Long-Moody construction of braid group representations and Katz' middle convolution

By

廣恵一希 *

Abstract

本稿は千葉大学の根上春氏との共同研究 [6] の概説である．組紐群の Burau 表現の一般化として Long-Moody による組紐群の誘導表現の構成法が知られている．一方で Katz の middle convolution と呼ばれる自由群の表現の構成方法が知られており，複素領域の微分方程式論では近年でも活発に研究がなされている．本稿では全く異なる文脈から得られたこれらの表現の構成方法が，局所系係数のホモロジー群を介することで統一的に理解され，この 2 つの構成法を統一した新しい表現の構成法が得られることを解説する．

§1. Long-Moody の誘導表現と Katz の middle convolution

この節では Long-Moody の誘導表現とよばれる組紐群の誘導表現と，Katz の middle convolution とよばれる $\mathbb{A}^1\backslash\{n$ 個の点$\}$ 上の複素局所系の変換を導入しよう．

§1.1. Long-Moody の誘導表現

まず Long-Moody による組紐群の誘導表現 [8] を紹介する．B_n で n 本の組紐の生成する組紐群を表す．組紐群 B_n は抽象群としては $n-1$ 個の生成元 $\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}$ と関係式

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \qquad |i-j|\geq 2,$$
$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$$

によって与えられる．また $F_n = \langle x_1,\dots,x_n\rangle$ で階数 n の（非可換）自由群を表す．次で定める群準同型 $\theta_{\mathrm{Ar}}\colon B_n \to \mathrm{Aut}(F_n)$

$$\theta_{\mathrm{Ar}}(\sigma_i)(x_j) = \begin{cases} x_{i+1} & j=i \\ x_{i+1}^{-1}x_ix_{i+1} & j=i+1 \\ x_j & j\neq i,\, i+1 \end{cases}$$

2010 Mathematics Subject Classification(s): 20F36; 33C80; 33C60; 44A35; 55N25
Key Words: Katz algorithm, Braid group
Supported by JSPS KAKENHI Grant Number 20K03648
*Department of Mathematics and Informatics, Chiba University 1-33, Yayoi-cho, Inage-ku, Chiba-shi, Chiba, 263-8522 JAPAN.

はしばしば B_n の F_n への Artin 表現などと呼ばれる．この θ_{Ar} による F_n と B_n の外部半直積を $F_n \rtimes_{\theta_{\mathrm{Ar}}} B_n$ とおく．以下 θ_{Ar} を省略してしばしば $F_n \rtimes B_n$ と書く．

このとき Long は半直積群 $F_n \rtimes B_n$ の表現 $\rho\colon F_n \rtimes B_n \to \mathrm{GL}(V)$ (V は体 k 上のベクトル空間) から，組紐群 B_n の表現 $\rho^+\colon B_n \to \mathrm{GL}(V^{\oplus n})$ を次のように構成した．

$$\rho^+(\sigma_i) := \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix}\rho(\sigma_i) & & & \\ & \rho(\sigma_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \rho(\sigma_i)\end{matrix}}^{i-1} & & & \\ & 0 & \rho(\sigma_i x_i) & \\ & \rho(\sigma_i) & \rho(\sigma_i) - \rho(\sigma_i x_{i+1}) & \\ & & & \overbrace{\begin{matrix}\rho(\sigma_i) & & & \\ & \rho(\sigma_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \rho(\sigma_i)\end{matrix}}^{n-i-1} \end{pmatrix},$$

$i = 1, \ldots, n-1$．ただし右辺の行列は直和 $V^{\oplus n}$ に沿ったブロック行列である．特に $\mathrm{dim} V = 1$ の場合は ρ^+ は Burau 表現とよばれる組紐群の表現の中でも基本的な表現となっている．さらに Gassner 表現，Jones 表現，Lawrence 表現，Lawrence-Krammer-Bigelow 表現など様々な組紐群の表現たちが，この Long-Moody の誘導表現によって半直積群 $F_n \rtimes B_n$ の 1 次元表現から構成できることが知られている (たとえば [1] を参照)．

論文 [8] において Long は上の ρ^+ についての様々な構成方法を与えている．その中でも群環 $k[F_n]$ の添加イデアル (augmentation ideal) を用いたものをここでは紹介する．群 G が体 k 上生成する群環 $k[G]$ において，その添加写像 $\epsilon\colon k[G] \ni \sum_{g\in G} c_g \cdot g \mapsto \sum_{g \in G} c_g \in k$ の核 $I_G := \mathrm{Ker}\epsilon$ を G の添加イデアルと呼んだ．この I_G は両側 $k[G]$ イデアルとなるが，特に $G = F_n$ の場合は $\theta_{\mathrm{Ar}}\colon B_n \to \mathrm{Aut}(F_n)$ が $\mathrm{Ker}\,\epsilon$ を不変にするため，I_{F_n} は自然に B_n の作用も持つこととなる．

一方で $\rho\colon F_n \rtimes B_n \to \mathrm{GL}(V)$ によって V を左 $k[F_n \rtimes B_n]$ 加群と見ることで $k[F_n]$ 加群のテンソル積

$$I_{F_n} \otimes_{k[F_n]} V$$

を考えることができるが，これは I_{F_n} と V が持つ B_n 作用によって左 $k[B_n]$ 加群と見ることができる．この B_n 作用を I_{F_n} の自由 $k[F_n]$ 加群としての標準的な基底 $x_i - 1$, $i = 1, \ldots, n$ によって書き下したのが上の $\rho^+(\sigma_j)$ の行列表示に他ならない．

この添加イデアルを通した構成法を用いて Long-Moody の誘導表現を少しだけ一般化しておく．群 G と準同型 $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(F_n)$ の対 (G, α) を α が θ_{Ar} を経由するときに

Artin 表現と呼ぶことにしよう．すなわち Artin 表現 (G, α) が与えられたとすると，準同型 $\alpha_{B_n}: G \to B_n$ が存在して $\alpha = \theta_{\mathrm{Ar}} \circ \alpha_{B_n}$ が成立するため，G は F_n に組紐群の Artin 表現を経由して作用していることになる．

Definition 1.1 (Long-Moody 関手)．Mod_R で環 R 上の左加群の圏を表す．(G, α) を G の F_n への Artin 表現とする．このとき

$$\mathcal{LM}\colon \mathrm{Mod}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]} \ni V \longrightarrow I_{F_n} \otimes_{k[F_n]} V \in \mathrm{Mod}_{k[G]}$$

を Long-Moody 関手と呼ぶ.

§ 1.2. Katz の middle convolution の行列表示

Katz は [7] において middle convolution とよばれる $\mathbb{C}$ (あるいは $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) 上の偏屈層の変換を導入した．これはガウスの超幾何関数の積分表示式

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_1^\infty t^{\beta-\gamma}(t-1)^{\gamma-\alpha-1}(t-z)^{-\beta}\, dt$$

のある種の一般化とみなすことができ，整数論のみならず複素領域の微分方程式論において現在でも盛んに研究されている．一方で Dettweiler-Reiter は Katz のアイデアに基づいて middle convolution を $\mathbb{C}\backslash\{a_1, \ldots, a_n\}$ 上の複素局所系としての再定式化を [3] で与えた (ここで $a_1, \ldots, a_n$ は $\mathbb{C}$ の異なる n 点).

Dettweiler-Reiter による middle convolution の再定式化を紹介する．$\mathbb{C}\backslash\{a_1, \ldots, a_n\}$ 上の複素局所系を基本群 $\pi_1(\mathbb{C}\backslash\{a_1, \ldots, a_n\})$ の表現 $\rho\colon \pi_1(\mathbb{C}\backslash\{a_1, \ldots, a_n\}) \to \mathrm{GL}(V)$ とみなすと，基本群 $\pi_1(\mathbb{C}\backslash\{a_1, \ldots, a_n\})$ が各点 a_i を回る単純閉曲線 x_i によって生成される自由群 $F_n = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ であったことから，その表現を考えることは各生成元 x_i に対応する $g_i := \rho(x_i) \in \mathrm{GL}(V)$ の組 $(g_1, \ldots, g_n) \in \mathrm{GL}(V)^n$ を考えることに相当する．この線形変換の組 $(g_1, \ldots, g_n) \in \mathrm{GL}(V)^n$ に対して，複素数 $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ に付随した **convolution** C_λ を

$$C_\lambda\colon \mathrm{GL}(V)^n \ni (g_1, \ldots, g_n) \mapsto (\widehat{G}_1, \ldots, \widehat{G}_n) \in \mathrm{GL}(V^{\oplus n})^n,$$

$$\widehat{G}_i := \begin{pmatrix} \mathrm{id}_V & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \mathrm{id}_V & & & & \\ g_1 - \mathrm{id}_V & \cdots & g_{i-1} - \mathrm{id}_V & \lambda g_i & \lambda(g_{i+1} - \mathrm{id}_V) & \cdots & \lambda(g_n - \mathrm{id}_V) \\ & & & & \mathrm{id}_V & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \mathrm{id}_V \end{pmatrix},$$

$i=1,\ldots,n,$ として定義する．また $V^{\oplus n}$ の部分空間として

$$\mathcal{K}_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathrm{Ker}(g_i - \mathrm{id}_V) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} i \text{ 番目}, \quad \mathcal{L} := \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\widehat{G}_i$$

なるものを考えるとこれらは $\widehat{G}_i,\ i=1,\ldots,n$ の不変部分空間であることがわかる．特に $\lambda \neq 1$ のときに $\widehat{G}_i,\ i=1,\ldots,n$ が誘導する商空間 $\mathcal{V} := V^{\oplus n}/(\bigoplus_{i=1}^{n}\mathcal{K}_i + \mathcal{L})$ の線形変換を $G_i,\ i=1,\ldots,n$ と書いて，対応

$$MC_\lambda \colon \mathrm{GL}(V)^n \ni (g_1,\ldots,g_n) \mapsto (G_1,\ldots,G_n) \in \mathrm{GL}(\mathcal{V})^n$$

を $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ に関する **middle convolution** という．

表現 $\rho\colon F_n \to \mathrm{GL}(V)$ によって V を左 $k[F_n]$ 加群とみなすと，convolution と middle convolution は Long-Moody 関手の場合と同様に関手

$$\mathcal{C}_\lambda \colon \mathrm{Mod}_{k[F_n]} \longrightarrow \mathrm{Mod}_{k[F_n]}$$
$$\mathcal{MC}_\lambda \colon \mathrm{Mod}_{k[F_n]} \longrightarrow \mathrm{Mod}_{k[F_n]}$$

を定める．

§2. ホモロジー的 Euler 変換

前節でみた middle convolution とは実は $f(z) \mapsto E_\sigma(f)(z) := \int f(t)(z-t)^\sigma\,dt$ という (適当な積分路についての) 畳み込み (convolution) 変換の類似物と思える．このことをより明確にするために，convolution を局所係数ホモロジー群を用いて再定式化する．さらにこの再定式化によって middle convolution と Long-Moody の誘導表現が同時に得られることを説明する．

§2.1. F_n と B_n の幾何的実現

$D \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ を十分半径の大きな閉円盤であって，$a_1=(1,0),\ldots,a_i=(i,0),\ldots,a_n=(n,0)$ をその内点に含むものとする．このとき $Q_n := \{a_1,\ldots,a_n\}$ とおき，また $d \in \partial D$ を境界上の一点とする．そして d を基点として各 a_i の周りをまわる（適当に向きを付けた）単純閉曲線を x_i とおく．ただし各 x_i の内部に Q_n の点は a_i のみが含まれるとしておく．このとき

$$\pi_1(D\backslash Q_n, d) = \langle x_1,\ldots,x_n\rangle = F_n$$

となることはよく知られている．すなわち自由群 F_n は $D\backslash Q_n$ の基本群として現れる．一方で組紐群 B_n は位相対 (D, Q_n) の写像類群 $\mathfrak{M}(D, Q_n)$ と次のように同型であることが知られている．各 $i = 1, \ldots, n-1$ に対して half-Dehn ツイストとよばれる位相同型 $\tau_i\colon D \to D$ を

$$\tau_i(z - a_i) := \begin{cases} z - a_i & (|z - a_i| \geq 1) \\ \exp(-2\pi i|z - a_i|)(z - a_i) & (\frac{1}{2} \leq |z - a_i| \leq 1) \\ -(z - a_i) & (|z - a_i| \leq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

と定めると $\tau_i \in \mathfrak{M}(D, Q_n)$ であって，写像

$$\begin{aligned} \eta\colon\ B_n &\longrightarrow \mathfrak{M}(D, Q_n) \\ \sigma_i &\longmapsto \qquad \tau_i \end{aligned}$$

は群の同型を与える．

$f \in \mathfrak{M}(D, Q_n)$ は D/Q_n の自己同相を与え，さらに境界上の点を動かなさいのでこの f による押し出しによって群準同型 $\mathfrak{M}(D, Q_n) \ni f \mapsto f_* \in \mathrm{Aut}(\pi_1(D\backslash Q_n, d))$ が得られ，さらにこれは単射であることが知られている．従って同一視 $B_n \cong \mathfrak{M}(D, Q_n)$ のもとで B_n から $\mathrm{Aut}(F_n)$ への準同型が得られることになるが，これは Artin 表現 $\theta_{\mathrm{Ar}}\colon B_n \to \mathrm{Aut}(F_n)$ に他ならない．

§ 2.2.　ホモロジー的 Euler 変換

X を連結な位相多様体として，k 上のベクトル空間の圏に値をとる X 上の局所定数層（以下，k 局所系）を，点 $d \in X$ 上の茎をとることで，群環 $k[\pi_1(X, d)]$ 上の加群と同一視して以下これらを区別しないこととする．

Definition 2.1 (Kummer 局所系)**.** $\omega \in \pi_1(\mathbb{C}^\times)$ を原点を回る単純閉曲線で $\pi_1(\mathbb{C}^\times) \cong \mathbb{Z}$ の生成元とする．このとき 1 次元表現 $\rho\colon \pi_1(\mathbb{C}^\times, c_0) \to \mathrm{GL}_1(k)$ に対応する局所系を $\lambda := \rho(\omega) \in k^\times$ によって K_λ とかいて **Kummer 局所系**とよぶ．

Definition 2.2 (点の配置空間)**.** 位相多様体 M に対して，M^n の部分多様体

$$\mathcal{F}_n(M) := \{(m_i)_{i=1,2,\ldots,n} \in M^n \mid m_i \neq m_j,\, i \neq j\}$$

は M 上の n 点の**配置空間**とよばれる．

さて $\mathbb{C}\backslash Q_n$ 上の 2 点の配置空間 $\mathcal{F}_2(\mathbb{C}\backslash Q_n) = \{(t, z) \in \mathbb{C}^2 \mid t \neq z \text{ and } t, z \notin Q_n\}$ を考え，第一成分，第二成分それぞれへの射影を pr_t, pr_z と書くことにする．さらに $t - z$ に沿っての射影を

$$\mathrm{pr}_{t-z}\colon \mathcal{F}_2(\mathbb{C}\backslash Q_n) \ni (t, z) \mapsto t - z \in \mathbb{C}^\times$$

と書く．

さて V を $k[F_n \rtimes B_n]$ 加群としよう．同型 $F_n \cong \pi_1(D\backslash Q_n, d) \cong \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n, d)$ によって V は $\mathbb{C}\backslash Q_n$ 上の k 局所系とみなすことができる．したがって Kummer 局所系 K_λ に対して，$\mathcal{F}_2(\mathbb{C}\backslash Q_n)$ 上の k 局所系を

$$C(V, K_\sigma) := \mathrm{pr}_t^*(L) \otimes_k \mathrm{pr}_{t-z}^*(K_\lambda)$$

と定めることができる．さらに射影 $\mathrm{pr}_z \colon \mathcal{F}_2(\mathbb{C}\backslash Q_n) \to \mathbb{C}\backslash Q_n$ の $z \in \mathbb{C}\backslash Q_n$ におけるファイバー $\mathrm{pr}_z^{-1}(z)$ は $\mathbb{C}\backslash(Q_n \sqcup \{z\})$ と自然に同一視できる．したがって埋め込み $\iota_z \colon \mathbb{C}\backslash(Q_n \sqcup \{z\}) = \mathrm{pr}_z^{-1}(z) \hookrightarrow \mathcal{F}_2(\mathbb{C}\backslash Q_n)$ による引き戻しで，$\mathbb{C}\backslash(Q_n \sqcup \{z\})$ 上の k 局所系 $\iota_z^*(C(V, K_\lambda))$ を定めることができる．

Definition/Theorem 2.3 (ホモロジー的 Euler 変換. cf. H.-根上 [6])**.** V を $k[F_n \rtimes B_n]$ 加群とする．このとき 1 次ホモロジー群 $H_1(\mathbb{C}\backslash(Q_n \sqcup \{z\}); \iota_z^*(C(V, K_\lambda)))$ は自然に $k[F_n \rtimes B_n]$ 加群の構造を持ち，これを $k[F_n \rtimes B_n]$ 加群 V の Kummer 局所系 K_λ に関する**ホモロジー的 Euler 変換**という．

さらにより一般に次が成り立つ．(G, α) を F_n への Artin 表現とし，半直積群 $F_n \rtimes_\alpha G$ を考える．このとき V を $k[F_n \rtimes_\alpha G]$ 加群とすると，$H_1(\mathbb{C}\backslash(Q_n \sqcup \{z\}); \iota_z^*(C(V, K_\lambda)))$ は自然に $k[F_n \rtimes_\alpha G]$ 加群の構造を持つ．

したがってホモロジー的 Euler 変換によって $\mathrm{Mod}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]}$ 上の自己関手

$$\mathcal{E}_\lambda \colon \mathrm{Mod}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]} \ni V \longmapsto H_1(\mathbb{C}\backslash(Q_n \sqcup \{z\}); \iota_z^*(C(V, K_\lambda))) \in \mathrm{Mod}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]}$$

が得られることになる．この関手 $\mathcal{E}_\lambda$ も同様にホモロジー的 Euler 変換と呼ぶことにしよう．

ここで定めたホモロジー的 Euler 変換は前の節でみた convolution と Long-Moody の誘導表現を同時に実現する．

Theorem 2.4 (H.-根上 [6])**.** V を $k[F_n \rtimes B_n]$ 加群として，$\rho \colon F_n \rtimes B_n \to \mathrm{GL}(V)$ を対応する表現とする．また $\lambda \neq 1$ であると仮定する．このとき k ベクトル空間としての自然な同型

$$H_1(D\backslash(Q_n \sqcup \{z\}); \iota_z^*(C(V, K_\lambda))) \cong V^{\oplus n}$$

が得られ，この同型によって $k[F_n \rtimes B_n]$ 加群 $H_1(D\backslash(Q_n \sqcup \{z\}); \iota_z^*(C(V, K_\lambda)))$ に対応す

る表現 $\rho_\lambda\colon F_n \rtimes B_n \to \mathrm{GL}(V^{\oplus n})$ は次のように書ける．

$$\rho_\lambda(\sigma_i) = \begin{pmatrix} \overbrace{\rho(\sigma_i) \quad \quad \quad \quad}^{i-1} & & & & & & & & \\ & \rho(\sigma_i) & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \rho(\sigma_i) & & & & & \\ & & & & 0 & \rho(\sigma_i x_i) & & & \\ & & & & \rho(\sigma_i) & \rho(\sigma_i) - \rho(\sigma_i x_{i+1}) & & & \\ & & & & & & \overbrace{\rho(\sigma_i) \quad \quad \quad \quad}^{n-i-1} & & \\ & & & & & & & \rho(\sigma_i) & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \rho(\sigma_i) \end{pmatrix}$$

$i = 1, \ldots, n-1$,

$$\rho_\lambda(x_i) = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_V & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \mathrm{id}_V & & & & \\ \rho(x_1) - \mathrm{id}_V & \cdots & \rho(x_{i-1}) - \mathrm{id}_V & \lambda \cdot \rho(x_i) & \lambda \cdot (\rho(x_{i+1}) - \mathrm{id}_V) & \cdots & \lambda \cdot (\rho(x_n) - \mathrm{id}_V) \\ & & & & \mathrm{id}_V & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \mathrm{id}_V \end{pmatrix}$$

$i = 1, \ldots, n$.

R を環 R' をその部分環としたときに R 加群を R' 加群と自然にみなすことができるが，それによって定まる関手を $\mathcal{R}\mathrm{es}^R_{R'}\colon \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_{R'}$ と書くことにしよう．このとき上のことから関手の同型

$$\mathcal{LM} \cong \mathcal{R}\mathrm{es}^{k[F_n \rtimes_\alpha G]}_{k[G]} \circ \mathcal{E}_\lambda$$

が得られる．さらに Artin 表現として $G = \{e\}$，$\alpha\colon \{e\} \hookrightarrow \mathrm{Aut}(F_n)$ を考えると，関手の同型

$$\mathcal{C}_\lambda \cong \mathcal{E}_\lambda$$

が得られる．

§ 2.3. ホモロジー的 middle convolution

Katz の middle convolution の理論では $\mathbb{C}\backslash\{n$ 点$\}$ 上の局所系を $\mathbb{C}$，あるいは $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の偏屈層とみなす際に，中間拡大 (middle extension) あるいは極小拡大 (minimal extension) とよばれる操作が重要な役割を果たす．この類似物が我々の局所係数ホモロジーを用いた Euler 変換においても次のように考えることができる．

Definition/Theorem 2.5 (ホモロジー的 middle convolution. cf. H.-根上 [6])**.** F_n への Artin 表現を (G,α)，V を左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$ 加群とする．このとき

$$hMC_\lambda(V) :=$$
$$\mathrm{Im}\left(H_1(\mathbb{C}\backslash(Q_n \sqcup \{z\}); \iota_z^*(C(V,K_\lambda))) \to H_1^{\mathrm{BM}}(\mathbb{C}\backslash(Q_n \sqcup \{z\}); \iota_z^*(C(V,K_\lambda)))\right)$$

は自然に $k[F_n \rtimes_\alpha G]$ 加群の構造を持つ．これを $k[F_n \rtimes_\alpha G]$ 加群 V の Kummer 局所系 K_λ に関する**ホモロジー的 middle convolution** という．

これにより $\mathrm{Mod}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]}$ 上の自己関手

$$h\mathcal{MC}_\lambda \colon \mathrm{Mod}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]} \ni V \longmapsto hMC\lambda(V) \in \mathrm{Mod}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]}$$

が定まる．これも同様にホモロジー的 middle convolution と呼ぶことにしよう．

このホモロジー的 middle convolution は次に見るように，1.2 節で与えた Katz の middle convolution のホモロジーを用いた再定式化となっている．

Theorem 2.6 (H.-根上 [6])**.** $\lambda \in k\backslash\{0,1\}$ とする．*Artin* 表現として $G = \{e\}$ の場合をを考えると，関手の同型

$$\mathcal{MC}_\lambda \cong h\mathcal{MC}_\lambda$$

が存在する．

§ 2.4. 部分圏 $\mathcal{V}^{NT}$

Definition 2.7 (概自明 $k[F_n]$ 加群)**.** 各 $a_i \in Q_n$ に対して射影 $\mathrm{pr}_{a_i} \colon \mathbb{C}\backslash Q_n \ni t \mapsto t - a_i \in \mathbb{C}^\times$ を考える．このとき $k[F_n]$ 加群 T が概自明 (almost trivial) であるというのを，ある Kummer 局所系 K と点 $a_i \in Q_n$ があって $T \cong \mathrm{pr}_{a_i}^*(K)$ とできるときに言う．

Definition 2.8 (部分圏 $\mathcal{V}^{NT}$)**.** $\mathrm{Mod}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]}$ の忠実充満部分圏 $\mathcal{V}^{NT}$ を $M \in \mathcal{V}^{NT}$ であることを $M \neq \{0\}$ であって

$$\mathrm{Hom}_{k[F_n]}(M,T) = \mathrm{Hom}_{k[F_n]}(T,M) = \{0\}$$

が任意の概自明 $k[F_n]$ 加群 T に対して成り立つこととして定める．

この部分圏 $\mathcal{V}^{NT}$ は Katz[7], Dettweiler-Reiter[3], Völklein[9] それぞれに現れるが，ここでの記号は Völklein[9] にならった．

Theorem 2.9 (H.-根上 [6]，cf. Katz[7], Dettweiler-Reiter[3], Völklein[9])．

$\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ に対して，MC_λ は $\mathcal{V}^{NT}$ から自分自身への共変関手であって以下が成り立つ．

1. $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ に対して，$h\mathcal{MC}_\lambda$ は $\mathcal{V}^{NT}$ から自分自身への圏同値を与える．また $h\mathcal{MC}_{\lambda^{-1}}$ がその逆関手を与える．

2. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ に対して

$$h\mathcal{MC}_{\lambda_1} \circ h\mathcal{MC}_{\lambda_2} = h\mathcal{MC}_{\lambda_1\lambda_2}$$

が $\mathcal{V}^{NT}$ において成立する．

ここから直ちに次が従う．

Corollary 2.10 (H.-根上 [6]，cf. Katz[7], Dettweiler-Reiter[3], Völklein[9])．

$\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ に対して，$V \in \mathcal{V}^{\mathrm{NT}}$ が既約 $k[F_n \rtimes B_n]$ 加群であることと $h\mathcal{MC}_\lambda(V)$ が既約 $k[F_n \rtimes B_n]$ 加群であることは同値.

§3. Fiber-type arrangement のモノドロミーへの応用

前節までに $\mathbb{C}\backslash\{n$ 点$\}$ 上の k 局所系における変換であった Katz の middle convolution を，組紐群 B_n の作用も込めて $k[F_n \rtimes B_n]$ 加群の間の変換として自然に拡張できることを見た．さらに Artin 表現 (G,α) を考えることによって，middle convolution の理論を $k[F_n \rtimes_\alpha G]$ 加群にまで一般化することができた．このように B_n を異なる群 G に置き換えることで，様々な重要な局所系の間の変換として middle convolution が拡張されることを最後に説明しよう．

Definition 3.1 (Strictly linearly fibered arrangement)．$\mathcal{A}$ を $\mathbb{C}^{l+1}$ の超平面配置とする．このとき $\mathcal{A}$ が **strictly linearly fibered** であるというのを，$\mathbb{C}^{l+1}$ の適当な座標を選んで得られる射影 $p\colon \mathbb{C}^{l+1} \ni (x_1,\dots,x_{l+1}) \mapsto (x_1,\dots,x_l) \in \mathbb{C}^l$ に対して，$\mathbb{C}^l$ の超平面配置 $\mathcal{B}$ があって以下を満たすときにいう．すなわち，$p(\mathbb{C}^{l+1}\backslash\mathcal{A}) = \mathbb{C}^l\backslash\mathcal{B}$ であって，$p\colon \mathbb{C}^{l+1}\backslash\mathcal{A} \to \mathbb{C}^l\backslash\mathcal{B}$ はファイバーが $\mathbb{C}\backslash\{$ 有限個の点 $\}$ であるようなファイバー束となっている．

このとき特に超平面配置 $\mathcal{A}$ は $\mathcal{B}$ 上 strictly linearly fibered であるといわれる．

この strictly linearly fibered arrangement に対し，次が成り立つことが Cohen によって知られている．

Theorem 3.2 (Cohen[2])．$\mathcal{B}$ を $\mathbb{C}^l$ 内の m 個の超平面の配置，$\mathcal{A}$ を $\mathbb{C}^{l+1}$ 内の $m+n$ 個の超平面の配置であって，$\mathcal{A}$ は $\mathcal{B}$ 上 *strictly linearly fibered* であるとする．さらに $\mathbb{C}^l\backslash\mathcal{B}$ は *aspherical*，すなわち $\pi_i(\mathbb{C}^l\backslash\mathcal{B}) = \{0\}$, $i \geq 2$ であると仮定する．このとき自然な群準同型 $\eta\colon \pi_1(\mathbb{C}^l\backslash\mathcal{B}) \to P_n$ があって，これにより同型

$$\pi_1(\mathbb{C}^{l+1}\backslash\mathcal{A}) \cong F_n \rtimes \pi_1(\mathbb{C}^l\backslash\mathcal{B})$$

が得られる．

したがって超平面配置 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ が上の定理の仮定を満たすとすると，対 (G,g) として群 $\pi_1(\mathbb{C}^l\backslash\mathcal{B})$ と準同型 $\pi_1(\mathbb{C}^l\backslash\mathcal{B}) \xrightarrow{\eta} P_n \hookrightarrow B_n$ を選ぶことができ，さらに同型 $\pi_1(\mathbb{C}^{l+1}\backslash\mathcal{A}) \cong F_n \rtimes \pi_1(\mathbb{C}^l\backslash\mathcal{B})$ があることから，次のことが直ちに従う．

Corollary 3.3 (H.-根上 [6])**.** 超平面配置 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ は定理 *3.1* の仮定を満たすとする．このとき $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}^{NT}$ を定義 *2.8* によって定まる $\mathbb{C}^{l+1}\backslash\mathcal{A}$ 上の k 局所系の圏の忠実充満部分圏とする．このとき MC_λ, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ は $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}^{NT}$ から自分自身への圏同値を与える．

Cohen[2] に様々な strictly linearly fibered arrangement の例が紹介されているが，例えば $\mathbb{C}$ 上の n 点の配置空間 $\mathcal{F}_n(\mathbb{C}) = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_i \neq x_j,\, i \neq j\}$ は strictly linearly fibered arrangement の補空間の典型的な例である．よく知られているように，この空間の基本群は $\pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{C})) \cong P_n$ と純組紐群と同型であり，この場合に系 3.3 は原岡 [5] による純組紐群の middle convolution を復元する．またその他では B 型の Coxeter 配置なども strictly linearly fibered arrangement の例として知られている．

さらにアファイン空間 $\mathbb{C}^n$ 上の一般の超平面配置に関しては原岡 [4] によって微分方程式に対する middle convolution が定義されている．我々の系 3.3 はこの原岡の超平面配置の middle convolution の一部に対して，局所系における対応物を与えていることになる．

References

[1] S. Bigelow, J. P. Tian, *Generalized Long-Moody representations of braid groups*, Commun. Contemp. Math. **10** (2008), suppl. 1, 1093–1102.

[2] D. Cohen, *Monodromy of fiber-type arrangements and orbit configuration spaces*, Forum Math. **13** (2001), no. 4, 505–530.

[3] M. Dettweiler, S. Reiter, *An algorithm of Katz and its application to the inverse Galois problem*, J. Symbolic Comput. **30** (2000), no. 6, 761–798.

[4] Y. Haraoka, *Middle convolution for completely integrable systems with logarithmic singularities along hyperplane arrangements*, Arrangements of Hyperplanes - Sapporo 2009, Advanced Studies in Pure Mathematics **62** (2012), 109–136. Published2012

[5] Y. Haraoka, *Multiplicative middle convolution for KZ equations*, Math. Z. **294** (2020), no. 3-4, 1787–1839.

[6] K. Hiroe, H. Negami, *Long-Moody construction of braid representations and Katz middle convolution*, arXiv:2303.05770, (2023).

[7] N. Katz, Rigid local systems, Annals of Mathematics Studies, 139. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996. viii+223 pp.

[8] D. D. Long, *Constructing representations of braid groups*, Comm. Anal. Geom. **2** (1994), no. 2, 217–238.

[9] H. Völklein, *The braid group and linear rigidity*, Geom. Dedicata **84** (2001), no. 1-3, 135–150.