テクノロジーを用いた実験数学における
証明のストーリーに焦点を当てた活動の検討
ー九点円を題材にしてー

A Study of Activities Focusing on Proof Stories in Experimental Mathematics Using Technology

- Teaching material based on the nine-point circle-

市川学園　市川中学校・市川高等学校　松本　昌也[*1]

Masaya MATSUMOTO, Ichikawa Gakuen Ichikawa Junior & Senior High School

1　研究背景と目的

1.1　中等数学科ならびに幾何教育における現状

中学校・高等学校数学科の目標の１つとして,「数学を活用して事象を論理的に考察する力, 事象の本質や他の事象との関係を認識し統合的・発展的に考察する力, 数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を養う」[4, p.20],[5, pp.8-9] が挙げられている. 特に統合的・発展的に考えることは重視されており [5, p.24], 発展的に考えることとは「数学を既成のものとみなしたり，固定的で確定的なものとみなしたりせず，新たな概念，原理や法則などを創造しようとすること」[5, p.24] と述べられている.

また幾何教育においては「観察や操作実験などの活動を通して図形の性質を見出すことや, 発展的に考察すること」[6, p.66] や「図形のもつ美しさや不思議さを感得させる教材を工夫することで, 図形の学習への意欲を高めることができる. 帰納的, 類推的に得た命題を演繹的に証明し, 定理を導き出すなどの活動が生まれる教材の開発や, ICT を生かした教材の開発」がより求められている.[7, p.189]

以上を踏まえると数学科における幾何教育の 1 つとして ICT 等を用いて図形がもつ性質を実験的に調べることができ, それらを発展的に考えられる探究教材が求められている.

1.2　実験数学

筆者はこれまで実験的・発見的な学習活動として実験数学に着目している. 実験数学とは「数学的対象に対して, 帰納的にデータを集め, 観測することで規則性を推測し, さらにその推測が一般に成り立つのかを (必要に応じてテクノロジーを用いて) さらなる具体例

[*1] masaya.matsumoto@ichigak-net.ed.jp

をもとに検討する活動」[2, p.18] である. これらが数学研究における支持的接触に当たる実験を数学教育の中で強調している点とテクノロジーの利用に言及した定義となっている. 具体的なプロセスとして以下である [2, p.18].

1. 実験によるデータの収集 (データの整理や数学的知識に基づいて観察する)
2. 推測の生成 (数学的な言葉で表現する)
3. 推測の検証実験 (より多くのデータで成り立つかを確認する)
4. 推測の改訂 (得られた反例に着目する)
5. 証明へのアプローチ (証明へどのようにアプローチすればよいか検討する)
6. さらなる問題へ (一般化, 特殊化や類比を用いてどのようになるのか推測を立て検証をする)

これまでフィボナッチ数列・リュカ数列を題材にしたもの [1], 完全数を題材にしたもの [2], ヴァンオーベルの定理を題材にしたもの [3] などを開発しており, この実験数学のプロセスを行うことで, 数学を学ぶ動機付けや実験におけるテクノロジーの有用性を経験的に理解することができる. 一方で, これまで証明も含めた統合的・発展的な活動としての実験数学は行われていない.

1.3　幾何における教材のストーリー化

坂井 [10, p.2] は「問題自身あるいは性質自身を生徒自ら創る, あるいは見出す活動を意図的にできるようになるための指導を付け加えることが必要となる. さらに, 生徒自らが作ったり, 見出した性質を二通りの扱い方をもとに取り扱うことで創造性と論理性の両方を育成する調和のとれた図形指導ができるもと考える」と述べている. ここでの二通りの扱いとは「１つの問題の証明の仕方を多様に考えさせる取り扱い」と「１つの性質に関連する多様な問題に触れさせる取り扱い」である. また坂井はこのような図形教材を作る作業が図形教材のストーリー化と述べている. 教材のストーリー化とは「一つの基本的な性質をもとにして, その性質のもつ条件をより一般の条件に置き換えたり, また, 類似の条件に置き換えたり, 逆をつくるなど, 意図的な考えを用いて新しい性質を見出し, その基本的な性質に関連する一連の性質群を創ること, そして見出した性質に対して演繹な確認の筋道を示し, そこで使用される知識や考え方を示すこと」[10, p.3] である.

実験数学の枠組みにこの教材のストーリー化を取り組むことで, 発見する性質の順番が変わり, 1 つ問題を多様な証明方法を考えることや, 多様な問題に触れることが可能になると考える. 例えば, 1 つの問いで推測 C_1, C_2, C_3 の 3 つを予想できるとする. 生徒 A はま

ず C_1 を生徒 B は C_2 を予想し証明できたとすると, 次にそれぞれが C_3 を推測し証明を考えるときには, 生徒 A は C_1 のみは使ってよく B は C_2 のみ使ってよいことになる. このように発見・証明した順番でそれぞれ使ってよい性質が変わり, 生徒 1 人 1 人のストーリーが作り上げられる.

1.4　研究目的

本稿での目的は九点円を題材にした実験数学の教材の教育的効果に関して考察し, 指導の示唆を得ることとする. そのために九点円の指導に関する先行研究をもとに, 教材を検討し, 見出される推測の証明を行い, どのような教育的価値があるか考察する.

2　九点円の指導に関する検討

2.1　九点円に関して

△ABC の各辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ D, E, F とし, 各頂点 A, B, C から対辺への垂線の足を X, Y, Z とする. また △ABC の垂心 H に対して, AH, BH, CH の中点を L, M, N とする. このとき, 9 点 D, E, F, X, Y, Z, L, M, N は同一円周上にある. この円を九点円という. さらに, △ABC の九点円の中心 O′ は △ABC のオイラー線上にあり, $OO' : O'H = 1 : 1$ が成り立つ (O は △ABC の外心). さらに △ABC の九点円の半径は △ABC の外接円の半径の $\dfrac{1}{2}$ 倍である.

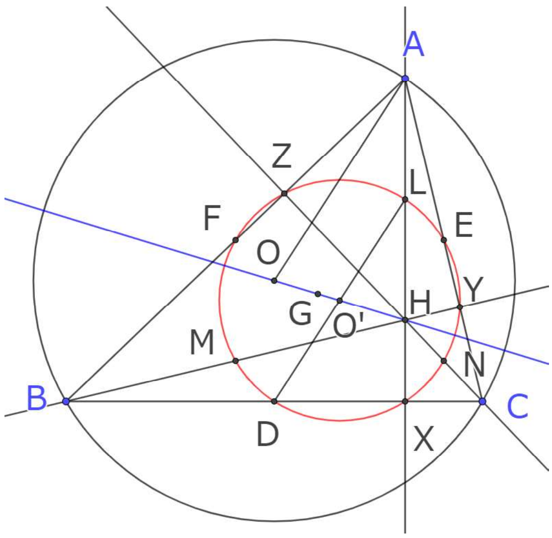

図 1　九点円とオイラー線

このように九点円は多くの性質をもっており, 図形の美しさや不思議さを得ることができるので, 実験数学の題材として有効である. 九点円を題材にした指導に関して例えば吉田 [8], 飯島 [9] がある.

吉田は魅力と面白さだけの紹介だけではなく, 多分に遊び要素がある題材として九点円の授業を取り上げている. この実践では 12 回の授業で実践しており, 九点円を垂足三角形の外接円から始めて, 残りの 6 つの点が同一円周上に存在することを示していく. この授業ではコンパスと定規を用いての活動をしている. また外接円と九点円の半径の関係に関しては正三角形や二等辺三角形などの特殊な形から検討をしている. この実践では問題の

自己増殖が行われており, 発展的に考察する力の育成に有効である活動であると考えられるが, 12 時間をかけて行う実践というのは時間数的に難しい点が課題として挙げられる.

飯島は九点円を考える際の出発点として垂足三角形の図と中点三角形の図を挙げている.

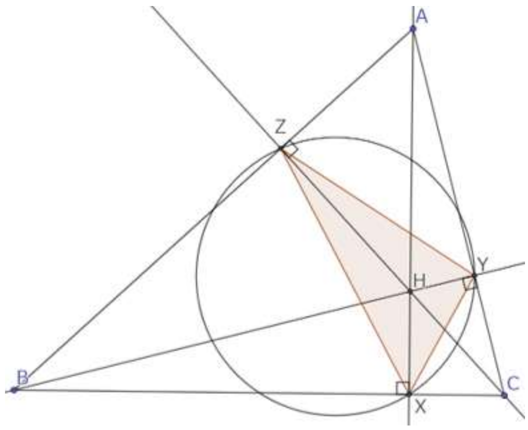

図 2　垂足三角形

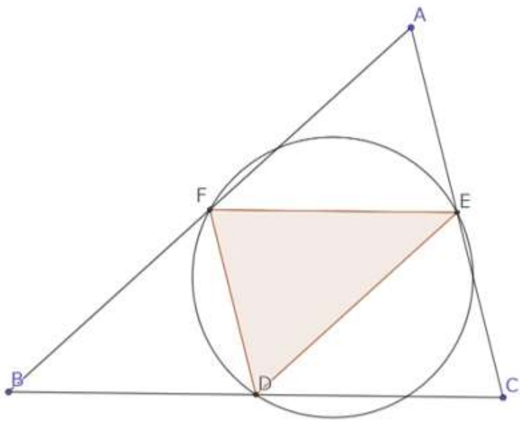

図 3　中点三角形

垂足三角形から始めた場合, 動的幾何ソフトなどで動かしながら考えると三角形の各辺の中点を円が通っていることを見出しやすく, 垂線との交点に関しても見出す生徒はいるのではないかとしており, この図では「9 つの点（垂線の足, 辺の中点, 頂点と垂心の中点）を通るように思われるが, 本当にそうかどうかを今日の問題としたい, というのが, 垂線の図からの出発点になる」[9, p.23] と述べられている.

一方中点三角形から始めた場合, 不変要素が発見しにくい一方で, 元の三角形と中点三角形の重心が一致し, その点が相似の中心になっていることに気づくことで, 九点円と外接円の半径の関係や, 外心と九点円の中心を結ぶことで, 重心を通ることが確認できることを述べている.

2.2　本研究における九点円の出発点

実験数学の多様な性質を見出すという活動を考えると, 9 点が同一円周上にあることの確認ではなく, 円の半径や中心といった性質までを考えることが望ましいと考える. そのため, 中点三角形の外接円として問題を提示し, 他に通る点はどこか, 半径はどのくらいか, 中心はどこかと問いかけることで生徒たちがそれらの性質を見出していく活動が好ましく, それによって生徒のストーリー作られると考える. 垂線の足を通っているのか見出しづらいという指摘に対しては, GeoGebra 上でグリッド線を出すことができるので, そ

れらを用いることで活動の難易度を軽減させることができると考える．また学習内容の前提として，本授業の前に，三角形の五心，１つの三角形とその中点三角形の重心は一致すること，オイラー線までは学習内容として触れておく必要がある．

2.3　前提とするオイラー線に関して

3　教材の内容

3.1　問題に関して

実験数学における教材開発の枠組み [2] を参考に次のように問いを提示する．

問 Q：△ABC の中点三角形 DEF の外接円について調べてみよう．

下位問題

Q_1：円が通る特徴的な点はどこか．

Q_2：円の中心はどこか．

Q_3：円の半径はどのくらいか．

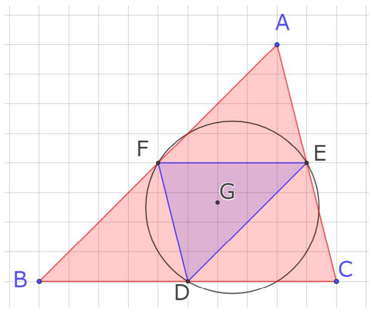

図 4　始まりの図

教材の検討として筆者が実験をして得られた二つのストーリーに関して考えていく．

まず，頂点 A, B, C を動かすことで各頂点から対辺への垂線の足を円が通っていることが一番最初に見出されると考える．

C_1：A から BC への垂線の足 X を通る．

（証明）　四角形 AFDE は平行四辺形より，

$$\angle \mathrm{FDE} = \angle \mathrm{EAF} \cdots ①$$

EF//XD より，

$$\triangle \mathrm{XEF} = \triangle \mathrm{DEF}(\text{等積変形}) \cdots ②$$

②と AX ⊥ EF より，AX と FE の交点を T とすると，

$$\mathrm{AT} = \mathrm{TX} \cdots ③$$

③より EF は AX の垂直二等分線であるから，

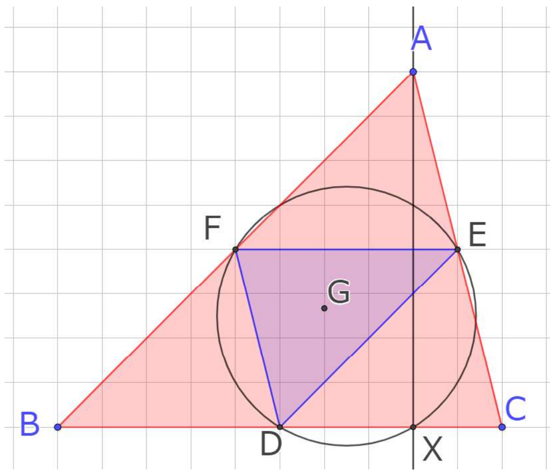

図 5　点 X が通っていること

$$\mathrm{XE} = \mathrm{AE},\ \mathrm{EF} = \mathrm{AF} \cdots ④$$

EF(共通) と④より,

$$\triangle \mathrm{XEF} \equiv \triangle \mathrm{AEF}(\text{三辺相等})$$

よって,

$$\begin{aligned} \angle \mathrm{FXE} &= \angle \mathrm{FAE}(\text{対応する角}) \\ &= \angle \mathrm{FDE}(①\text{より}) \end{aligned}$$

FE に対して D と X は同じ側にあるから, 円周角の定理の逆より 4 点 E, F, D, X は同一円周上.

□

これと同様に, B から CA への垂線の足 Y, C から AB への垂線の足 Z も同一円周上である. この C_1 のあと, 異なったストーリーが展開されていくと考えられる.

3.2 ストーリー1（9 点を見出す前に中心・半径に関して考える）

3.2.1 問 Q_2 について

C_1 を見出した後, 問い Q_2 を検討したとする. GeoGebra 上で円の中心を作図するツールを用いて作図し, 点 A を動かすと, G, O′, H が同一直線上にあることがわかる. これがオイラー線上であることに気づき, △ABC の外接円の中心 O も作図すると図 6 のようになる.

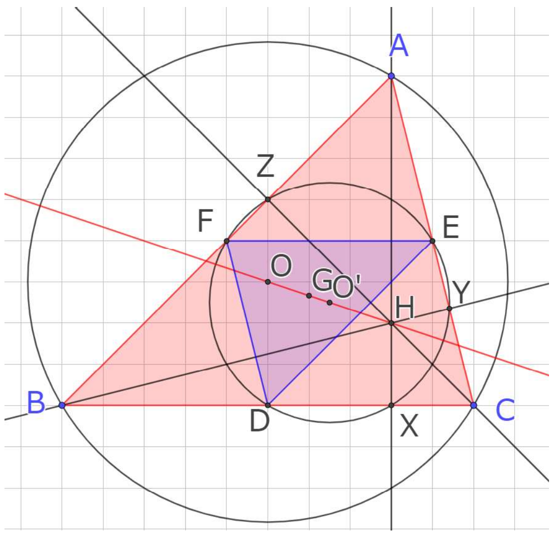

図 6 △DEF の外接円の中心を作図

C_2：点 O′ は △ABC のオイラー線上にある.

(証明) 点 O, G, O′ はそれぞれ △DEF の垂心, 重心, 外心より, 同一直線上に存在する (△DEF のオイラー線). また, O, G, H はそれぞれ △ABC の外心, 重心, 垂心より, 同一直線上に存在する (△ABC のオイラー線). よって, O′ は △ABC のオイラー線上に存在する. ここで, オイラー線の性質より OG : GH = 1 : 2, O′G : GO = 1 : 2 より, OO′ : O′H = 1 : 1 であるから, △DEF の外接円の中心は △ABC の外心と垂心の中点である.

□

3.2.2　問 Q_3 について

問 Q_3 について考える．$\triangle$ABC を動かせば $\triangle$DEF も変化するのでその外接円の半径も変わる．そこで，問 Q_2 で $\triangle$ABC と $\triangle$DEF を比較したので，それぞれの外接円の半径を R，R' とし比較すると，次が成り立つことが推測できる．

<u>C_3: $R:R'=2:1$</u>

(証明) $\triangle$AGO と $\triangle$DGO$'$ において，

$$\text{AG}:\text{GD}=2:1\ (\text{G:重心より})\cdots①$$

$$\text{OG}:\text{GO}'=2:1(\text{オイラー線の性質より})\cdots②$$

$$\angle\text{AGO}=\angle\text{DGO}'(\text{対頂角より})\cdots③$$

①, ②, ③より二辺比夾角相当等から

$$\triangle\text{AGO}\backsim\triangle\text{DGO}'$$

したがって，

$$R:R'=\text{AO}:\text{DO}'$$
$$=2:1(\text{相似な三角形の対応する辺の比})$$

□

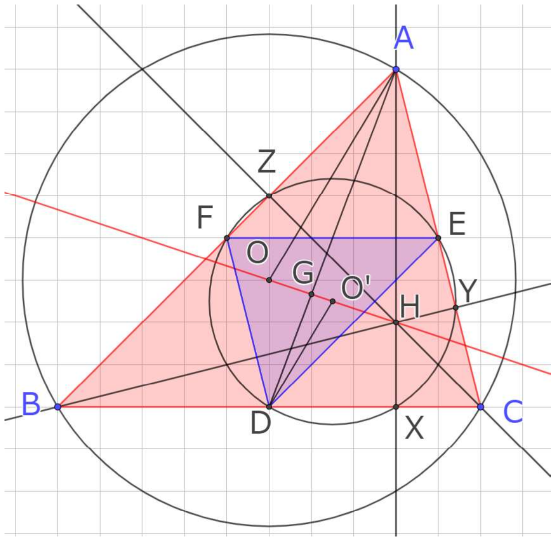

図 7　$R:R'=2:1$

3.2.3　問 Q_1 について

問 Q_2，Q_3 に対する解答を出した上で問 Q_1 について考えてみる．図を観察すると，DO$'$ と AH の交点 L は円上にあり，L は AH の中点であると推測できる．

<u>C_4:L は AH の中点であること</u>

(証明) $\angle$DXL $=90^\circ$ より，DL は円の直径である．$\triangle$AGO $\backsim$ $\triangle$DGO$'$ より，$\angle$OAG $=$ $\angle$O$'$DG であるから，

$$\text{AO}/\!/\text{DL}$$

これと HO$'$: O$'$H $=1:1$ より

$$\text{HL}:\text{LA}=1:1$$

したがって，AH と円の交点 L は AH の中点である．

□

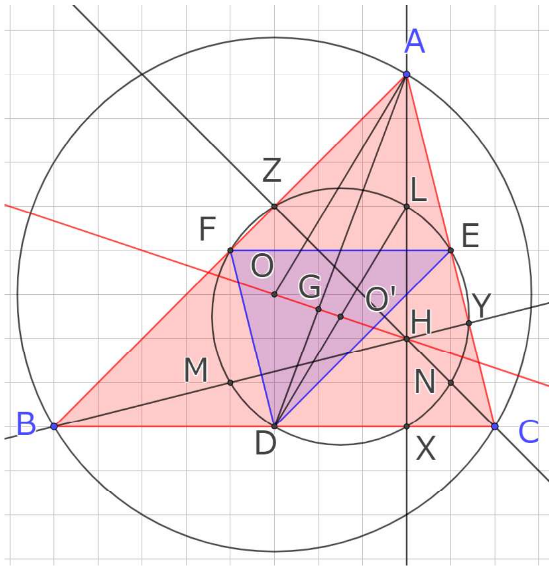

図 8　L は AH の中点

3.3　ストーリー２（9 点を先に見出してから中心・半径に関して考える）

3.3.1　問 Q_1 について

△ABC の各頂点から対辺への垂線の足 X, Y, Z が △DEF の外接円上にあることが分かったあと, 他に通る点がないかを考える. △ABC を動かすと, AH の中点 L が円周上にあるのではないかと推測できる.

C_2': AH の中点 L が円周上であること

(証明) △AHC と △CAB において, それぞれ中点連結定理を用いると

$$LE//HC\cdots ①,\ DE//BA\cdots ②$$

H は △ABC の垂心より, $CH \perp AB\cdots ③$

①, ②, ③より, $LE \perp DE$.

$\angle DXE = \angle DEL = 90^\circ$ であり, LD に対して, D と E は同じ側にあるから円周角の定理の逆より 4 点 D, X, E, L は共円.

□

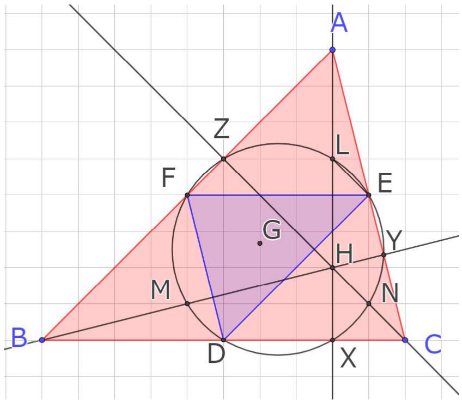

図 9　AH の中点 L が円周上

3.3.2　問 Q_2, Q_3 について

9 点が同一円周上にあると分かった上で, 円の中心や半径について調べてみるることでストーリー 1 と同様な性質に気づくことができる. しかし, 9 点が同一円周上にあるということが分かるため異なる証明方法を考えることができる.

C_3'：点 O′ は △ABC のオイラー線上にある.

(証明) O と H の中点を K とする. △HAO において中点連結定理より,

$$LK = \frac{1}{2}AO$$

同様に

$$MK = \frac{1}{2}BO,\ NK = \frac{1}{2}CO$$

O は △ABC の外心より,$AO = BO = CO$

よって, $LK = MK = NK$ したがって, K は △LMN の外心となり, K は O′ である.

□

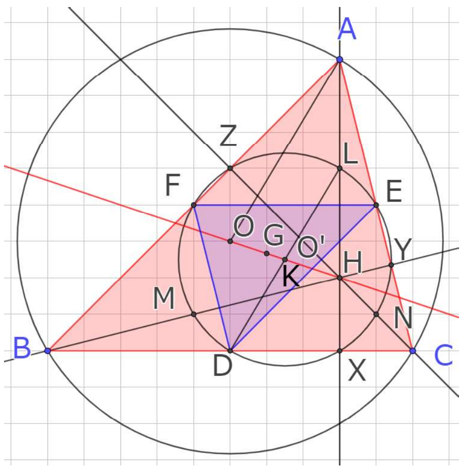

図 10　点 O′ は △ABC のオイラー線上にある.

（別の証明）AO と △ABC の外接円の交点を A′ とする．このとき, 四角形 BA′CH は平行四辺形より HA′ は D を通る．△AA′H において中点連結定理より

$$\mathrm{OL} // \mathrm{A'H}$$

すなわち

$$\mathrm{OL} // \mathrm{DH}$$

また,

$$\mathrm{OD} // \mathrm{LH}$$

より四角形 ODHL は平行四辺形であり, LD は九点円の直径であるから, O′ はオイラー線上．

□

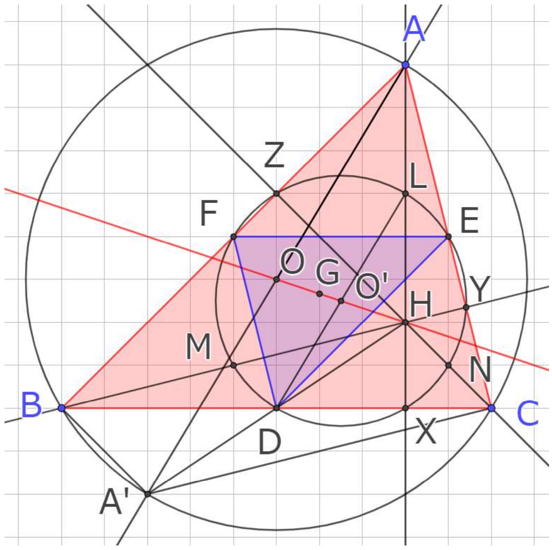

図 11　別証明の図.

4　考察

九点円を中点三角形の外接円として導入し, 三角形とその中点三角形の重心が一致しそれが二つの三角形の相似の中心であることとオイラー線を前提に 2 つのストーリーを検討した．異なった順番で推測を考えていくことで全く異なった証明方法を考えることができた．また例えば C_4 と C_2' は逆問題であるように, 生徒・班同士のストーリーを比較することで, 仮定する条件を変更した問題や逆問題など多様な問いを生徒に考えさせることが可能な題材である．. これらを踏まえると実験数学で育成したい創造性の力に加え, 論理性も育成することが可能であると考えられる．GeoGebra を用いて各個人や班ごとで議論することで, 違ったアプローチを短時間で引き出すことが可能である．一方で生徒の活動において教員がどう介入するかを検討する必要がある．今回は性質を知っているからこそ見出して証明しているが, 生徒がその性質を見出すとは限らない．また誤った性質を見出したり, 証明が難しいこともある可能性がある．実践を行った上で検討する必要がある．

5　まとめと今後の課題

本研究の目的は九点円を題材にした実験数学の教材の教育的効果に関して考察し, 指導の示唆を得ることであった．実際に活動を想定し, 証明を行うことで GeoGebra を用いて, オイラー線と相似の中心を扱った上で中点三角形から議論を進めることは, 多様なストーリーが生まれ, それらを比較することにより, 実験数学で育成したい創造性と論理性の育成

に有効であることが示唆された. 一方活動中の教員がどう介入するかが課題となった. 今後実践を通して多様なストーリーが得られるか, 教員はどう介入するか検討していく.

謝辞

本研究は科学研究費補助金 24H02412 の助成ならびに国際共同利用・共同研究拠点京都大学数理解析研究所の支援を受けた.

参考文献

[1] 松本昌也・清水克彦 (2022). テクノロジーを用いた問題作りを行う実験数学教材の開発ーフィボナッチ数列とリュカ数列を題材にしてー. 日本数学教育学会第 55 回秋期退会発表集録,293-296.

[2] 松本昌也・清水克彦 (2023a). Google Colaboratory を用いる実験数学教材の開発ー完全数を題材に実験のプロセスに焦点を当ててー. 日本数学教育学会誌数学教育,105,11,16-26.

[3] 松本昌也・清水克彦 (2023b). ヴァンオーベルの定理を題材にした四角形の性質の探究ー図形の対応表を用いた実験数学教材ー. 日本科学教育学会研究会報告,28,2,295-300.

[4] 文部科学省 (2017). 中学校学習指導要領解説数学編. 実教出版.

[5] 文部科学省 (2018). 高等学校学習指導要領解説数学編理数編. 実教出版.

[6] 国立教育政策所 (2021). 令和 3 年度全国学力・学習状況調査報告書中学校数学. `https://www.nier.go.jp/21chousakekkahoukoku/report/data/21mmath.pdf` (2024 年 10 月 13 日確認)

[7] 佐野雅枝 (2023). 第 105 回全国算数・数学教育研究（青森）大会基調発表中学部会 3 図形. 日本数学教育学会第 104 回大会発表要旨集（島根大会）188-190.

[8] 吉田稔 (1986). 九点円の指導をめぐって. 日本数学教育学会誌数学教育,68,7,2-14.

[9] 飯島康之 (2015). 作図ツールを用いた九点円の指導に向けてー 12/11 の山中実践に向けた教材研究ー. イプシロン,57,17-27.

[10] 坂井裕 (2013). 創造性と論理性を育む図形教材の開発とその指導ー教材のストーリー化. 教育出版.

[11] H.S.M Coxeter.&S.L.Greitzer(1967). Geometry Revisited. Anbeli lax new mathematical library, vol19. MAA PRESS.