Technology の活用と数学思考の変化

Use of technology and changes in mathematical thinking

生涯学習数学研究所　渡辺信

Shin Watanabe

Life Long Education on Mathematics Research Institute Japan

1.　グラフを見ればわかること・・・グラフ電卓の紹介

アメリカからF.Demana が来日してグラフ電卓を紹介したときの問題は，現在日本の教科書では高校２年の部分の応用として扱われている.F.Demana はグラフを見るとわかることとして答えを示した. このとき日本からの参加者はグラフを見ることに否定的であった.

問題　１辺が 15cm の正方形の４隅から小さな正方形を切り落とし直方体を作る. この体積最大のときの値を求めよ.

解法　切り落とす正方形の１辺の長さをｘcm とする.

出来上がった直方体の体積Ｖは底面積が１辺 (12-2x)の正方形で高さｘより，$V=x(15-2x)^2$

ここまでは変わったことはない.

(1) 微分を用いて極大点を求める

微分を用いて極大点を探す

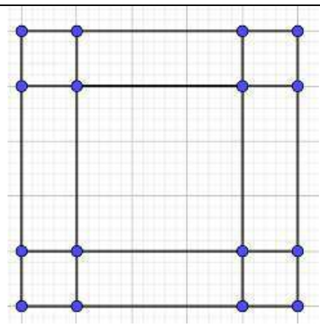
$d/dx(x(15-2x)^2, x)=2(2x-15)(2x-5)$

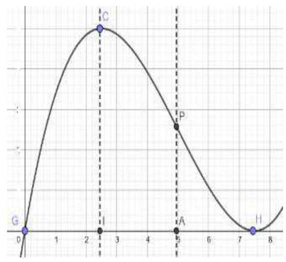
極大点を求める$(2x-15)(2x-5)=0$　$x=15/2, 5/2$

$x=5/2$ のとき極大値　$250cm^3$

(2) グラフを描いてみる

点Ｃの座標（2.5,250)　$x=2.5$ のとき最大値　$250cm^3$





F.Demana はこの問題の式をたてて，グラフを描くことによって最大値を示した. これに対して日本では，この問題を微分の応用に取り入れた. グラフを描かないで微分することによって最大値を求めた. この問題は高校２年で扱うときには微分計算で積の公式は使えない. また，中学校の教科書に GeoGebra を使うこととしてコラム欄に載せた. このとき問題の正方形を長方形にして扱われていた.

2.　関数のグラフは求めたい解が見える

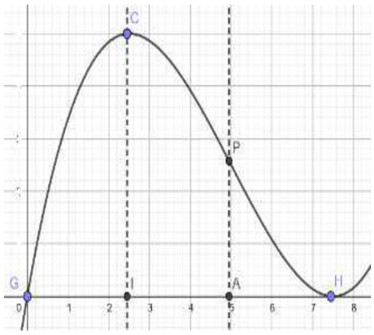
F.Demana の問題

数学ソフトの活用では『問題を考えるための補助』という役割を明確にすべきではないか. 数学ソフトを用いることによって『答』を即座に求められるということではない. 答えを求めるための補助としての役割を考えたい. 我々が数学ソフトを用いることは答えを求めたい，答えを知りたいというために使ってきたことを反省すべきである. 関数のグラフを描く問題で，数学ソフトを使ってはならない. もし使えばグラフは即座に求まる. グラフを見ることによって新しい問題の探求をしたい.

F.Demana は微分を知らない中学生がグラフを見て最大値を求めた. これに対して数学を考えるこ

との一つの方向性を示した．最大・最小を求めるためには微分をすればよいという今までの考え方に対してグラフを見ることによって変化がわかることを示したともいえる．数学という考え方の方法に対して，新しい見方を示したことになった．このようなグラフの使い方があることは，数学的思考の一つの変化を与えたのではなかろうか．

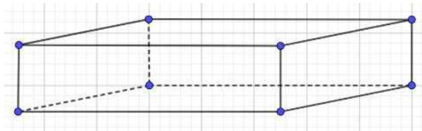
F.Demana の問題



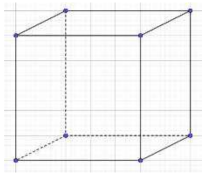
（正方形の辺の長さを 15 ㎝とした）

極大点が解になるが変曲点もあり興味深いグラフである．このグラフの中に隠されていることを考えたい．必ず極大点が存在することも問題とすべきことであろう．

このときの最大の見取り図



底面 1 辺 10 の正方形高さ 2.5 体積 250



1 辺 5 の立方体体積 125

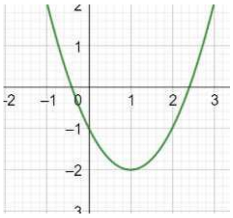
このときグラフでは変曲点になっていることが発見できる．

F.Demana の提案した問題に対して，中学校に掲載されたの問題では正方形から長方形へ問題を変えた．グラフは 2 次関数の形をしていて，最大値が放物線の頂点のように見える．なぜ変えたのであろうか．まだ学んでいたい 3 次関数を提示したくなかったのかもしれない．しかし Technology の活用ないろいろなことへと考え方を飛躍させる．学んでいる範囲を超えて新しいことへの発見が数学を考えることを飛躍させる．この問題では最大を求める問題であったが，その答えは立方体ではなかった．体積最大が立方体ではないならば，最も美しいはずの立方体は何故答えにならなかったのであろうかという新しい問題を考えることもできるかもしれない．長方形では立方体は考えられない．グラフを見て不思議と思うことが出てくる．今までに学んだことからはみ出すことを考えていたら，新しい探求は始まらない．今まで学んだことに固着する数学教育ではなく，自らが新しいことを発見し，その発見した問題を解いていくことが Technology を用いた探求的な学習になる．答えを即座に求めるために Technology を用いることではない．数学ソフトは答えを求めるために必要なことを見ること，そして御津事によって新しい問題へと発展できることに面白さがある．

この問題で初めに与える形が正方形でなかったら，立方体という答えがいかに体積が小さいかを考えることはなかった．Technology の活用が新しい発見としてどこに発展していくかは分からない．現在の数学教育ではあまりに体系を重んじすぎることによって，新しいことが出てくることを極力避けている．このようなことは 2 次方程式の問題にも現れる．『方程式の解はｘ軸の交点』と学んだとき，交点のない 2 次方程式は中学校の段階では意識的に出さない．しかし，Technology はこの意識的な配慮を超えてしまう．

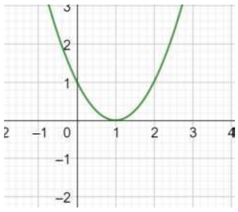
次の 2 次方程式を解きなさい．

$x^2-2x-3=0$



解　x=−1，3

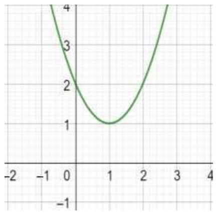
$x^2-2x-1=0$



解　$x=1\pm\sqrt{2}$

x=−0.41，2.41

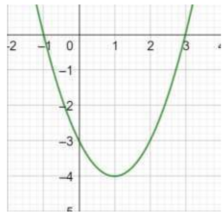
$x^2-2x+1=0$



解　x=1

x=1(重解)

$x^2-2x+2=0$



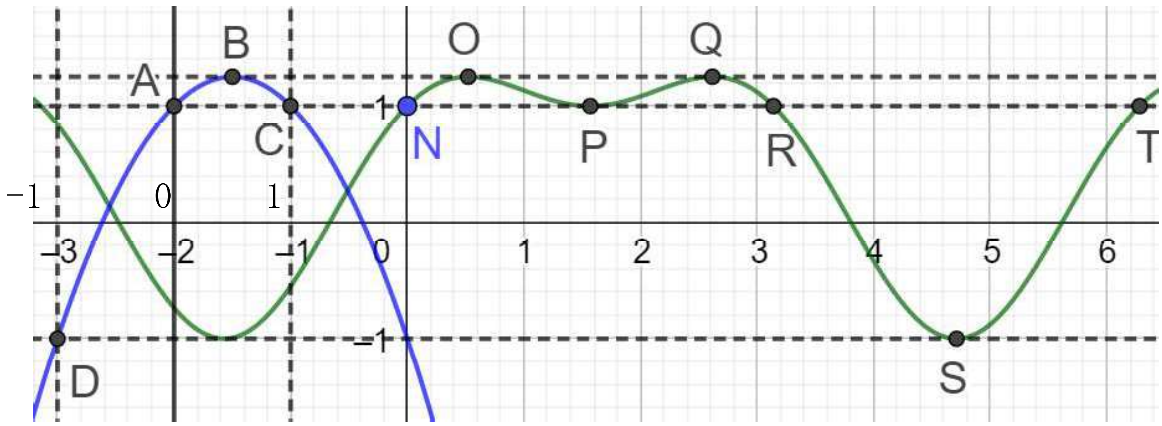
解　解なし

x=1±i

数学ソフトを使って求めると，解として複素数解が求まるかもしれない．中学生に対してはこのような方程式は範囲外であることを理由に出さない．しかし，数学ソフトは何も制限を付けずに見せてしまう．見えることによって数学として考えてきたことに新しい味方を加えることができる．

２．置き換えによる最大値を探す

$y=\cos^2 x+\sin x$ の最大・最小を求める



この問題に対して $\sin x=t$ と置き，$y=-t^2+t+1$ の最大・最小を求めるとき，2 つのグラフの点の対応が見えることには Technology が必要である．

この問題でも全体が見えないときにはグラフを描くことが必要であった．置き換えによる解法では何故置き換えても最大最小がわかるのかは説明がつかない．

グラフ上の点の動きに注目したい． $y=\cos^2 x+\sin x$ 上の点の動きはN→O→P→Q→R→S→Tの順に１回通る．これに対して $y=-t^2+t+1$ ではA→B→C→B→A→D→Aと順に各点を 2 度通る．対応する点は順次次の順に対応する．点Aは点N，点Bは点O，点Cは点P，点Bは点Q，点Aは点R，点Dは点S，点Aは点Tに対応している．

x	0	π/6	π/2	5π/6	π	3π/2	2π
t	0	1/2	1	1/2	0	−1	0
$y=\sin^2 x+\cos x$	1	5/4	1	5/4	1	−1	1
	N	O	P	Q	R	S	T
$y=-t^2+t+1$	A	B	C	B	A	D	A

y	1	5/4	1	5/4	1	-1	1
		極大		極大		端点	
		最大		最大		最小	

$y=-t^2+t+1$ の端点と極点について調べれば $y=\cos^2 x+\sin x$ の最大・最小がわかることがグラフの対比でわかる．

しかし，$y=\cos^2 x+\sin x$ の最大・最小はこのグラフを描いて調べればすべてわかる．この極点の座標はすべて表示されている．グラフ表示は Technology で簡単に描くことができるようになったので置き換えの必要性はない．

関数のグラフは求めたい解が見える

置き換えることの意味

$y=\cos^2 x+\sin x$ の最大・最小はこのグラフを描いて調べればすべてわかる．この極点の座標はすべて表示されている．グラフ表示は Technology で簡単に描くことができるようになったので置き換えの必要性はない．しかし，$t=\sin x$ と置き換えたとき，最大・最小は三角関数から放物線に変化する．今までは数学ソフトの活用はなかったので，この置き換えは有用であった．そこで今回は置き換えたとき三角関数のグラフ上の点の動きが，放物線上の動きとどのように対応しているかを見たい．置き換えることによって三角関数は消えて放物線上の動きになる．この 2 つのグラフでの点の動きが具体的に見ることができる．置き換えによって答えは求まるが，数学として何を考えているかは分からない．2 つのグラフを見ることによって，何を考えているかを知ることができるのではなかろうか．グラフの有用性を見ることができる．

３．鶴亀算をグラフで解く

問題　鶴と亀合わせて 10 匹，足の総数は 26 本のとき，鶴と亀は何匹か．

有名な問題であり，多くの解法考えられる．

すべてを亀にしたとき $y=-4x+26$（亀が一匹増えると足は 4 本減る）

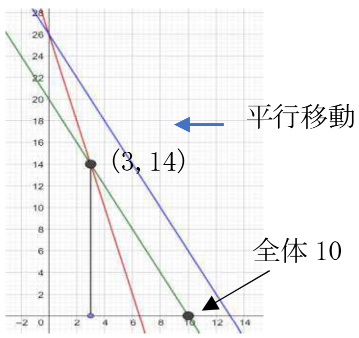
すべてを鶴にしたとき $y=-2x+26$（鶴が一匹増えると足は 2 本減る）

$y=26-2x$ のグラフを平行移動する

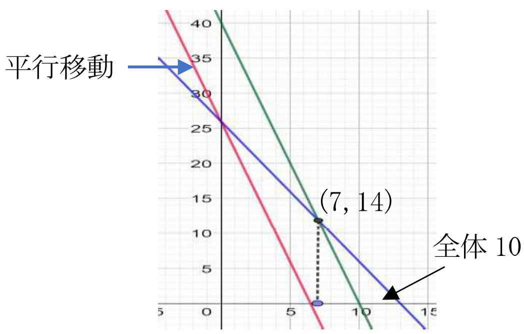
（$y=a-2x$ スケール a[0,26]を用いることによってグラフはで動く）

グラフを動かす　x 軸上 $x=10$ にする　（全体 10 匹は x 軸上）

$y=26-4x$ とのの交点交点の x 座標 $x=3$ が亀



x 軸上に解　　亀 3，鶴 10-3=7



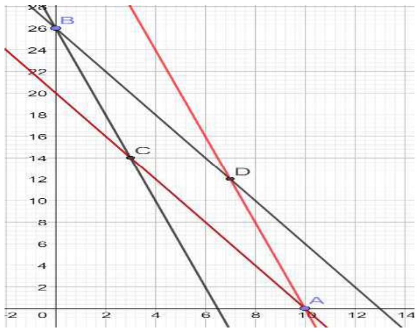
x 軸上に解鶴 7，亀 10-7=3

グラフを移動することによって解が求まる．Technology によってしらみつぶしにすべての場合を書きだすことは容易であり，あえて連立方程式を作りそれを解く必要はなくなったが，今回グラフを動かすことによって求められる．交点は計算をしてくれるので結果を見るだけである．

関数のグラフは求めたい解が見える

鶴亀算の解法・・・グラフを動かす

問題　鶴と亀合わせて 10 匹，足の総数は 26 本のとき，鶴と亀は何匹か．



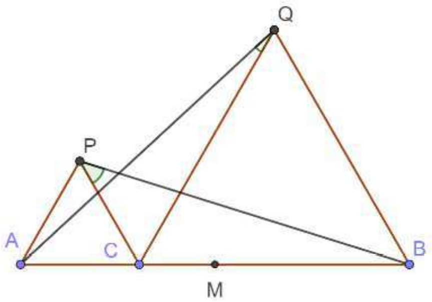
有名な問題であり，多くの解法考えられる．

点 A（10, 0）鶴亀を合わせた数
点 B（0, 26）鶴亀の足を合わせた数

点 C（3, 14）亀の数と鶴の足
点 D（7, 12）鶴の数と亀の足

４．データの規則はグラフからわかる

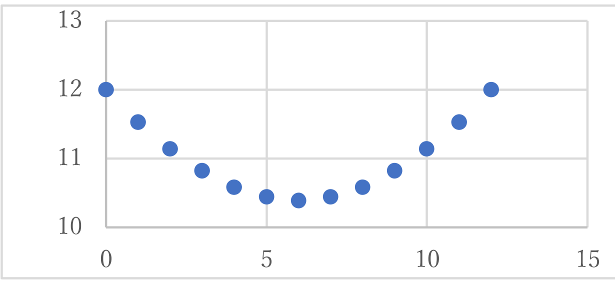
右図の問題は合同の簡単な応用問題で，線分 AB 上に点 C をとり，AC,CB を辺とする正三角形を作り，その頂点を P,Q とするとき，AQ=BP になることを，◿PCB と◿ACQ の合同を示せばよい問題である．この問題で，AQ の長さの変化はどのように変わるかを調べたい．



測定値の記録

点 C の位置	AP の長さ
0	12
1	11.53
2	11.14
3	10.82
4	10.58
5	10.44
6	10.39
7	10.44
8	10.58
9	10.82
10	11.14
11	11.53
12	12

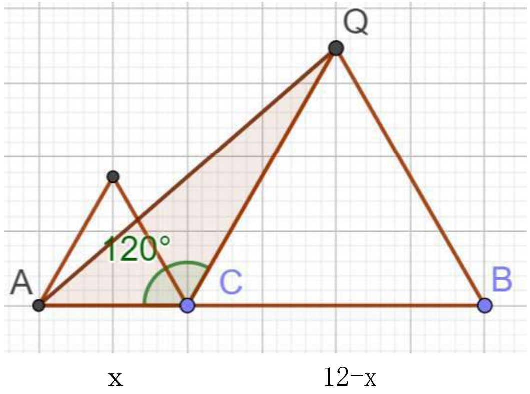
測定値のグラフ化

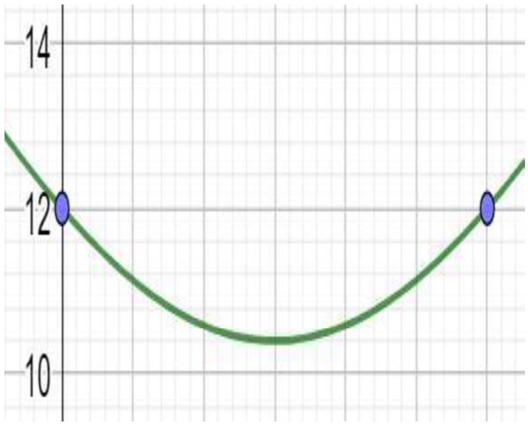


既存の数学

AP の長さを求めたい．全体を AB=12 として　　　　　このグラフを示すと

AC= x とおく．





⊿ACQ に余弦定理を用いる

$AQ^2 = AC^2 + CQ^2 - 2x(12-x)\cos 120^\circ \quad = x^2 + (12-x)^2 + x(12-x) = x^2 - 12x + 144$

$AQ = \sqrt{(x-6)^2 + 108}$

測定結果を数値のままで見てもどのような規則があるかわからないが，その数値をグラフ化することによって見えてくるものがある．データの分析という手法は Technology 導入までは数学的思考として考えられなかった．数学的思考では余弦定理を活用した方法を数学とみなされるが，今後データを尊重し，データ処理が簡単にできるようになると数学的思考に変化が現れるであろう．

自然科学では，科学の方法として測定を挙げる．

測定によって，自然現象の中から，量的な性質を抜き出し，その性質自身，または各量的性質の間の関係をしらべるのが，一番基本的な科学の方法である．中谷宇吉郎全集第 7 巻『科学の方法』P. 47

数学は科学かという問題がある．測定によらない厳密な論理性を重んじる学問として確立していると考えるならば，統計的手法のデータ収集は数学から見た違和感がある．数学の問題として AQ の長さの最小値を求めることが問われていたことに対して，問題作成・発見は今までの数学とは違う一面を見ている．問題発見・作成の重要性を問題にしたときには「帰納的思考」が必要になる．しかし，その時にもグラフを見ることは重要な数学的思考になる．

5. 将来の数学的思考の変化

Technology を使えることによって数学の思考が変わってきた．この顕著な表れは幾何学的な問題の中に見られる．静的なギリシャ以来の幾何の問題に対して，図形の動きを見ることによって新しい問題を考えることができるようになった．静的幾何から動的幾何へと拡張された世界を見ることができることは，図形の世界を広げた．この拡張を代数の世界でも取り扱いたい．そこで考えられることはグラフを見ること・グラフを読むことによって，数学の世界を拡張したい．

現在の数学教育においては微分の応用として，増減表を作りグラフを描くことが重要視されてきている．このグラフを描くことが数学ソフトによって簡単に見ることができるようになったことは，グラフを描くことから，そのグラフを使うことへと移行していってもよいのはないかと考えられる．

グラフを描くことによって一段落がつく現状を，グラフを描いたその先にある数学の世界へと進めたい．幾何が静的なものから動的なものへと変化したように，代数の世界でも Technology によって変化するに違いない．

グラフを読むことの訓練が必要であり，現状の数学教育にも変化が現れざるを得ない．GIGA スクール構想によって，各自が 1 台個人的に使える Technology は算数・数学教育に大きな影響を与える．統計的データもグラフ化することによって視覚化された．この視覚化する数学技能も Technology によって処理できる時代が来ている．ここにもグラフが現れ，グラフを読むことが重要になっている．数学的思考の変化は，当然数学教育の変化と結びつく．我々の時代が変化の時代のただ中にいると考えられる．

参考文献

[1]中谷宇吉郎（1956)『科学の方法』中谷宇吉郎全集第 7 巻を参照　岩波書店
[2]飯島康之（2021）数学的探究　明治図書
[3]内田幹貴,有元康一（2023）高等学校数学科における ICT を活用した三角関数を含む関数の最大値・最小値の導出　数理解析研究所講究録 2273 P.1-10
[4]渡辺信（2023）探究活動における Technology の有効活用と数学の楽しみ　数理解析研究所講究録 2273 P.30-40
[5]渡辺信（2022）グラフを描くからグラフを読むへ 第 1 回数学ソフト活用の授業実践報告会
[6]渡辺信（2022）微分の理解はグラフから 第 2 回数学ソフト活用の授業実践報告会