# 三角形から得られる球面図形
## ー鋭角三角形の世界と鈍角三角形の世界の間の不思議な関係ー

東海大学・理学部　前田　陽一
Yoichi Maeda, School of Science, Tokai University

## 1　三角形の 6 つの円から得られる球面図形

本稿では、三角形から得られる球面図形について, GeoGebra を用いて解説する．三角形には, 鋭角, 直角, 鈍角三角形の三種類がある．直角三角形を除く任意の三角形に対して特有の球面図形が対応する．初等教育から高等教育まで, 三角形は数学において重要な幾何図形である．本研究が, 三角形の新たな側面を明らかにして, より親しみやすい数学的対象として捉え直すことができることを期待している．
鋭角三角形については, [3] において, 考えるきっかけ (複素平面上の算術, 幾何, 調和平均のなす調和点列) も含めてまとめて述べた．平面上の鋭角三角形 $\triangle ABC$ において,

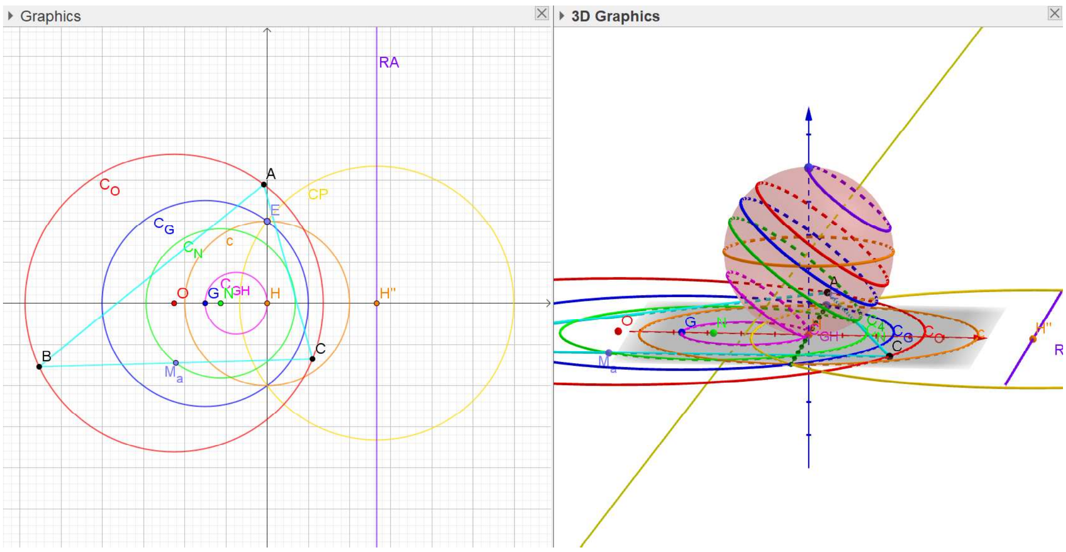


図 1: 鋭角三角形から得られる球面図形.

$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 90^\circ$ となる 3 次元空間内の点 $P$ を考え, 垂心 $H$ と点 $P$ を直径の両端とする球面 $S$ を設定する．平面上にある外接円, 九点円, それらの根軸, 垂重円 (垂心と重心を直径とする円), および, 重心円 (外接円と九点円が互いに鏡映で移り合う, 円に関する鏡映の軸で, 重心を中心とする円) と垂心円 (垂心を中心とし, 重心円との 2 交点が対心点となるような円) を描いておく．これら 6 つの図形を, $P$ を北極とした立体射影で球面 $S$ に引き戻すと, 図 1 のような地軸の傾いた地球のような図形が得られたのであった．今回は, この結果を鈍角三角形に拡張できることを示したい．結果を先に見

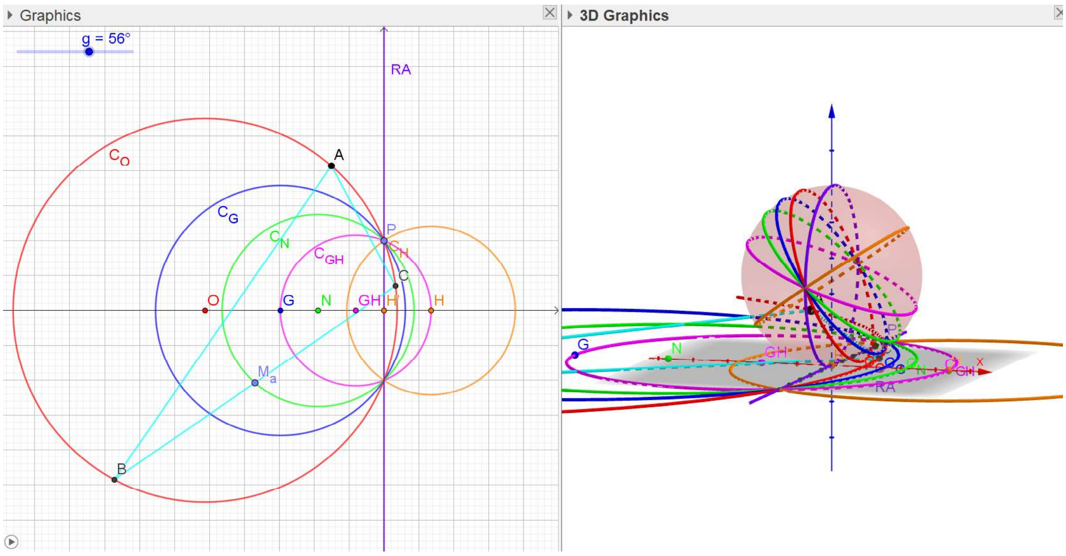


図 2: 鈍角三角形から得られる球面図形.

ておくと, 図 2 のようになる. 2 つの図 1, 2 を見比べてみると, 鋭角三角形の場合は地球の緯線が現れ, 鈍角三角形の場合は地球の経線が現れているように見える. 両者の構成方法は, 若干異なる. この点を含めて, 本稿では作図方法を中心に説明をしていきたい.

# 2　2 つの円の鏡映の軸としての円の作図法

球面図形の作図に先立ち, 2 つの円の鏡映の軸（円）の作図法を紹介する. 重心円は, 外接円と九点円の 2 つの円に関して鏡映の軸となっており, 以下の作図法が役に立つ. 平面上の 2 つの円の配置には, (1) 離れている, (2) 外接する, (3) 交わる, (4) 内接する, (5) 含まれている, の 5 種類がある. このうち, (1), (3), (5) の場合の作図法を先に紹介する. (2) と (4) の場合は, 同じ作図法で得られるのでまとめて紹介する. 鋭角三角形の場合, 外接円と九点円は (5) の含まれている場合に対応し, 鈍角三角形の場合, 外接円と九点円は (3) の交わる場合に対応している.

＜作図法 1＞ 離れた 2 円 $C_1, C_2$ の鏡映の軸の作図 (図 3)

1. 2 つの円 $C_1, C_2$ の中心を通る直線 $\ell_1$ を引く.
2. $\ell_1$ と $C_1, C_2$ との交点 4 点に対して, その 4 点を端点にもち, 互いに交わる半円 $C_3, C_4$ を描く.
3. 2 つの半円 $C_3, C_4$ の交点 $P_1$ を取る. (鏡映の軸の通過点)
4. 2 つの半円 $C_3, C_4$ の接線 $\ell_2$ を引く.
5. 2 直線 $\ell_1, \ell_2$ の交点 $P_2$ を取る. (鏡映の軸の中心)
6. 点 $P_2$ を中心とし, 点 $P_1$ を通る円 $C_5$ を描く. (鏡映の軸)

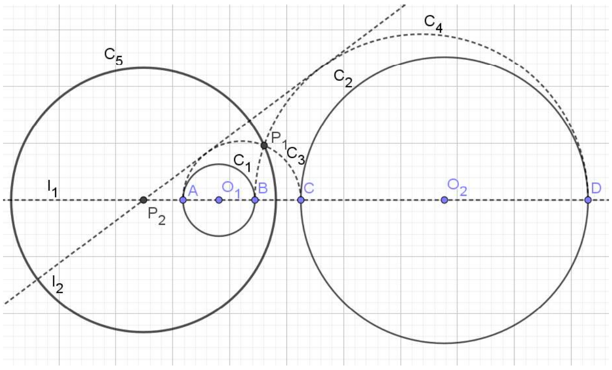


図 3: 離れた 2 円の鏡映の軸の作図

＜作図法 2＞ 交わる 2 円 $C_1, C_2$ の鏡映の軸の作図 (図 4)

1. 2 つの円 $C_1, C_2$ の中心を通る直線 $\ell_1$ を引く.
2. 2 つの円 $C_1, C_2$ との交点の 1 つを $P_1$ とする. (鏡映の軸の通過点)
3. 2 つの円 $C_1, C_2$ の接線 $\ell_2$ を引く. (鏡映の軸の通過点)
4. 2 直線 $\ell_1, \ell_2$ の交点 $P_2$ を取る. (鏡映の軸の中心)
5. 点 $P_2$ を中心とし, 点 $P_1$ を通る円 $C_3$ を描く. (鏡映の軸)
6. 2 点 $P_1, P_2$ を通る直線 $\ell_3$ を引く.
7. 点 $P_1$ を通り, 直線 $\ell_3$ に垂直な直線 $\ell_4$ を引く.
8. 2 直線 $\ell_1, \ell_4$ の交点 $P_3$ を取る. (もう一つの鏡映の軸の中心)
9. 点 $P_3$ を中心とし, 点 $P_1$ を通る円 $C_4$ を描く. (もう一つの鏡映の軸)

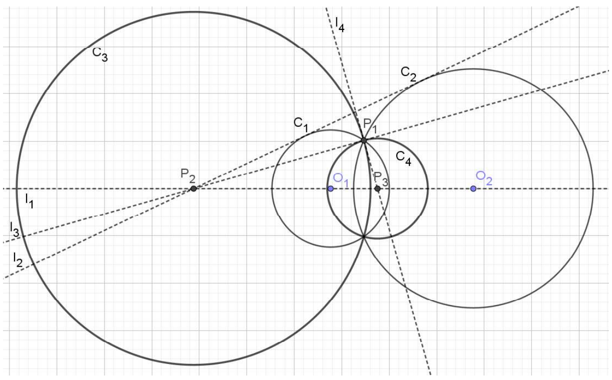


図 4: 交わる 2 円の鏡映の軸の作図

＜作図法 3＞　包含関係にある 2 円 $C_1, C_2$ の鏡映の軸の作図 (図 5)

1. 2 つの円 $C_1, C_2$ の中心を通る直線 $\ell_1$ を引く.
2. $\ell_1$ と $C_1, C_2$ との交点 4 点に対して, その 4 点を端点にもち, 互いに交わる半円 $C_3, C_4$ を描く.
3. 2 つの半円 $C_3, C_4$ の交点 $P_1$ を取る. (鏡映の軸の通過点)
4. 2 つの半円 $C_3, C_4$ の接線 $\ell_2$ を引く.
5. 2 直線 $\ell_1, \ell_2$ の交点 $P_2$ を取る.
6. 2 点 $P_1, P_2$ を通る直線 $\ell_3$ を引く.
7. 点 $P_1$ を通り, 直線 $\ell_3$ に垂直な直線 $\ell_4$ を引く.
8. 2 直線 $\ell_1, \ell_4$ の交点 $P_3$ を取る. (鏡映の軸の中心)
9. 点 $P_3$ を中心とし, 点 $P_1$ を通る円 $C_5$ を描く. (鏡映の軸)

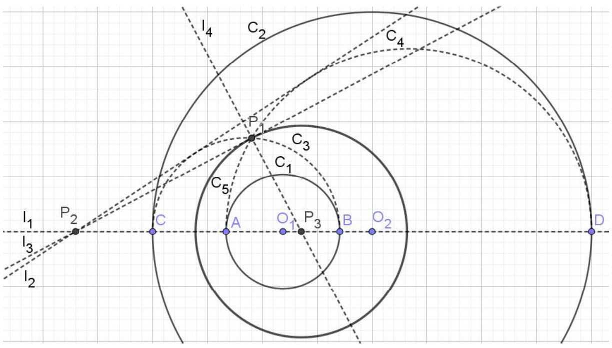


図 5: 包含関係にある 2 円の鏡映の軸の作図

＜作図法 4＞　互いに接する 2 円 $C_1, C_2$ の鏡映の軸の作図 (図 6)

1. 2 つの円 $C_1, C_2$ の接点を $O$ とし, 2 つの円の中心を通る直線 $\ell_0$ を引く.
2. 点 $O$ を中心とする円 $C_3$(半径は任意) を描く.
3. 円 $C_1$ の円 $C_3$ に関する鏡映を $\ell_1$ とし, 円 $C_2$ の円 $C_3$ に関する鏡映を $\ell_2$ とする.
4. $\ell_1$ と $\ell_0$ との交点を $P_1$, $\ell_2$ と $\ell_0$ との交点を $P_2$ とする.
5. 2 点 $P_1, P_2$ の垂直二等分線を $\ell_3$ とする.
6. 直線 $\ell_3$ の円 $C_3$ に関する鏡映を $C_4$ とする. (鏡映の軸)

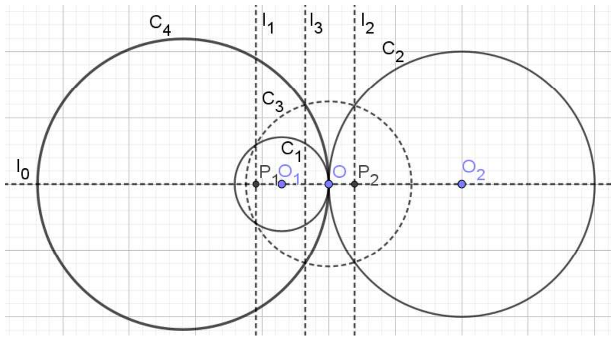


図 6: 接する 2 円の鏡映の軸の作図

# 3　鋭角三角形の球面図形

この節では, 鋭角三角形から得られる球面図形の作図について述べる. 以下では簡単のため, 原点を外心とし, 単位円を外接円とし, 重心 $G$ は $x$ 軸上にあるという設定 $(G=(g,0),\ g\in[0,1/3))$ で作図する.

＜作図法 5＞ 鋭角三角形に対する 6 つの図形の作図 (図 7)

1. 原点 $O$ を中心とする単位円を外接円 $C_O$ とする.
2. 線分 $[0,1]$ 上に重心 $G=(g,0),\ g\in[0,1/3)$ をとる.
3. 垂心 $H=(3g,0)$ をとる. (GeoGebra の入力としては, 「3G」)
4. 垂心 $H$ を中心として, $C_O$ を 1/2 倍した円を九点円 $C_N$ とする.
5. 外接円 $C_O$ と九点円 $C_N$ に対して, 鏡映の軸である円を重心円 $C_G$ とする. (＜作図法 3＞参照)
6. 線分 $GH$ を直径とする円を垂重円 $C_{GH}$ とする.
7. 垂重円 $C_{GH}$ の重心円 $C_G$ に関する鏡映を根軸 $RA$ とする.
8. 垂心 $H$ を通り, $x$ 軸に垂直な直線を $\ell$ とする.
9. 垂心 $H$ を中心とし, 直線 $\ell$ と重心円 $C_G$ との交点 $E$ を通る円を垂心円 $C_H$ とする.

＜作図法 3＞での鏡映の軸の通過点 $P_1$ は, ＜作図法 5＞での作図 9 における交点 $E$ と同一点なので, 作図 8 の直線 $\ell$ の作図は省くことができる.

図 1 における三角形を作図するには, 外接円上の任意の点を $A$ とし, 重心 $G$ を用いて頂点 $A$ の対辺上の中点 $M_a$ を作図する. 次に, 線分 $OM_a$ に対して $M_a$ を通る垂線をとり, この垂線と外接円との交点 $B,C$ をとれば三角形 $\triangle ABC$ が作図できる. 点 $A$ を動かしても, ＜作図法 5＞の 6 つの図形は変わらない. ここでの不変量は, $\cos A\cos B\cos C$ となる. この値が同じ三角形に対しては, 同じ球面図形ができる.

さて, ＜作図法 5＞で作図した図形を球面に移すためには, まず, 線分 $HE$ の長さを直

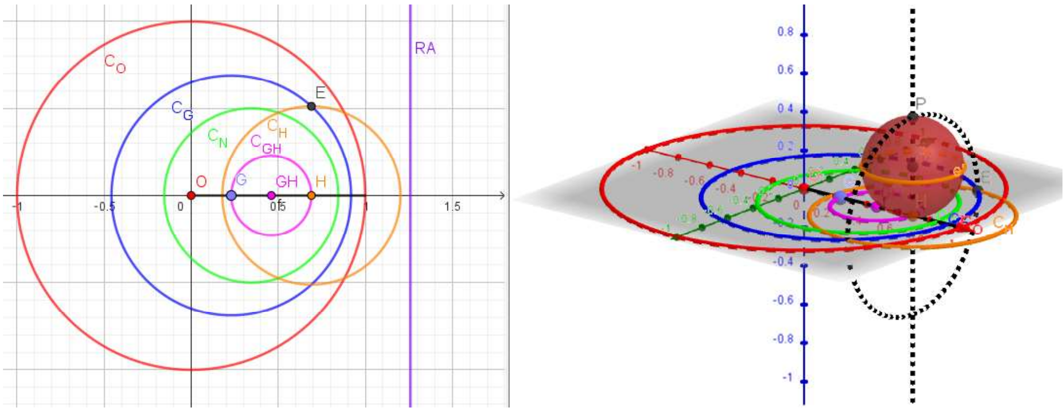


図 7: 鋭角三角形に対する 6 つの図形の作図

径とし, 平面 $ABC$ に垂心 $H$ で接する球面を作図する．その球面の北極 $P$($H$ の対心点) を中心として立体射影の引き戻しをとれば球面図形が出来上がる．図 7 では, 垂心円 $C_H$ のみを引き戻している．
最終的に図 1 を得るには, さらに少し工夫がいる．＜作図法 5 ＞では, 三角形が直角三角形に近づくにつれて投影する球面が小さくなってしまう．それを回避するために, 垂心 $H$ を原点におき, 重心円の通過点 $E$ を $E=(0,1)$ に固定し, 重心 $G$ を $x$ 軸上として, まず重心円 $C_G$ を作図し, それから外接円 $C_O$, 九点円 $C_N$ を逆算して求めている．その際, 点 $H'$ として, 垂心 $H$ の円 $C_G$ に関する鏡映をとっておくことが肝要である．この $H'$ は, 根軸 $RA$ と $x$ 軸との交点でもあり, この $H'$ を中心として, $C_G$ に垂直な円 $C_P$ を描くと, $C_O, C_N$ は, $C_P$ と直交する．$C_O, C_N$ の中心 $O, N$ は, 垂心 $H$ と重心 $G$ から求められる ($3OG=2ON=OH$) ことから, $C_O, C_N$ を描くことができる．このような工夫をしておくと, 立体射影で引き戻す球面が, 北極を $P=(0,0,1)$ とし, 直径が 1 である球面となるので, 重心 $G$ を変化させても球面の大きさが変化することがない．

## 4　鈍角三角形の球面図形

この節では, 鈍角三角形から得られる球面図形の作図について述べる．前節と同様, 単位円を外接円とし, 重心 $G$ は $x$ 軸上にあるという設定 ($G=(g,0),\ g\in(1/3,1)$) でまず作図する．その後, 図 2 を得るために少し工夫をする．

鈍角三角形の場合は, 外接円 $C_O$ と九点円 $C_N$ が交点 (＜作図法 6 ＞の点 $E$) を持つので, 重心円 $C_G$ と垂心円 $C_H$ は点 $E$ を通り互いに垂直に交わる円として作図が簡単にできる．外接円 $C_O$ と九点円 $C_N$ の鏡映の軸は 2 つあり, 重心円 $C_G$ と垂心円 $C_H$ である．さらに, 根軸 $RA$ と垂重円 $C_{GH}$ の鏡映の軸も 2 つあり, 同じく重心円 $C_G$ と垂心円 $C_H$ となっている．実は, この垂心円 $C_H$ は, 鈍角三角形の極円と呼ばれているものであり ([2] P. 280), 3 つの頂点の垂心円 $C_H$ に関する鏡映は, いずれも 3 つの対辺上にある (図 2)．この極円は鋭角三角形には存在しないが, この極円に代わるものとして垂心円がある, と言えるかもしれない．

＜作図法 6 ＞ 鈍角三角形に対する 6 つの図形の作図 (図 7)

1. 原点 $O$ を中心とする単位円を外接円 $C_O$ とする．
2. 線分 $[0,1]$ 上に重心 $G=(g,0)$, $g \in (1/3,1)$ をとる．
3. 垂心 $H=(3g,0)$ をとる．(GeoGebra の入力としては，「3G」)
4. 垂心 $H$ を中心として, $C_O$ を $1/2$ 倍した円を九点円 $C_N$ とする．
5. 外接円 $C_O$ と九点円 $C_N$ の交点の 1 つを $E$ とする．
6. 重心 $G$ を中心とし, 点 $E$ を通る円を重心円 $C_G$ とする．
7. 垂心 $H$ を中心とし, 点 $E$ を通る円を垂心円 $C_H$ とする．
8. 線分 $GH$ を直径とする円を垂重円 $C_{GH}$ とする．
9. 点 $E$ を通り, $x$ 軸に下ろした垂線を根軸 $RA$ とする．(垂線の足を $H'$ とする (後述)．)

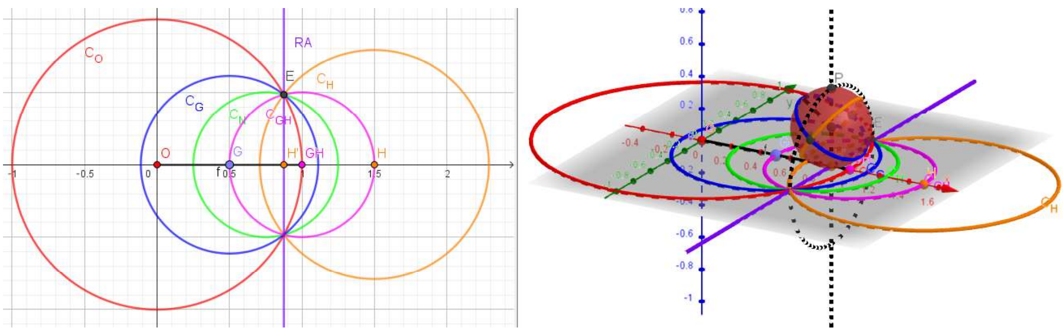


図 8: 鋭角三角形に対する 6 つの図形の作図

さて, ＜作図法 6 ＞で作図した図形を球面に移すためには, まず, 作図 9 で述べた $H'$ が重要な点となる．この点 $H'$ は垂心 $H$ を円 $C_G$ に関する鏡映で移したものでもある．立体射影で引き戻す球面として, 線分 $H'E$ の長さを直径とし, 平面 $ABC$ に点 $H'$ で接する球面を作図する．その球面の北極 $P$($H'$ の対心点) を中心として立体射影の引き戻しをとれば球面図形が出来上がる．図 8 では, 重心円 $C_G$ と垂心円 $C_H$ のみを引き戻している．これらの 2 円は, 球面上で直交する大円となる．6 つの図形が交点を共有する大円になるように球面を設定した, というのが点 $H'$ をとった理由である．

最終的に図 2 を得るには, 鋭角三角形の場合と同様に少し工夫がいる．＜作図法 6 ＞では, 三角形が直角三角形に近づくにつれて投影する球面が小さくなってしまう．それを回避するために, 根軸 $RA$ を $y$ 軸におき, (すなわち, $H'$ を原点におき), 重心円の通過点 $P$ を $P=(0,1)$ に固定し, 重心 $G$ を $x$ 軸上にとる．$\angle GPH = 90^\circ$ となるように垂心 $H$ をとり, それから式 $3OG = 2ON = OH$ を満たす点として, 外心 $O$ と九点円の中心 $N$ を決める．どの円も点 $P$ を通過するので, 5 つの円 $C_O, C_G, C_N, C_{GH}, C_H$ を描ける．このような工夫をしておくと, 立体射影で引き戻す球面が, 北極を $P=(0,0,1)$ とし, 直径が 1 である球面となるので, 重心 $G$ を変化させても球面の大きさが変化することがない．

## 5　直角三角形から得られる局所ユークリッド図形

最後に、直角三角形の場合について考えてみよう．直角三角形の場合, 垂心円 $C_H$ は一点に退化し, 外接円 $C_O$, 重心円 $C_G$, 九点円 $C_N$, 垂重円 $C_{GH}$ は, 垂心 $H$ で接し, その共通接線が根軸 $RA$ となる．これらの図形を球面図形に移すことは諦めて, その代わりに, 図 1, 2 の極限として, 5 つの小円や大円がどのような関係になるかを考えてみる．

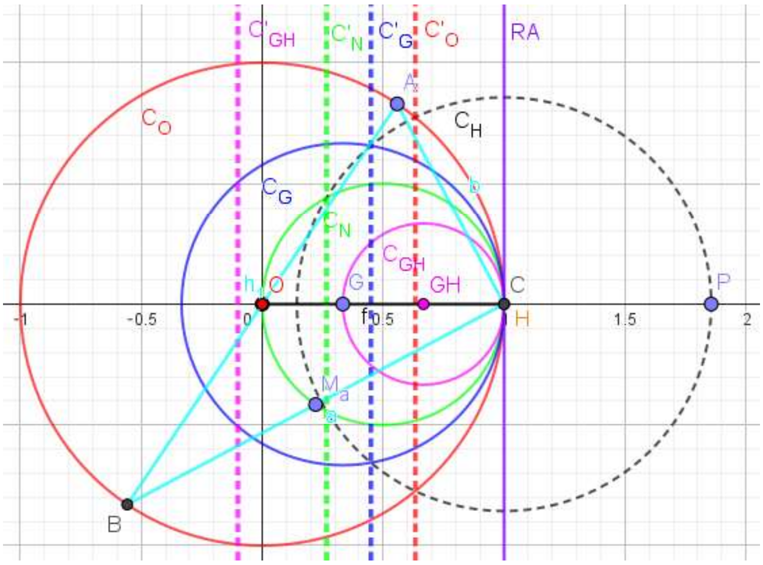


図 9: 直角三角形に対する 5 つの図形とその反転

図 9 は, 直角三角形の外接円 $C_O$, 重心円 $C_G$, 九点円 $C_N$, 垂重円 $C_{GH}$ と根軸 $RA$ を描いたものである．これらの図形を垂心 $H$ を中心とした円 $C_H$(半径は任意) に関して鏡映をとる (＜作図法 4 ＞と同じ手法) と, 5 本の平行線 $RA, C'_O, C'_G, C'_N, C'_{GH}$ が得られる．$C'_G$ を対称軸として, $RA$ と $C'_{GH}$ が対称に, $C'_O$ と $C'_N$ が対称に配置されていることがわかる．また, $C'_G$ から $RA$ までの距離は, $C'_G$ から $C'_O$ までの距離のちょうど 3 倍になっている．図 1, 2 において, 三角形を直角に近づけると, 5 つの図形の関係は, 限りなくこの 1:3 の関係に近づくことがわかる．是非, 付録にあるファイルにアクセスして確かめていただきたい．

## 6　まとめ

平面上の三角形から球面図形が得られることを GeoGebra を用いて見てきた．重心円と垂心円を導入することによって, 外接円, 九点円, 垂重円とそれらの根軸が対称な関係にあることが分かった．鋭角三角形から得られる球面図形と鈍角三角形から得られる球面図形には異なる特徴がある．それらを実際に作図するにあたって, 2 つの円に対する鏡映の軸の作図法が役に立つ．＜作図法 1 ＞から＜作図法 4 ＞までの作図法は, 反転 (円に関する鏡映) を学ぶ際のとてもよい作図問題となると思われる．

## 7　付録：本稿で作成した GeoGebra ファイル

下の URL で GeoGebra ファイルにアクセスできます. 重心 $G$ や三角形の頂点 $A$ を動かすことができます.

[図 1] 鋭角三角形から得られる球面図形 (https://www.geogebra.org/m/fnn2npyw)
[図 2] 鈍角三角形から得られる球面図形 (https://www.geogebra.org/m/m6fuwx4w)

## 参考文献


[1] 安藤哲哉, 三角形と円の幾何学, 海鳴社, 2006.

[2] 岩田至康, 幾何学大辞典 1, 槙書店, 1971.

[3] 岡田浩一, 一松信, 前田陽一：「オイラー線上に中心を持つ円族ー外接円・九点円・垂重円とそれらの根軸の球面上での統一的把握ー」, 数理解析研究所講究録 **2273**, (2023), 129–137.