オープンエンドな学びの実践
ー動的幾何ソフトウエア（GeoGebra）を利用した正 n 角形の作図ー

Research on open-ended learning practices
Drawing a regular n-gon using dynamic geometry software (GeoGebra)

愛知県立津島高等学校　山田 潤
Jun Yamada, Tsushima Senior High School

1　はじめに

GIGA スクール構想により，数学の授業についても学習者一人一人がもつタブレット端末を活用した学習が可能となった．動的幾何ソフトウエア（GeoGebra）のもつ作図機能を利用すると，高校数学で利用する平面図形も作図できるが，必ずしも従来の定規とコンパスによる作図とは同じではない．正三角形，正方形，正五角形，正六角形は，定規とコンパスだけで作図できるが，正七角形や正九角形は定規とコンパスだけでは作図できない．動的幾何ソフトウエア（GeoGebra）のもつ作図機能を利用すると，これらの図形も作図できる．

GeoGebra の作図機能を利用したこの正 n 角形の作図教材によって，従来の定規とコンパスによる作図と GeoGebra による作図の違いを示すとともに，GeoGebra のもつ作図機能を利用した正 n 角形の色々な作図の仕方と高校数学での効果的な利用について研究した．

2　確認事項

2.1　動的幾何ソフトウエア

動的幾何学ソフト（インタラクティブ幾何学ソフト，作図ツール，dynamic geometry software， interactive geometry software(IGS)，その他）とは，コンピュータソフトウェアであって，おもに平面幾何学の作図を行うことができるものをいう．これらの動的幾何学ソフトにおいては，作図は点・直線・円などをマウスクリック・ドラッグによって行い，作図手順が記録される．作図を行った後に，幾何要素（点・直線・円など）を動かして，作図全体を変化させることができるのが主な特徴である．（北本，2022）

2.2　数学 A「図形の性質」

高等学校学習指導要領解説数学編　数学 A「図形の性質」（p88-p89）では，「図形の性質について，数学的活動を通して，その有用性を認識するとともに，次の事項を身に付

けることができるよう指導する.」と指摘している.
ア　次のような知識及び技能を身に付けること.
（ア）三角形に関する基本的な性質について理解すること.
（イ）円に関する基本的な性質について理解すること.
（ウ）空間図形に関する基本的な性質について理解すること.
（中学１年で，角の２等分線，線分の垂直二等分線，垂線などの基本的な作図の方法を学習している.）
イ　次のような思考力，判断力，表現力を身に付けること.
（ア）図形の構成要素間の関係や既に学習した図形の性質に着目し，図形の新たな性質を見いだし，その性質について論理的に考察したり説明したりすること.
（イ）コンピュータなどの情報機器を用いて図形を表すなどして，図形の性質や作図について統合的・発展的に考察すること.

2.3　指導者アンケート

愛知県高等学校数学研究会（名瀬地区）に所属の先生方に，動的幾何ソフトウエアを利用した作図についてのアンケートを実施した.（2023.10 月実施　回答 8）

(1)　数学 A「図形の性質」では，定規とコンパスによる作図指導をおこなっていますか.
1. 十分指導している.　2.　1～2 時間程度指導している.　3. 指導していない.
4.　その他
回答 (1)　1. 0　2. 2　3. 6　4. 0
(2)　あなたは、動的幾何ソフトウエアを利用していますか.
1.　すでに利用している.　2.　利用したいと思っている.　3.　従来の作図でよい.
4.　わからない.
回答 (2)　1. 4　2. 3　3. 1　4. 0
(3)　動的幾何ソフトウエアを利用した作図指導で，学習者の作図についての意識（イメージ）が変化すると思いますか.
1.　大いに変化する.　2.　多少変化する 3.　変わらない.
4.　わからない.
回答 (3)　1. 4　2. 4　3. 0　4. 0
(4)　作図の指導において，従来の定規とコンパスによる作図指導と動的幾何ソフトウエアによる作図指導の違いを意識することは必要でしょうか．または，意識する必要はないでしょうか．その理由は何でしょうか.
必要である.
・それぞれのメリットとデメリットを話すべきである.
・ソフトウエアでの作図は楽であるが，図形的な意味を実感しにくいと感じることが多い.
・定規とコンパスでの作図は，扱い方を義務教育ですでに習得しているので，思考

のすべてを図形に注ぐことができる．

・ソフトウエアでの作図は，実際に作図する前に，書く目標を立てて成立させる思考が必要となるので，「ながら学習」が難しい．

・ソフトウエアは作図した後に点を動かすことができるので，この作図法で外接円などが動きます．これで，この作図法が「あらゆる」外接円が作図できたと認識できます．しかし，垂直二等分線が必要なのか，角の二等分線が必要なのかと，どの作図法が必要かを考えさせるには，別の指導が必要です．

必要なし．

ご意見なし

(5)　お気づきの点があればご記入をお願いいたします．

・九点円の説明など，複雑な作図だと，動的ソフトウエアが強いと思います．

このアンケートから，数学 A「図形の性質」では，定規とコンパスを利用した平面図形の指導から動的幾何ソフトウエアを利用した指導にシフトしていることが読み取れた．定規とコンパスによる作図と動的幾何ソフトウエアを利用した作図の違いに注意しながら，学習目標・指導内容に適した指導を行っている様子が確認できた．

3　授業の実践

定規とコンパスを使って，正方形と正三角形を作図する授業（３年生文系対象，2023 年 11 月）を実施した．

課題

(1)　定規とコンパスを使って「外円の内側で，互いに外接する４円の中心を結ぶ図形が正方形になるときの４円をできるだけ正確に作図」しなさい．

(2)　定規とコンパスを使って「外円の内側で、互いに外接する３円の中心を結ぶ図形が正三角形になるときの３円をできるだけ正確に作図」しなさい．

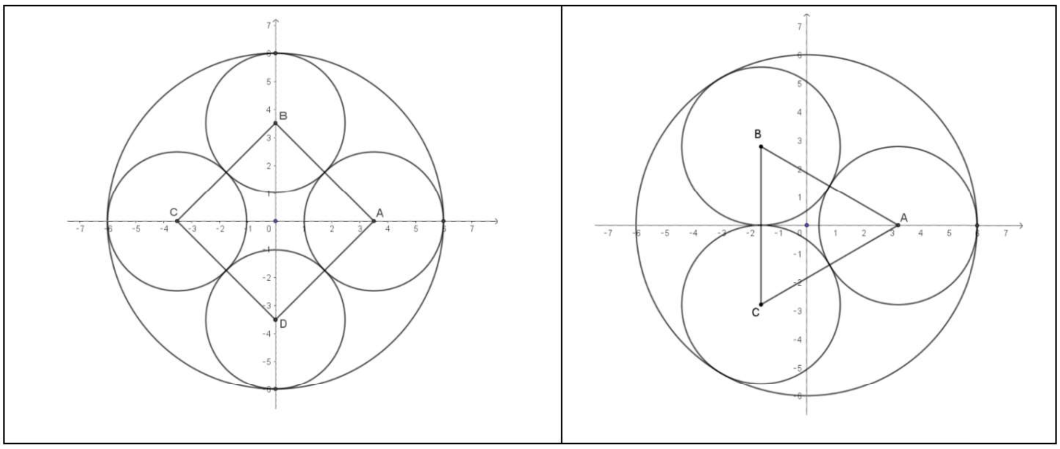

図 1: 左側 正方形の作図例　　　右側 正三角形の作図例

解答例

（1） 正方形の作図

外円の半径Rと正方形を描く4つの円の半径aの間に成り立つ関係式は，$(1+\sqrt{2})a=R$だから，$a=(\sqrt{2}-1)R$となる．内部の 4 円の中心によってできる正方形の頂点までの距離（外円の中心からの距離r）は，$r=R-a=R-(\sqrt{2}-1)R=(2-\sqrt{2})R=(2-\sqrt{2})\cdot 6=3.514719\ldots$ となる．

よって，$\sqrt{2}$を求めることができれば，定規とコンパスの機能だけで作図できる．

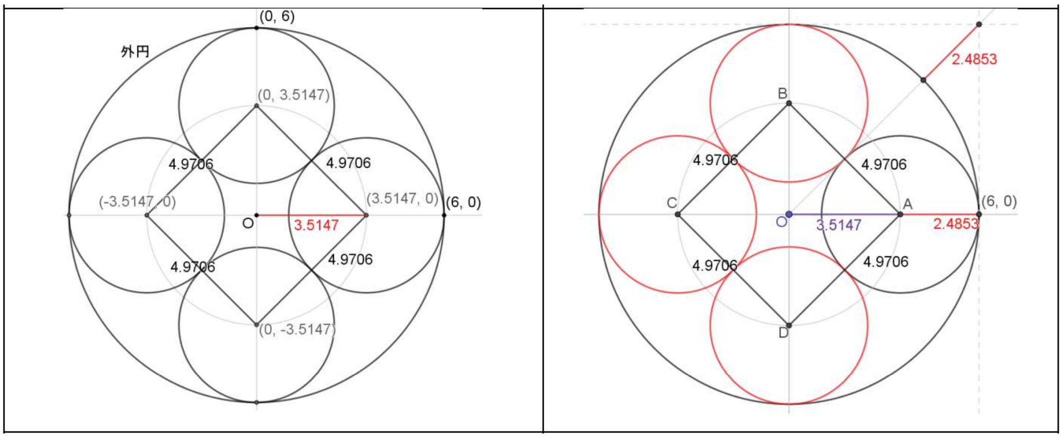

図 2: 左側 中心座標の利用　　　　右側 $\sqrt{2}$の利用

（2） 正三角形の作図

外円の半径Rと正三角形を描く3つの円の半径aの間に成り立つ関係式は$r:a=2:\sqrt{3}$より，$r=\dfrac{2}{\sqrt{3}}a$である．$R=r+a=(1+\dfrac{1}{\sqrt{3}})\cdot a$より，$a=(2\sqrt{3}-3)R$となる．内部の3円の中心によってできる正三角形の頂点までの距離（外円の中心からの距離r）は，$r=R-a=R-(2\sqrt{3}-3)R=2(2-\sqrt{3})R=2(2-\sqrt{3})\cdot 6=3.2153904\ldots$ となる．

よって，$\sqrt{3}$を求めることができれば，定規とコンパスの機能だけで作図できる．

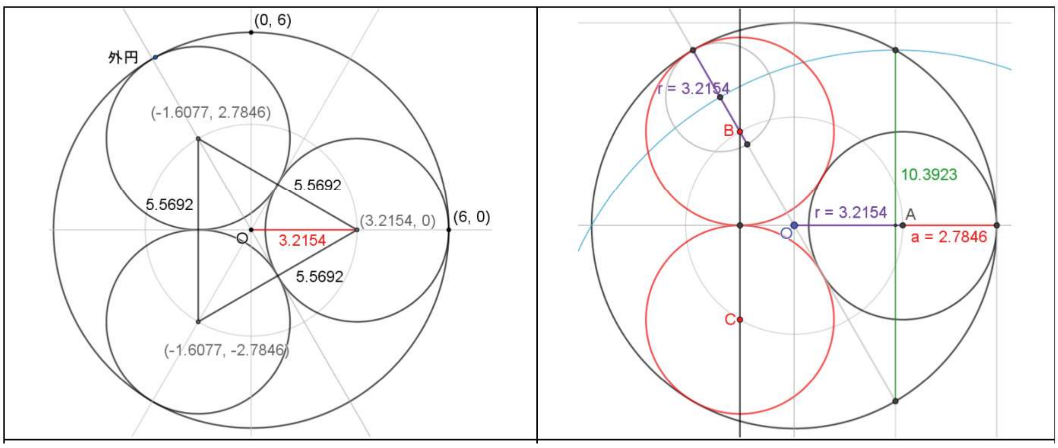

図 3: 左側 中心座標の利用　　　　右側 $\sqrt{3}$の利用

3.1　学習者アンケート

以下は，授業アンケート（生徒用）の結果である．(回答数 38)

(1) 動的幾何ソフトウエアを利用して作図をしていますか.

1．すでにうまく使っている．　2．使いたいと思っている．3．従来の作図でよい．

4．わからない．

回答 (1)　1．0　2．5　3．10　4．23

(2) この授業を受けて作図に対する意識（イメージ）が変化しましたか.

1. 大いに変化した. 2. 多少変化した.　3. 変わらない.　4.　わからない.

回答 (2)　1．2　2．8　3．19　4．9

(3) 動的幾何ソフトウエアを利用する作図に興味がもてましたか.

1. おおいに興味がもてた.　2.　多少興味がもてた.　3.　変わらない.

4.　わからない.

回答 (3)　1．3　2．11　3．21　4．3

3.2　授業の振り返り

1. 定規とコンパスによる作図と動的幾何ソフトウエアによる作図を比べて，あなたはどのように感じましたか.

・動的幾何ソフトウエアは入力すると図形がでてくるが，定規とコンパスでの作図では長さを測ったり，中心をあわせたりしなければならず大変.

・動的幾何ソフトウエアの方が，図形の想像がしやすい.

・動的幾何ソフトウエアの方が，早くて楽である.

・動的幾何ソフトウエアの方が，便利である.

・定規とコンパスの方が，やりがいを感じる.

・手で作図する面倒くささがよくわかった.

・どちらも難しい.

2. 動的幾何ソフトウエア（GeoGebra）を利用して従来（と同様）の作図したいと思いましたか.

・思う.　9

3. 動的幾何ソフトウエア（GeoGebra）の作図機能を利用して作図したいと思いますか.

・思う.　13

4. この授業で、気がついた点があれば書いてください.

・定規とコンパスは素晴らしい.

この授業の実践から，数学 A「図形の性質」の作図の指導においてもオープンエンド的な学習教材を用いた指導が「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けた授業改善に有効ではないかと考えた.

ここでは，算数・数学科のオープンエンドアプローチ（島田，1997）を参考として，従来の定規とコンパスによる作図と GeoGebra による作図の違いを示すとともに，GeoGebra のもつ作図機能を利用した平面図形の作図と高校数学での利用について研究した.

4　オープンエンドな学びとは

島田（1997）は，オープンエンドな問題について，「ふつうの算数・数学の授業で取り上げられる問題には，一般に一つの共通な点がある．それは，それぞれの問題について，正しい答えがただ一通りに決まっているということである．問題に対する解答は，正答か誤答（不完全解答も含めて）のいずれかであり，正答は一つしかない．われわれは，このような型の問題を完結した問題，クローズドな問題と名づけ，これに対して，正答がいく通りにも可能になるように条件づけた問題を未完結な問題，結果がオープンな問題，オープンエンドの問題と呼ぶことにする．」

また，オープンエンドアプローチの授業を，「結果が一意に定まらないような問題場面を題材として，そこに内在する正答（結果）の多様性を積極的に利用することで授業を展開し，その過程で，既習の知識・技能や数学的な考え方をいろいろ組み合わせて新しいことを発見していく経験を児童・生徒に与えようとする学習活動のことである．」と定義している．

「提示する問題場面には，ただ単に児童・生徒のものを見る目を養うとか，多面的なものの見方ができるとか，個人差，能力差に応じて考え方ができるとかいう一般的なねらいの外に，算数・数学科の授業であるかぎり，そこに数学的思考が多数内在していて，しかもそれらが低次なものから高次なものを含み，数学的な価値とその後の発展性を含んでいることが必要で，そのような問題が，算数・数学科の「よい」オープンエンドの問題であるといえる．」と指摘している．（島田．2022，p42）

4.1　オープンエンドの問題の類型（カテゴリー）

オープンエンドアプローチでは，当初、類型（カテゴリー）は以下の３つの類型に分類されていた．

１．関係や法則を発見する（How to find）の問題群
２．分類（How to classify）の問題群
３．数量化（How to measure）の問題群

新しいカテゴリーとして，４．作図や構成（How to construct）の問題群が検討されている．この「正 n 角形の作図」の問題では，オープンエンドな問題を用いたオープンエンドアプローチの授業を目指すが，ここでは「オープンエンドな学び」と呼ぶこととした．

4.2　課題とその説明

(1) 課題：

動的幾何ソフトウエア（GeoGebra）を利用して，正 n 角形 (n=3,4,5,6,7,8) を作図してみよう．

(2) 本課題について：

・数学 A「図形性質」で学んだ内容，高等学校学習指導要領解説数学編（p88-p89）の

「図形の性質について，数学的活動を通して，その有用性を認識するとともに，次の事項（アとイ）を身に付けることができるよう指導する.」
・正 n 角形（n=3,4,5,6,7,8）を，「1. 定規とコンパスだけで作図」，「2.GeoGebra の作図機能を利用して作図」する活動を通して，1. と 2. の違いと，作図活動への利用方法を確認する.
・動的幾何ソフトウエア（GeoGebra）の作図機能を利用することによって，色々な作図が可能となること．また，平面図形の作図の楽しさを学ぶ.
・生徒の作図を，個人またはグループ活動のなかで相互に比較する機会を設ける．この作図活動を通して，新たな作図の仕方を発見していく経験を児童・生徒に与える.

4.3　授業の展開例

(1) 授業の実際：
　課題プリント，定規とコンパス，タブレット端末，振り返りシート，授業アンケートを用意する.
　写真・ビデオ撮影等を利用して，生徒の授業での活動の様子を確認できるようにする.
　個人活動，グループ活動，発表時間を確保する.
(2) 指導後の考察：
　振り返りシート，授業アンケートを参考にして，授業を振り返るとともに，授業評価をおこなう.
(3）課題例：
【課題】
　動的幾何ソフトウエア（GeoGebra）を利用して，「正 n 角形 (n=3,4,5,6,7,8) を作図してみよう.」
　1．定規とコンパスの機能を利用して作図できますか？
　2．動的幾何ソフトウエアのもつ作図機能を利用して作図できますか？
　3．色々な作図の仕方を考えてください.
(4) 授業展開例
　この授業では, 座標平面上に原点を中心, 半径 6 の円を描いた課題プリントと GeoGebra のデータ）を配布して，授業をおこなうものとする.
　「1 . 定規と—コンパスの機能を利用して作図できますか？ では，学習者の多くが，以下の順に作図すると予想する.
　1 番目：正方形の作図　（原点中心とする円と座標軸との交点を結ぶ.）
　2 番目：正六角形の作図
　3 番目：正三角形の作図（正六角形の頂点を 1 つおきに結ぶ.）
　4 番目：正八角形の作図（正方形の角の二等分線）
　5 番目：正五角形の作図（数学 A の履修内容）
　6 番目：正七角形の作図（定規とコンパスだけでは作図できない）
　学習者はこの活動から，正 n 角形のうち定規とコンパスだけでは作図できないものがあることを知る.

「2. 動的幾何ソフトウエアのもつ作図機能を利用して作図できますか？」では，GeoGebra のもつ作図機能（正多角形の作図等）を利用して作図する方法の他，様々な解法がでてくると予想できる．

「3. 色々な作図の仕方を考えてください．」では，指導者（ファシリテータ）がヒントを与えたり，グループでの活動を支援することも必要である．

4.4 定規とコンパスのみで作図できる条件

n を 3 以上 99 以下とすると，$+$，$-$，$\times$，$\div$，$\sqrt{\ }$ を用いて表せる数は，3，4，5，6，8，10，12，15，16，17，20，24，30，32，34，40，48，51，60 , 64，68，80，85，96 の 24 個である．この中に 7 は含まれないので，正七角形は定規とコンパスだけでは作図できない．正 n 角形が定規とコンパスのみで作図できる条件は，「正 n 角形が作図可能 $\Leftrightarrow$ 円分方程式 $z^n = 1$ の解が，$+$，$-$，$\times$，$\div$，$\sqrt{\ }$ だけを用いて表せる．」，すなわち，有理係数の 2 次方程式を解くことに帰着できることである．

正七角形の場合は，$\alpha = \dfrac{\pi}{7}$ とすると，$\cos 4\alpha = \cos(\pi - 3\alpha) = -\cos 3\alpha$ が成り立つ．これより，$8\cos^4\alpha + 4\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha - 3\cos\alpha + 1 = 0$,
$(\cos\alpha + 1)(8\cos^3\alpha - 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 1) = 0$,

今，$\cos\alpha + 1 \neq 0$ としてよいから，$8\cos^3\alpha - 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 1 = 0$ となる．$\cos\alpha = \dfrac{t}{2}$ とすると，$t^3 - t^2 - 2t + 1 = 0$ を解くことになるが，この 3 次方程式は有理数の解をもとないので，【立方体倍積問題】と同じ議論（$x^3 = 2$ を解くこと）となり，定規とコンパスだけでは作図することはできない．

$F_n = 2^{2^n} + 1$　(n は 0 以上の整数) をフェルマー数という．$2^{2^0} + 1 = 3$, $2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$，$2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$，$2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$，$2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537$ であるから，正 17 角形だけでなく，正 257 角形と正 65537 角形も定規とコンパスだけで作図（この 5 つの数をフェルマー素数という）が確認できる，なお，数学者ガウスは，正 n 角形で定規とコンパスで作図が可能な正 n 角形は、$n = 2^k \times$ (互いに相異なるフェルマー素数の積)　（k は正の整数）に限ることを示している．

正七角形は，GeoGebra のもつ作図機能をどのように利用すると作図できるだろうか．

GeoGebra には正多角形を描く機能を利用できることに気がつく生徒もあると考えるが，これはシュタイナー円環の利用と考えられる．

(1) シュタイナー円環の利用

同心円の間に入る円環の数が（3 つ以上）のとき，外円の半径を R，内円の半径を r , 円環の半径を ρ とすると，反転円の中心 O の周りの角の大きさは 2π だから，$\theta = \dfrac{\pi}{n}$,
$\alpha = \sin\theta = \dfrac{\rho}{R - \rho}$ とすると，$R = r + 2\rho$，$\rho = \dfrac{R\sin\theta}{1 + \sin\theta} = \dfrac{r\sin\theta}{1 - \sin\theta}$ となる．
このとき，$R = r + 2\rho = r + 2\dfrac{r\alpha}{1-\alpha} = \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\,r$ より，$R : r = 1 + \alpha : 1 - \alpha$ となる．

これより，円環 n (n は 3 以上) の個数に応じて円環の半径 ρ は，外円の半径 R と内円の半径 r を用いて，$\rho = \dfrac{R - r}{2}$ と表せる．

なお，GeoGebra は「多角形を描く機能」をもっているので，定規とコンパスだけで作図できるかできないかに関わらず，一辺の長さと角数 n を指定するだけで，正 n 角形を作図できる．

シュタイナーの円環を利用することによって，正三角形から順番に正八角形まで，GeoGebra のもつアニメーション機能を利用して角数 n を変更すると，正 n 角形が作図することも可能である．ここでは以下に，正七角形と正八角形の作図例 [図４] を掲載しておく．

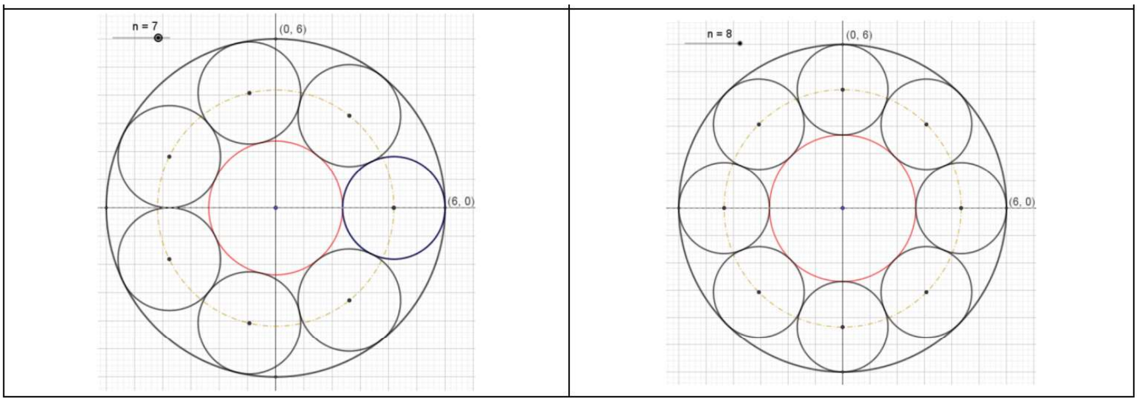

図 4: 左側 正七角形の作図例　　　　右側 正八角形の作図例

(2) 高校数学での学習内容で作図する

GeoGebra の作図機能を利用すると，学習者が数学 A「図形の性質」で学ぶ知識までで，定規とコンパスだけでは作図できない正七角形の作図が可能になる．

たとえば，垂直二等分線（または角の２等分線）を利用すると，正奇数角形，正偶数角形に分けて作図を考えることになるが，正 n 角形を作図できる．ここでは正七角形 (奇数角形) と正八角形（偶数角形）の作図例 [図５] を掲載しておく．

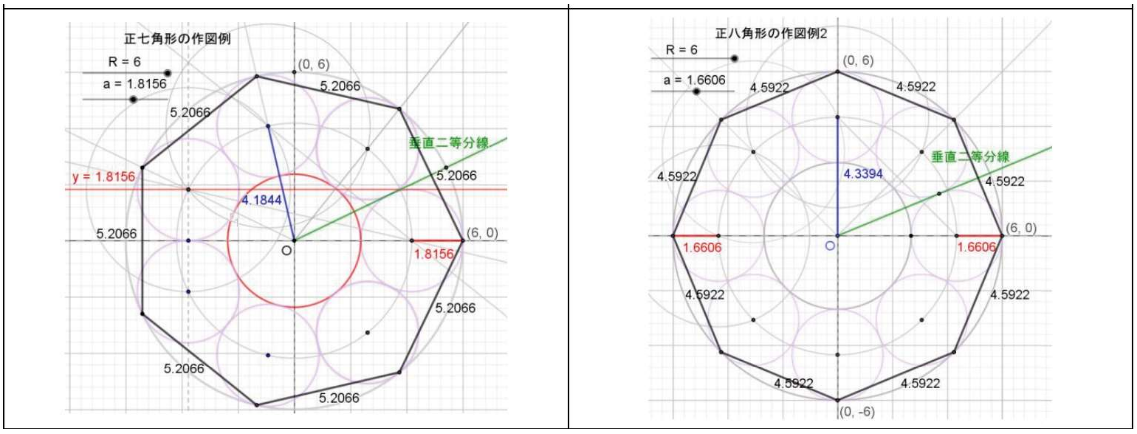

図 5: 左側 正七角形の作図例　　　　右側 正八角形の作図例

5　考察

動的幾何ソフトウエアを利用すると，定規とコンパスだけで作図できるかできないかにかかわらず，平面図形の作図が可能となる．しかし，この「オープンエンドな学び」の教材によって，定規とコンパスによる作図と動的幾何ソフトウエア（GeoGebra）を利用した作図との違いを確認するとともに，GeoGebra の作図機能についての理解を深めることができる．定規とコンパスだけでは作図できない平面図形であることを知り，どのような場合に作図可能か調べようとする学習者がでてくることも考えられる．定規とコンパスだけでは作図できない図形も，GeoGebra のもつ作図機能を利用して作図が可能である．ここでは，正 n 角形をシュタイナーの円環を利用して作図できること，垂直二等分線を利用することによって，高校での履修の範囲で作図する方法を取り上げたが，GeoGebra のもつ作図機能利用することによって，いろいろな方法で平面図形を作図できることを学ぶ機会とできる．また，GeoGebra の作図機能を活用するだけでなく，たとえば,「円環の半径（a）の値を変更するだけで正 n 角形を作図する仕組みを考える.」等，統合的な作図の仕方をみつける学習者もでてくることが予想される．

学習者がこの教材を利用することによって，定規とコンパスによる作図と GeoGebra による作図の違いについての理解を深め，様々な条件（必要）に応じて，有効な作図の仕方を自分の力で選択できるようになる．さらに，個人活動，またはグループ活動で見つけた正 n 角形の作図方法をお互いに説明したり，新たな作図を検討することにより，作図についての知識・理解を深めるとともに，GeoGebra のもつ作図機能を利用した作図についての技術・経験を積むことができると考える．

この教材を用いて授業を実施し，「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けた授業改善に有効な教材とできるか検証をおこなう予定である．

謝辞

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

参考文献

[1] 池田敏和:　オープンエンドの問題と研究，横浜国立大学学術情報リポジトリ，https://ynu.repo.nii.ac.jp/record/92/files/KJ00000044262.pdf.（2024.8.15 参照）

[2] GeoGebra ホームページ: https://help.geogebra.org/hc/ja.（2024.8.4 参照）

[3] 北本卓也: 探究的な活動のための動的幾何ソフトの活用について，数式処理学会，数式処理 28(2)，pp.35-51，2022

[4] 佐々木元太郎: モノグラフ 17. 方程式の理論と解法，科学新興社，1975

[5] 島田茂 編著: 新訂 算数・数学科のオープンエンドアプローチ，授業改善への新しい提案，東洋館出版社，2022

[6] 文部科学省: 高等学校学習指導要領，2018a

[7] 文部科学省: 高等学校学習指導要領解説　数学編理数編，2018b

[8] 文部科学省: GIGA スクール構想のもとでの高等学校数学科の指導について，https://www.mext.go.jp/content/20210610-mxt_kyoiku01-000015480_tk.pdf.（2024.8.4. 参照）.

[9] 文部科学省: 教育の情報化に関する手引（追補版），2020

[10] 山田潤: 円のみに関する平面図形の作成　ー反転 (円に関する鏡像変換) ー，日本数学教育学会，第 104 回大会発表要旨集（島根大会），pp.457，2022

[11] 山田潤: 動的幾何ソフトウエアを利用した平面図形の作成についての一考察，数理解析研究所（RIMS）講究録 2273，共同研究（公開型），数学ソフトウエアとその効果的教育利用に関する研究，pp.170-178，2023

[12] 山田潤: 動的幾何ソフトウエアを利用した平面図形の作図についての一考察　ー関係式 $R=a+b+c$ の利用ー，数学教育学会，2024 年度春季年会予稿集，pp.105-107，2024.

[13] 山田潤: DGS を利用した平面図形の作図についての研究　ー正 n 角形の作図ー，日本数学教育学会，第 106 回大会発表要旨集（大阪大会），pp.473，2024