル束の間の標準的な射とする。

(1) k 上のなめらかな代数多様体の間の射の組 (h, f) が 2 つの条件

 (a) $dh^{-1}(T^*_W W) \cap (h^*C) \subset T^*_X X \times_X W$ (i.e. h は C-**横断的**)

 (b) $df^{-1}(dh(h^*C)) \subset T^*_Y Y \times_Y W$

 をともにみたすとき、組 (h, f) は C-**横断的**であるという。ただし、$h^*C = C \times_X W$ とする。

(2) w を W の閉点とし、$j\colon W - \{w\} \to W$ を自然な開埋め込みとする。組 (h, f) の $W - \{w\}$ への制限 $(h \circ j, f \circ j)$ が C-横断的であるとき、w は**高々 f の C-特性点**であるという。

C-横断的であることの定義から、$C' \subset C$ をみたす 2 つの錐的な閉部分集合 $C, C' \subset T^*X$ に対して、C-横断的な射は C'-横断的でもあることがわかる。

X 上の Λ 加群の構成可能複体 $\mathcal{F}$ に対しては、次の条件 (S) をみたすような最小の錐的な閉部分集合 $C \subset T^*X$ が存在する ([Be, Theorem 1.3 (i)])。

(S) k 上なめらかな代数多様体の間の射の組 $(h\colon W \to X, f\colon W \to Y)$ が C-横断的であるとき、f は $h^*\mathcal{F}$ に関して局所非輪状である。

錐的な閉部分集合 $C \subset T^*X$ が条件 (S) をみたすとき、$\mathcal{F}$ は C に**マイクロ台をもつ**という。$\mathcal{F}$ が C にマイクロ台をもつような T^*X の最小の錐的な閉部分集合 $C \subset T^*X$ を $SS(\mathcal{F})$ と表し、$\mathcal{F}$ の**特異台**とよぶ ([Be, 1.3])。特異台 $SS(\mathcal{F})$ の任意の既約成分の次元は X の次元に等しくなる ([Be, Theorem 1.3 (ii)])。

X 上の構成可能複体 $\mathcal{F}$ の**特性サイクル** $CC(\mathcal{F})$ は特異台 $SS(\mathcal{F})$ の既約成分たちの $\mathbf{Z}$ 上の線型結合 A で次のミルナー公式で特徴づけられるようなものをいう ([Sa1, Definition 5.10])。

定理 3 ([Sa1, Theorems 5.9, 5.18]). $SS(\mathcal{F})$ の既約成分の $\mathbf{Z}$ 上の線型結合 A で、任意のエタール射 $h\colon W \to X$ と任意の k 上なめらかな曲線への射 $f\colon W \to Y$ の組 (h,f)、および高々 f の $SS(\mathcal{F})$-特性点であるような任意の閉点 $w \in W$ に対して、

$$\mathrm{dimtot}\,\phi_w(h^*\mathcal{F}, f) = (A, df)_{T^*W,w}$$

が成り立つようなものがただ一つ存在する。ここで、左辺の dimtot は全次元を、ϕ_w は消失輪体複体の w での茎を表す。右辺の df は T^*Y の基底から定まる T^*W の切断を、$(-,-)_{T^*W,w}$ は T^*W の w でのファイバーでの交点数を表す。

§3. 完備離散付値体の分岐理論

特性サイクル ([Sa1]) の計算に用いる分岐理論における不変量を紹介する。

完備離散付値体 K に対して、$\mathcal{O}_K$ で K の付値環、$\mathfrak{m}_K \subset \mathcal{O}_K$ で極大イデアル、$F_K = \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K$ で剰余体を表す。完備離散付値体 K の剰余体 F_K が完全体である場合の分岐理論は [Se] に詳しい解説がある。ここでは F_K が剰余体であることは仮定しない。

L を完備離散付値体 K の有限次ガロア拡大とし、$G = \mathrm{Gal}(L/K)$ をそのガロア群とする。[Se] における F_K が完全体の場合の分岐群の一般化であるような 2 種類の G の分岐群が Abbes-斎藤 [AS1] により一般に定義されており、$\{G^r\}_{r\in\mathbf{Q}_{\geq 1}}$ をそのうちの非対数的な分岐群、$\{G^r_{\log}\}_{r\in\mathbf{Q}_{\geq 0}}$ を対数的な分岐群とする。分岐群とは L/K の中間体の K 上の分岐を測るような G の正規部分群による減少フィルトレーションであり、2 つの分岐群の間には任意の $r \in \mathbf{Q}_{\geq 1}$ に対して

$$G^r \supset G^r_{\log} \supset G^{r+1}$$

という関係がある ([AS1, Proposition 3.15 (1)])。$r \in \mathbf{Q}_{\geq 1}$ に対して $G^{r+} = \bigcup_{s>r} G^s$, $r \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$ に対して $G^{r+}_{\log} = \bigcup_{s>r} G^s_{\log}$ とおく。$I = \mathrm{Ker}(G \to \mathrm{Aut}(F_L)) \subset G$ を惰性群とし、F_K の標数を p とする。暴分岐群 $P \subset G$ とは、$p = 0$ の場合には $P = \{1\}$、$p > 0$ の場合には I のただ 1 つの p シロー部分群のことをいう。これらに対して、次が成り立つ ([AS1, Propositions 3.7 (1), 3.7 (3), 3.15 (2), 3.15 (4)])。

(1) $G^1 = G^0_{\log} = I$

(2) $G^{1+} = G^{0+}_{\log} = P$

(3) F_K が完全体のとき、$\{G^r_{\mathrm{cl}}\}_{r\in\mathbb{Q}_{\geq -1}}$ を [Se] の意味での G の分岐群とすると、任意の $r \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$ に対して $G^{r+1} = G^r_{\log} = G^r_{\mathrm{cl}}$ が成り立つ。

次に G の表現に対する不変量を定義する。$p = 0$ のときには C を任意の体とし、$p > 0$ のときには C を標数が p と異なる体として、V を C 上 G の有限次元表現とする。このとき、$p = 0$ のときには $P = \{1\}$ であり、$p > 0$ のときには P が p 群であることから、V の G^{r+} 固定部分が $\bigoplus_{1\leq s\leq r} V(s)$ となり、$\bigoplus_{s>r} V(s)$ が G^{r+} 不変であるような C ベクトル空間 V の直和分解

$$V = \bigoplus_{r\geq 1} V(r)$$

および、$G_{\log}^{r+}$ 固定部分が $\bigoplus_{0\le s\le r} V_{\log}(s)$ となり、$\bigoplus_{s>r} V_{\log}(s)$ が $G_{\log}^{r+}$ 不変であるようなような C ベクトル空間の直和分解

$$V=\bigoplus_{r\ge 0} V_{\log}(r)$$

が定まる。この分解を用いて定まる

$$\mathrm{Dt}(V)=\sum_{r\ge 1} r\cdot\dim V(r),\quad \mathrm{Sw}(V)=\sum_{r\ge 0} r\cdot\dim V_{\log}(r)$$

をそれぞれ、V の**全次元**および V の**スワン導手**という。定義から、V が 1 次元の場合には、$\mathrm{Dt}(V)$ は G^{r+} が自明に作用するような最小の r に等しく、$\mathrm{Sw}(V)$ は $G_{\log}^{r+}$ が自明に作用するような最小の r に等しい。V の代わりに V 対応する指標 $\chi\colon G\to C^\times$ を考えている場合には $\mathrm{Sw}(V)$, $\mathrm{Dt}(V)$ を $\mathrm{Sw}(\chi)$, $\mathrm{Dt}(\chi)$ とも書く。G の C 上の 1 次元表現の全次元およびスワン導手は次のハッセ・アルフの定理により整数になることがわかる。

定理 4 ([AS2, Corollaire 9.12], [KS, Theorem 1.3], [Y1, Theorem 3.1], [Sa2, Theorem 4.3.1.2])**.** G がアーベル群のとき、$G^r\ne G_{r+}$ となる $r\in\mathbf{Q}_{\ge 1}$ および $G_{\log}^s\ne G_{\log}^{s+}$ となる $s\in\mathbf{Q}_{\ge 0}$ はすべて整数である。

これらの分岐の不変量は K の標数が $p>0$ である場合には次のように K のヴィット環を用いて計算することができる。

例 5 ([AS2, Corollaire 9.12], [Y1, Theorem 3.1], cf. [Br, §1], [K1, §2, §3], [M, §3])**.** K の標数が $p>0$ であるとする。$\chi\colon G\to C^\times$ を G の指標とし、χ の p 部分の位数を p^s とする。F でヴィット環 $W_s(K)$ 上のフロベニウス写像

$$F\colon W_s(K)\to W_s(K)\ ;\ (a_{s-1},a_{s-2},\dots,a_0)\mapsto(a_{s-1}^p,a_{s-2}^p,\dots,a_0^p)$$

を表す。アルティン・シュライヤー・ヴィット理論による同型

$$W_s(K)/(F-1)W_s(K)\xrightarrow{\simeq} H^1(K,\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z})$$

と標準的な全射 $W_s(K)\to W_s(K)/(F-1)W_s(K)$ の合成による像が χ の p 部分になるような $a=(a_{s-1},a_{s-2},\dots,a_0)\in W_s(K)$ のうち、

$$\mathrm{ord}_K(a)=\min_i\{p^i\,\mathrm{ord}_K(a_i)\}$$

が最大であるようなものをとる。ここで、$a_i\in K$ に対する $\mathrm{ord}_K(a_i)$ は K の正規付値による a_i の付値を表す。このように $a\in W_s(K)$ をとると、

$$\mathrm{Sw}(\chi)=\mathrm{ord}_K(a)$$

が成り立つ。$\mathrm{Sw}(\chi)=0$ のときには分岐群の性質 (2) により $\mathrm{Dt}(V)=1$ が成り立つ。$\mathrm{Sw}(\chi)>0$ なら、$\pi\in\mathcal{O}_K$ を素元とし、

$$F^{s-1}d\colon W_s(K)\to\Omega^1_{K/K^p}\ ;\ (a_{s-1},a_{s-2},\dots,a_0)\mapsto\sum_{i=0}^{s-1}a_i^{p^i-1}da_i$$

とするとき、

$$\mathrm{Dt}(\chi) = \begin{cases} \mathrm{Sw}(\chi) & (F^{s-1}da \notin \mathfrak{m}_K^{\mathrm{ord}_K(a)-1}\Omega^1_{\mathcal{O}_K}) \\ \mathrm{Sw}(\chi)+1 & (F^{s-1}da \in \mathfrak{m}_K^{\mathrm{ord}_K(a)-1}\Omega^1_{\mathcal{O}_K}) \end{cases}$$

が成り立つ。

K の標数が $p>0$ のとき、上の例における $\mathrm{ord}_K\colon W_s(K)\to \mathbf{Z}$ を用いて、次章で用いる $W_s(K)$ の2つの増大フィルトレーション $\{\mathrm{fil}_m W_s(K)\}_{m\in\mathbf{Z}_{\geq 1}}$ および $\{\mathrm{fil}^{\log}_n W_s(K)\}_{n\in\mathbf{Z}_{\geq 0}}$ を次のように定める。

定義 6 ([Br, §1], [M, 3.1])**.** K の標数は $p>0$ であるとする。$n\in\mathbf{Z}_{\geq 0}$ および $m\in\mathbf{Z}_{\geq 1}$ と $s'=\min\{\mathrm{ord}_p(m), s\}$ に対して加法群 $W_s(K)$ の部分群 $\mathrm{fil}^{\log}_n W_s(K)$ および $\mathrm{fil}_m W_s(K)$ を

$$\mathrm{fil}^{\log}_n W_s(K) = \{a\in W_s(K) \mid \mathrm{ord}_K(a)\geq -n\}$$
$$\mathrm{fil}_m W_s(K) = \mathrm{fil}^{\log}_{m-1} W_s(K) + V^{s-s'}\mathrm{fil}^{\log}_m W_{s'}(K)$$

により定める。ただし、$\mathrm{ord}_p(m)$ で m の p 進付値を表し、V でヴィットの環の間の Verschiebung 写像

$$V\colon W_{s''}(K)\to W_{s''+1}(K)\ ;\ (a_{s''-1}, a_{s''-2}, \ldots, a_0)\mapsto (0, a_{s''-1}, a_{s''-2}, \ldots, a_0)$$

を表す。

定義 6 のように定めるとき、例 5 における $a\in W_s(K)$ は $\mathrm{fil}^{\log}_{\mathrm{Sw}(\chi)} W_s(K)$ の元でありかつ $\mathrm{fil}_{\mathrm{Dt}(\chi)} W_s(K)$ の元になる ([Y2, Corollary 2.14])。

§4. 局所定数層の分岐理論

X を標数 p の代数閉体 k 上なめらかな代数多様体とし、$D\subset X$ を X 上の単純正規交叉因子とする。D の補集合 U の X への自然な埋め込みを $j\colon U\to X$ で表す。Λ を p と異なる標数 ℓ をもつ有限体とし、$\mathcal{F}$ を U 上有限次元 Λ ベクトル空間の局所定数層とする。$\bar{\eta}\to U$ を U の幾何的生成点とすると、$\mathcal{F}$ の $\bar{\eta}$ での茎 $\mathcal{F}_{\bar{\eta}}$ は U の数論的基本群 $\pi_1(U,\bar{\eta})$ の Λ 上の有限次元表現になる。

$\{D_i\}_{i\in I}$ を D の既約成分全体のなす族とし、$\mathfrak{p}_i$ を D_i の生成点とするとき、局所環 $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}_i}$ の完備化 $\mathcal{O}_{K_i}$ の商体 K_i は完備離散付値体であり、スキームの間の標準的な射

$$\mathrm{Spec}\, K_i \to U$$

をもつ。この射が定める数論的基本群の間の射

$$G_{K_i} = \mathrm{Gal}(\bar{K}_i/K_i)\to \pi_1(U,\bar{\eta})$$

によって $\mathcal{F}_{\bar{\eta}}$ から定まる絶対ガロア群 G_{K_i} の表現 $\rho_i\colon G_{K_i}\to \mathrm{Aut}(V)$ はある有限商 $G_i=\mathrm{Gal}(L_i/K_i)$ を経由するので、G_i の Λ 上の有限次元表現 V_i が定まる。この V_i の全次元およびスワン導手を

$$\mathrm{Dt}_i(\mathcal{F}) = \mathrm{Dt}(V_i),\quad \mathrm{Sw}_i(\mathcal{F}) = \mathrm{Sw}(V_i)$$

で表す。

$p=0$ かつ X の次元が d のとき、任意の $i\in I$ に対して G_i の暴分岐群 P_i は単位群になるので、$\mathrm{Dt}_i(\mathcal{F})=\dim\mathcal{F}_{\bar\eta}$ であり、零延長 $j_!\mathcal{F}$ の特性サイクルは次のように計算できる ([Sa1, Theorem 7.14])。

$$CC(j_!\mathcal{F})=(-1)^d\dim\mathcal{F}_{\bar\eta}\cdot\sum_{I'\in I}[T^*_{D_{I'}}X].$$

ただし、$I'\subset I$ に対して、$D_{I'}=\bigcap_{i\in I'}D_i$ ($I'=\emptyset$ なら $D_{I'}=X$) とし、$T^*_{D_{I'}}X=\mathrm{Spec}\,S^\bullet\mathcal{N}_{D_{I'}/X}$ で $D_{I'}\subset X$ の余正規束を表す。そのため、以下では $p>0$ の場合を考える。

$p>0$ かつ $\dim\mathcal{F}_{\bar\eta}=1$ とし、表現 $\mathcal{F}_{\bar\eta}$ に対応する指標を $\chi\colon\pi_1(U,\bar\eta)\to\Lambda^\times$ とする。指標 χ の p 部分を χ' と表し、$p^s\chi'=1$ となるような $s\in\mathbf{Z}_{\geq0}$ をとって χ' を $H^1_{\text{ét}}(U,\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z})$ の元とみる。$\epsilon\colon X_{\text{ét}}\to X_{\text{Zar}}$ で X のエタールサイトからザリスキサイトへの標準的なサイトの射を表すことにすると、$(\epsilon\circ j)_*=\epsilon_*j_*$ は入射的層を入射的層に移すので、スペクトル系列

$$E_2^{i,j}=H^i_{\text{Zar}}(X,R^j(\epsilon\circ j)_*\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z})\Rightarrow H^{i+j}_{\text{ét}}(U,\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z})$$

が定まり、このスペクトル系列から定まる完全列

$$0\to E_2^{1,0}\to H^1_{\text{ét}}(U,\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z})\to E_2^{0,1}\to E_2^{2,0}$$

と $i>0$ に対して $E_2^{i,0}=0$ であることから同型

$$H^1_{\text{ét}}(U,\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z})\xrightarrow{\simeq}\Gamma(U,R^1(\epsilon\circ j)_*\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z})) \tag{0.1}$$

が定まる。この同型により、χ' を $\Gamma(U,R^1(\epsilon\circ j)_*\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z}))$ の元と同一視する。

$W_s(\mathcal{O}_{U_{\text{ét}}})$ を U 上の長さ s のヴィットベクトルのエタール層とし、$W_s(\mathcal{O}_{U_{\text{Zar}}})$ を U 上の長さ s のヴィットベクトルのザリスキ層とする。$*=\text{ét},\text{Zar}$ に対し、

$$F\colon W_s(\mathcal{O}_{U_*})\to W_s(\mathcal{O}_{U_*})\ ;\ (a_{s-1},a_{s-2},\ldots,a_0)\mapsto(a_{s-1}^p,a_{s-2}^p,\ldots,a_0^p)$$

でフロベニウス写像を表すとき、エタール層の完全列

$$0\to W_s(\mathbf{F}_p)\to W_s(\mathcal{O}_{U_{\text{ét}}})\xrightarrow{F-1}W_s(\mathcal{O}_{U_{\text{ét}}})\to0$$

に $(\epsilon\circ j)_*$ を施すことで、$R^1(\epsilon\circ j)_*W_s(\mathcal{O}_{U_{\text{ét}}})=0$ から、同型

$$j_*W_s(\mathcal{O}_{U_{\text{Zar}}})/(F-1)j_*W_s(\mathcal{O}_{U_{\text{Zar}}})\xrightarrow{\simeq}R^1(\epsilon\circ j)_*\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z}$$

を得る。この同型と標準全射 $j_*W_s(\mathcal{O}_{U_{\text{Zar}}})\to j_*W_s(\mathcal{O}_{U_{\text{Zar}}})/(F-1)j_*W_s(\mathcal{O}_{U_{\text{Zar}}})$ との合成を

$$\delta_s\colon j_*W_s(\mathcal{O}_{U_{\text{Zar}}})\to R^1(\epsilon\circ j)_*\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z} \tag{0.2}$$

と表す。ここで、

$$\mathrm{Sw}_i^{D'}(\mathcal{F})=\begin{cases}\mathrm{Sw}_i(\mathcal{F}) & (i\in I')\\ \mathrm{Dt}_i(\mathcal{F}) & (i\in I-I')\end{cases}$$

とおき、$\mathcal{F}$ の分岐因子 $R_{\mathcal{F}}^{D'}$ を

$$R_{\mathcal{F}}^{D'} = \sum_{i\in I} \mathrm{Sw}_i^{D'}(\mathcal{F}) D_i$$

と定める。さらに、$i \in I$ と $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ ($i \in I - I'$ のときには $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$) に対して

$$\mathrm{fil}_n^{D'} W_s(K_i) = \begin{cases} \mathrm{fil}_n^{\log} W_s(K_i) & (i \in I') \\ \mathrm{fil}_n W_s(K_i) & (i \in I - I') \end{cases}$$

とおく。簡単のため、本稿を通して以下では、任意の $i \in I$ に対して $\mathrm{Sw}_i(\mathcal{F}) > 0$ であることおよび $p \neq 2$ を仮定する。

定義 7 (cf. [Y3, Definition 1.13]). $i \in I - I'$ に対して $n_i \geq 1$ となるような有効因子 $R = \sum_{i\in I} n_i D_i$ に対して

(1) X の開集合 V に対して部分群

$$\{a \in \Gamma(V, j_*W_s(\mathcal{O}_{U_{\mathrm{Zar}}})) \mid \forall i \in I \ a|_{K_i} \in \mathrm{fil}_{n_i}^{D'} W_s(K_i)\} \subset \Gamma(V, j_*W_s(\mathcal{O}_{U_{\mathrm{Zar}}}))$$

を対応させる $j_*W_s(\mathcal{O}_{U_{\mathrm{Zar}}})$ の (ザリスキ) 部分層を $\mathrm{fil}_R^{D'} j_*W_s(\mathcal{O}_U)$ と表す。

(2) (1) で定めた層 $\mathrm{fil}_R^{D'} j_*W_s(\mathcal{O}_U)$ の δ_s (0.2) による (層としての) 像を $\mathrm{fil}_R^{D'} R^1(\epsilon \circ j)_*\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z}$ で表す。

(3) $j_*\Omega^1_{U/k}$ を標準的な同型により $j_*j^*\Omega^1_{X/k}(\log D')$ と同一視する。さらに、標準的な単射により $\Omega^1_{X/k}(\log D')(R)$ を $j_*j^*\Omega^1_{X/k}(\log D')$ の部分層と同一視する。このとき、$j_*\Omega^1_{X/k}(\log D')$ の部分層 $\Omega^1_{X/k}(\log D')(R)$ を $\mathrm{fil}_R^{D'} j_*\Omega^1_U$ で表す。

(4) $i \in I'$ に対して $n_i > 0$ および $i \in I - I'$ に対して $n_i > 1$ が成り立つとき、(1), (2), (3) で定めた層に対して、$\mathrm{gr}_R^{D'} = \mathrm{fil}_R^{D'}/\mathrm{fil}_{R-D}^{D'}$ とおくことで、$\mathrm{gr}_R^{D'} j_*W_s(\mathcal{O}_U)$, $\mathrm{gr}_R^{D'} R^1(\epsilon \circ j)_*\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z}$, $\mathrm{gr}_R^{D'} j_*\Omega^1_U$ を定める。

層の射

$$-F^{s-1}d \colon j_*W_s(\mathcal{O}_{U_{\mathrm{Zar}}}) \to j_*\Omega^1_{U/k}$$

を X の開集合 V と $a = (a_{s-1}, a_{s-2}, \ldots, a_0) \in \Gamma(V, j_*W_s(\mathcal{O}_{U_{\mathrm{Zar}}}))$ に対して

$$-F^{s-1}da = -\sum_{i=0}^{s-1} a_i^{p^i-1} da_i$$

と定めることによって定めると、$-F^{s-1}d$ は定義 7 (4) における R に対して、準同型

$$\varphi_s^{(D'\subset D,R)} \colon \mathrm{gr}_R^{D'} j_*W_s(\mathcal{O}_U) \to \mathrm{gr}_R^{D'} j_*\Omega^1_U = \Omega^1_{X/k}(\log D')(R) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_D$$

を定める。さらに、$\mathrm{gr}_R^{D'} R^1(\epsilon \circ j)_*\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z}$ に対して次が成り立つ。

命題 8 (cf. [Y3, Proposition 1.16]). 定義 7 (4) における R に対して、図式

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathrm{gr}_R^{D'} j_* W_s(\mathcal{O}_U) \arrow[rr, "\varphi_s^{(D'\subset D,R)}"] \arrow[dr] & & \mathrm{gr}_R^{D'} j_* \Omega_U^1 \\
& \mathrm{gr}_R^{D'} R^1(\epsilon\circ j)_*\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z} \arrow[ur, "\phi_s^{(D'\subset D,R)}"'] &
\end{tikzcd} \tag{0.3}$$

を可換にする層の射

$$\phi_s^{(D'\subset D,R)}\colon \mathrm{gr}_R^{D'} R^1(\epsilon\circ j)_*\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z} \to \mathrm{gr}_R^{D'} j_*\Omega_U^1$$

がただ一つ定まる。ただし、図式 (0.3) における斜め下に向かう写像は δ_s (0.2) によって誘導される全射とする。

$R = R_{\mathcal{F}}^{D'}$ のとき、$\chi' \in \Gamma(X, \mathrm{fil}_R^{D'} R^1(\epsilon\circ j)_*\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z})$ の $\Gamma(X, \mathrm{gr}_R^{D'} R^1(\epsilon\circ j)_*\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z})$ における像を $\overline{\chi'}$ とおくと、命題 8 で構成された層の射 $\phi_s^{(D'\subset D,R_{\mathcal{F}}^{D'})}$ による $\overline{\chi'}$ の像

$$\phi_s^{(D'\subset D,R_{\mathcal{F}}^{D'})}(\overline{\chi'}) \in \Gamma(X, \mathrm{gr}_{R_{\mathcal{F}}^{D'}}\Omega_U^1) = \Gamma(D, \Omega_{X/k}^1(R_{\mathcal{F}}^{D'})\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_D)$$

が定まる。この像 $\phi_s^{(D'\subset D,R_{\mathcal{F}}^{D'})}(\overline{\chi'})$ を $\mathrm{char}^{D'}(\mathcal{F})$ で表し、$\mathcal{F}$ の D' に関して対数的な**特性形式**とよぶ。特性形式の構成から、D の各既約成分 D_i の生成点 $\mathfrak{p}_i$ における特性形式 $\mathrm{char}^{D'}(\mathcal{F})$ の芽 $\mathrm{char}^{D'}(\mathcal{F})_{\mathfrak{p}_i}$ は $\mathrm{Sw}_i(\mathcal{F})$ や $\mathrm{Dt}_i(\mathcal{F})$ と同様に V_i に対応する指標 $\chi_i\colon G_i \to \Lambda^\times$ の p 部分を像にもつような $W_s(K_i)$ の元を用いて計算することができる。

例 9 (cf. [M, §3], [Y1, §1]). 各 $i \in I$ に対して $\chi_i\colon G_i \to \Lambda^\times$ を V_i に対応する指標とする。このとき、χ_i の p 部分 χ_i' に対して、例 5 と同様に $\mathrm{Sw}(\chi_i)$, $\mathrm{Dt}(\chi_i)$ を計算するような $a = (a_{s-1}, a_{s-2}, \ldots, a_0) \in W_s(K_i)$ をとる。このとき、D_i の生成点 $\mathfrak{p}_i$ に対して、

$$\mathrm{char}^{D'}(\mathcal{F})_{\mathfrak{p}_i} = -F^{s-1}da$$

が成り立つ。ただし、右辺の $-F^{s-1}da$ は $i \in I'$ のときには

$$\mathrm{gr}_{R_{\mathcal{F}}^{D'}}^{D'} j_*\Omega_X^1(\log D')_{\mathfrak{p}_i} = (\mathfrak{m}_{K_i}^{-\mathrm{Sw}_i(\mathcal{F})}\Omega^1_{\mathcal{O}_{K_i}/\mathcal{O}_{K_i}^p})\otimes_{\mathcal{O}_{K_i}} F_{K_i}$$

の元とみて、$i \in I - I'$ のときには

$$\mathrm{gr}_{R_{\mathcal{F}}^{D'}}^{D'} j_*\Omega_X^1(\log D')_{\mathfrak{p}_i} = (\mathfrak{m}_{K_i}^{-\mathrm{Dt}_i(\mathcal{F})}\Omega^1_{\mathcal{O}_{K_i}}(\log))\otimes_{\mathcal{O}_{K_i}} F_{K_i}$$

の元とみる。

§5. 部分的に対数的な特性サイクルの構成

§4 で構成した分岐の不変量を用いて、特性サイクルの計算の候補となるような代数的サイクルを構成する。記号は §4 のままとし、X の次元は d でありかつ $\mathcal{F}$ の階数は 1 (すなわち $\dim\mathcal{F}_{\bar{\eta}} = 1$) であるとする。

§4 で定義した特性形式 $\mathrm{char}^{D'}(\mathcal{F})$ が任意の $x \in D$ に対して

$$\mathrm{char}^{D'}(\mathcal{F})(x) \neq 0$$

をみたすとき、層 $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐は D' **に関して対数的に clean** であるという。

層 $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が D' に関して対数的に clean であるとき、各 $i \in I$ に対して部分層

$$\Omega^1_X(-R^{D'}_{\mathcal{F}})|_{D_i} \cdot \mathrm{char}^{D'}(\mathcal{F}) \subset \Omega^1_{X/k}(\log D')|_{D_i} = \Omega^1_{X/k}(\log D') \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{D_i}$$

は D' に沿って対数的な極をもつ X の対数的な余接束 $T^*X(\log D') = \mathrm{Spec}\, S^\bullet\Omega^1_{X/k}(\log D')^\vee$ の D_i 上への制限 $T^*X(\log D') \times_X D_i$ の部分線束 $L^{D'}_{i,\mathcal{F}}$ を定める。このとき、$j_!\mathcal{F}$ の D' **に関して対数的な特性サイクル** $\mathrm{Char}^{\log}_{D'}(j_!\mathcal{F})$ を

$$CC^{\log}_{D'}(j_!\mathcal{F}) = (-1)^d([T^*_X X(\log D')] + \sum_{i \in I} \mathrm{Sw}^{D'}_i(\mathcal{F})[L^{D'}_{i,\mathcal{F}}])$$

と定義し、$SS^{\log}_{D'}(j_!\mathcal{F})$ で $CC^{\log}_{D'}(j_!\mathcal{F})$ の台を表す。ただし、$T^*_X X(\log D')$ は $T^*X(\log D')$ の零切断を表す。

この対数的な特性サイクル $CC^{\log}_{D'}(j_!\mathcal{F})$ は $D' = D$ のときには加藤 [K2] の導入した対数的な特性サイクルに等しい。また $D' = \emptyset$ のときには、$\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が D' に関して対数的に clean であるという条件が斎藤 [Sa1] による $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が強非退化であるという条件と同値になり、$\emptyset$ に関して対数的な特性サイクル $CC^{\log}_{\emptyset}(j_!\mathcal{F})$ は特性サイクル $CC(j_!\mathcal{F})$ に一致する ([Sa1, Theorem 7.14])。

ここで、特性サイクル $CC(j_!\mathcal{F})$ の計算をどのような状況で与えられるとよいかについて考える。$D' = \emptyset$ に関して $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が対数的に clean である場合にはすでに特性サイクルの計算が与えられているが、この状況はあまり一般的な状況ではない。一方で、$D' = D$ の場合には X が曲面の場合に X に D 上の閉点にそったブローアップを有限回繰り返すことで $\mathcal{F}$ の境界に沿った分岐が境界に関して対数的に clean であるような状況を実現できる ([K2, Theorem 4.1])。X の次元がより高い場合に、X に D 上の閉部分スキームに沿ったブローアップを有限回繰り返すことにより $\mathcal{F}$ の境界に沿った分岐が境界に関して対数的に clean であるような状況を実現できるという同様の主張に対する反例は未だ知られておらず、この主張におけるブローアップはオイラー数

$$\chi_c(U, \mathcal{F}) = \sum_i (-1)^i \dim H^i_c(U, \mathcal{F})$$

を変えないため、$\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が D に関して対数的に clean であるという仮定をおくことはまあまあ合理的であると考えられる。そのため、$\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が D に関して対数的に clean であるという条件よりも弱い条件で後々の議論にとって都合のよい条件を仮定におくことを考える。具体的には、

$$D^{\log}_{\mathcal{F}} = \bigcup_{i \in I^{\log}_{\mathcal{F}}} D_i, \quad I^{\log}_{\mathcal{F}} = \{i \in I \mid \mathrm{Sw}_i(\mathcal{F}) \neq \mathrm{Dt}_i(\mathcal{F})\}$$

とおき、次の 2 つの補題と命題を参考に、$\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が $D^{\log}_{\mathcal{F}}$ に関して対数的に clean であるという仮定をおく。

補題 10 (cf. [Y3, Lemma 1.35]). $I' \subset I$, $D' = \bigcup_{i \in I'} D_i$ とする。このとき、$\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が D' に沿って対数的に clean なら $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐は $D_{\mathcal{F}}^{\log}$ に関しても対数的に clean である。

命題 11 (cf. [Y3, Corollary 4.32]). $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が $D_{\mathcal{F}}^{\log}$ に関して対数的に clean であるとする。このとき、D 上の閉部分スキームに沿ったブローアップを有限回繰り返すことにより、次の条件をすべてみたすような固有的かつ双有理的な射 $f\colon X' \to X$ が得られる。

(1) f は同型 $f^{-1}(U) \xrightarrow{\simeq} U$ を誘導する。(以下の条件ではこの同型により $f^{-1}(U)$ と U を同一視する。)

(2) $\mathcal{F}$ の f^*D に沿った分岐は $(f^*D)_{\mathcal{F}}^{\log}$ に関して対数的に clean である。

(3) $j'\colon U \to X'$ を自然な開埋め込みとする。このとき、X' 上のベクトル束の標準的な射

$$T^*X' \to T^*X'(\log (f^*D)_{\mathcal{F}}^{\log})$$

による台 $SS^{\log}_{(f^*D)_{\mathcal{F}}^{\log}}(j'_!\mathcal{F})$ の引き戻しの任意の既約成分の次元は X の次元 d に等しい。

以下、

$$\tau_{D'}\colon T^*X \to T^*X(\log D')$$

で X 上のベクトル束 T^*X から $T^*X(\log D')$ の標準的な射を表すことにする。上の命題 11 におけるブローアップはオイラー数 $\chi_c(U, \mathcal{F})$ を変えないため、$\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が $D_{\mathcal{F}}^{\log}$ に関して対数的に clean であるという仮定に加えて命題 11 で達成される条件である、

$$SS'(j_!\mathcal{F}) = \tau^{-1}_{D_{\mathcal{F}}^{\log}}(SS^{\log}_{D_{\mathcal{F}}^{\log}}(j_!\mathcal{F}))$$

の任意の既約成分の次元が X の次元 d であるという仮定も合理的であると考えられる。後者の仮定を追加でおくことにより、対数的な特性サイクル $CC^{\log}_{D_{\mathcal{F}}^{\log}}(j_!\mathcal{F})$ の $\tau_{D_{\mathcal{F}}^{\log}}$ による引き戻し

$$CC'(j_!\mathcal{F}) = \tau^!_{D_{\mathcal{F}}^{\log}} CC^{\log}_{D_{\mathcal{F}}^{\log}}(j_!\mathcal{F})$$

が T^*X 上の代数的サイクルとして定まるため、この T^*X 上の代数的サイクル $CC'(j_!\mathcal{F})$ を $CC(j_!\mathcal{F})$ の計算の候補とする。

予想 12 (cf. [Y3, Conjecture 4.35]). $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐は $D_{\mathcal{F}}^{\log}$ に関して対数的に clean であるとする。さらに、$SS'(j_!\mathcal{F})$ の任意の既約成分の次元は X の次元 d に等しいとする。このとき、等号

$$CC(j_!\mathcal{F}) = CC'(j_!\mathcal{F})$$

が成立する。

この予想が成り立つとき、$CC'(j_!\mathcal{F})$ の台は $SS'(j_!\mathcal{F})$ であることと、局所定数層のアフィン開埋め込みによる零延長の特性サイクルの台が特異台に一致すること ([Sa1,]) により、予想の仮定の下での等号

$$SS(j_!\mathcal{F}) = SS'(j_!\mathcal{F})$$

も成り立つことになる。

一般には、$\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が $D_{\mathcal{F}}^{\log}$ に関して対数的に clean であるとき、次の包含関係が成り立つことがわかる。

命題 13 (cf. [Y3, Theorem 4.21])**.** $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐は $D_{\mathcal{F}}^{\log}$ に関して対数的に clean であるとする。このとき、

$$SS(j_!\mathcal{F}) \subset SS'(j_!\mathcal{F}) \cup \bigcup_{i \in I - I'} T^*_{D_i}X$$

が成り立つ。

§6. 主定理

主定理とその証明について説明する。前章の最後に述べた予想に関して、次の主定理が成り立つ。記号や仮定については前章と同じとする。

定理 14 (cf. [Y3, Theorem 5.6])**.** $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐は $D_{\mathcal{F}}^{\log}$ に関して対数的に clean であるとし、$SS'(j_!\mathcal{F})$ の任意の既約成分の次元は X の次元 d に等しいとする。このとき、X の閉部分集合 $SS'(j_!\mathcal{F}) \cap T^*_X X$ の X での余次元が 2 以下であれば、予想 *12* が成立する。

この定理と前章の最後に述べたことから、特異台に対しても次のことがわかる。

系 15 (cf. [Y3, Corollary 5.12])**.** 定理 14 の仮定の下で、等号

$$SS(j_!\mathcal{F}) = SS'(j_!\mathcal{F})$$

が成り立つ。

最後に証明の概略について説明する。$d = 1$ の場合には、$\mathcal{F}$ の D に沿った分岐は $\emptyset$ に関して clean であることがわかるので、斎藤 [Sa1] による特性サイクルの計算 [Sa1, Theorem 7.14] と $CC'(j_!\mathcal{F})$ の計算とを比較することにより定理 14 が証明できる。$d > 1$ の場合には、斎藤 [Sa1] による余次元 2 以上の閉部分集合を除いたところでの特性サイクルの計算 [Sa1, Theorem 7.14] と $CC'(j_!\mathcal{F})$ の計算により、$SS'(j_!\mathcal{F})$ の既約成分 C_a のうち X の閉部分集合 $C_a \cap T^*_X X$ の X での余次元が 2 であるようなものに対して、$CC(j_!\mathcal{F})$ および $CC'(j_!\mathcal{F})$ における重複度が等しいことを示せばよいことがわかる。

証明は次の命題を用いて X が曲面の場合に帰着し、X が曲面の場合の特性サイクルの計算 [Y2, Theorem 6.1] を用いる。以下、次元がそれぞれ e と d であるような k

上なめらかな代数多様体 W, Y と任意の既約成分の次元が Y の次元 d に等しいような錐的な閉部分集合 $C \subset T^*Y$ に対して、k 上の代数多様体の間の射 $h\colon W \to Y$ が**正しく** C-横断的であるとは、h が C-横断的でありかつ $h^*C = C \times_Y W$ の任意の既約成分の次元が e であることをいう ([Sa1, Definition 7.1.2])。

命題 16 ([Y3, Corollary 5.10])**.** X は k 上準射影的であるとする。さらに、$\mathcal{F}$ の D に沿った分岐は $D_{\mathcal{F}}^{\log}$ に関して対数的に clean であるとし、$SS'(j_!\mathcal{F})$ の任意の既約成分の次元は X の次元 d に等しいとする。e を d より真に小さい正の整数とすると、e 次元の k 上なめらかなある代数多様体 Y からの正しく $SS'(j_!\mathcal{F})$-横断的な正則閉埋め込み $h\colon Y \to X$ で、$h^*D = D \times_X Y$ が Y の単純正規交叉因子になるようなものが存在する。

特性サイクル $CC(j_!\mathcal{F})$ はエタール局所的に定義されており、$CC'(j_!\mathcal{F})$ も分岐の不変量を使ったその構成からザリスキ局所的に定義されているため、$CC(j_!\mathcal{F})$ と $CC'(j_!\mathcal{F})$ の間の等号を示すにあたっては、X の適当なアフィン開被覆をとることにより X は k 上準射影的であるとしてよい。正の整数 e で d より小さいものをとる。このとき、$SS'(j_!\mathcal{F})$ について調べることにより、$SS'(j_!\mathcal{F})$ の既約成分 C_a のうちで X の閉部分集合 $C_a \cap T_X^*X$ の X での余次元が e であるようなものの生成点は、それぞれただ 1 つの $D_{\mathcal{F}}^{\log}$ の既約成分の共通部分 $D_{C_a} = \bigcap_{i \in I_{C_a}} D_i$ 上にあり、ここに現れる $I_{C_a} \subset I_{\mathcal{F}}^{\log}$ は互いに異なることがわかる。そのため、さらに X の適当なアフィン開被覆をとることにより、そのような C_a は存在しても高々1 つであると仮定してよい。

命題 16 を e に適用して、$h^*D = D \times_X Y$ が Y 上正規交叉因子になるような e 次元の k 上なめらかな代数多様体 Y からの正しく $SS'(j_!\mathcal{F})$-横断的な正則閉埋め込み $h\colon Y \to X$ をとる。各 $i \in I$ に対して h^*D_i が X 上のなめらかな因子であるということから、h は正しく $SS'(j_!\mathcal{F}) \cup \bigcup_{i \in I'} T_{D_i}^* X$-横断的でもある ([Sa1, Lemma 3.4.5])。命題 13 より、h は正しく $SS(j_!\mathcal{F})$-横断的でもあるので、$\mathrm{pr}_1\colon T^*X \times_X Y \to T^*X$ を第一射影とするとき、正則埋め込み pr_1 による引き戻し $p^!CC(j_!\mathcal{F}), p^!CC'(j_!\mathcal{F})$ はどちらも $T^*X \times_X Y$ 上の e 次元の代数的サイクルとして定義できる。さらに、Y 上のベクトル束の間の射 $dh\colon T^*X \times_X Y \to T^*Y$ の $\mathrm{pr}_1^*SS'(j_!\mathcal{F}), \mathrm{pr}_1^*SS(j_!\mathcal{F})$ への制限は有限射になる ([Sa1, Lemma 3.1])。このとき、$j'\colon h^*U = U \times_X Y \to Y$ で自然な開埋め込みを表し、$h^! = (-1)^{d-2} dh_* \circ p^!$ とおくと、等号

$$h^!CC(j_!\mathcal{F}) = CC(j'_!h^*\mathcal{F}), \quad h^!CC'(j_!\mathcal{F}) = CC'(j'_!h^*\mathcal{F})$$

が成り立つ ([Sa1, Theorem 7.6], [Y3, Proposition 4.10 (2)])。

正しく $SS(j_!\mathcal{F})$-横断的かつ正しく $SS'(j_!\mathcal{F})$-横断的であるような $h\colon Y \to X$ による $h^!CC(j_!\mathcal{F})$ および $h^!CC'(j_!\mathcal{F})$ の構成から、$SS'(j_!\mathcal{F})$ の既約成分 C_a のうちで X の閉部分集合 $C_a \cap T_X^*X$ の X での余次元が e であるような高々1 つの C_a の $CC(j_!\mathcal{F})$ および $CC'(j_!\mathcal{F})$ における重複度は、$dh(h^*C_a) = dh(C_a \times_X Y)$ の $h^!CC(j_!\mathcal{F})$ および $h^!CC'(j_!\mathcal{F})$ における重複度にそれぞれ等しくなることがわかる。よって、等号

$$CC(j'_!h^*\mathcal{F}) = CC'(j'_!h^*\mathcal{F})$$

が示せれば C_a の $CC(j_!\mathcal{F})$ および $CC'(j_!\mathcal{F})$ における重複度は等しくなる。定理 14 では $e = 2$ の場合の C_a について考えればよかったので、$d > 2$ である場合には $e = 2$

にこれらを適用することにより、X の次元 d は 2 であるとしてよい。$d = 2$ である場合には、曲面の場合の特性サイクルの計算 [Y2, Theorem 6.1] と $CC'(j_!\mathcal{F})$ の計算を比較することによって定理 14 を示すことができ、これで定理 14 の証明が完了する。

References

[AS1] A. Abbes and T. Saito, *Ramification of local fields with imperfect residue fields*, Am. J. Math. **124** (5) (2002), 879–920.

[AS2] A. Abbes and T. Saito, *Analyse micro-locale ℓ-adique en caractéristique $p > 0$: le cas d'un trait*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **45** (2009), no. 1, 25–74.

[Be] A. Beilinson, *Constructible sheaves are holonomic*, Selecta Math. (N.S.) 22 (2016), no. 4, 1797–1819.

[Br] J. L. Brylinski, *Théorie du corps de classes de Kato et revêtements abéliens de surfaces*, Ann. Inst. Fourier **33** (1983), no. 3, 23–38.

[KS] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Springer-Verlag, Grundlehren der Math. Wissenschaften, vol. 292. Springer, Berlin (1990).

[K1] K. Kato, *Swan conductors for characters of degree one in the imperfect residue field case*, Algebraic K-theory and algebraic number theory, Contemp. Math. **83** (1989), 101–131.

[K2] K. Kato, *Class field theory, $\mathcal{D}$-modules, and ramification on higher dimensional schemes, part I*, Am. J. of Math. Vol. **116**, No. 4 (1994), 757–784.

[M] S. Matsuda, *On the Swan conductor in positive characteristic*, Am. J. of Math. Vol. **119**, No. 4 (1997), 705–739.

[Sa1] T. Saito, *The characteristic cycle and the singular support of a constructible sheaf*, Invent. Math. 207 (2017), no. 2, 597–695.

[Sa2] T. Saito, *Graded quotients of ramification groups of local fields with imperfect residue fields*, Amer. J. Math. 145(2023), no. 5, 1389–1464.

[Se] J.-P. Serre, *Local fields*, Graduate Texts in Mathematics 67, Springer, 1979.

[Y1] Y. Yatagawa, *Equality of Two Non-Logarithmic Ramification Filtrations of Abelianized Galois Group in Positive Characteristic*, Doc. Math. 22 (2017), 917–952.

[Y2] Y. Yatagawa, *Characteristic cycle of a rank 1 sheaf and ramification theory*, J. of Alg. Geom., 29 (2020), 471–545.

[Y3] Y. Yatagawa, *Singular support and characteristic cycle of a rank one sheaf in codimension 2*, arXiv:2206.02989

Department of Mathematics
School of Science
Institute of Science Tokyo
Tokyo 152-8550
JAPAN
Email address: yatagawa.y.2d01@m.isct.ac.jp